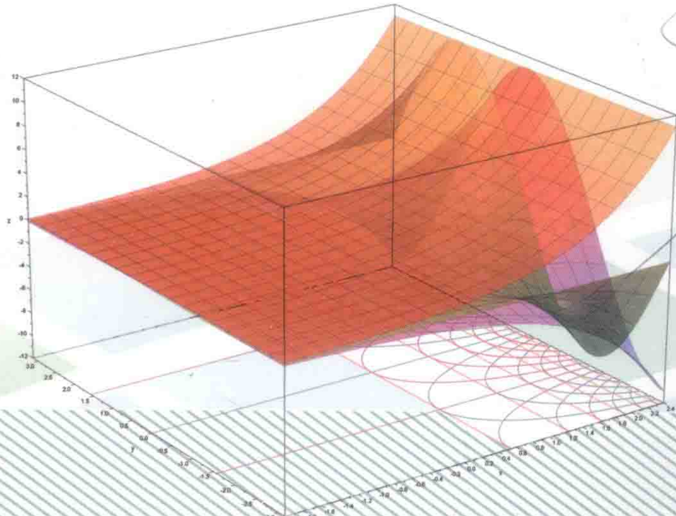
高等教育“十二五”应用型规划教材·数学系列

复变函数与积分变换

Functions of a Complex Variable and Integral Transforms

◎主编　李文江　陶元红



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等教育“十二五”应用型规划教材·数学系列

复变函数与积分变换

主　编　李文江　陶元红
副主编　高一文　陈向荣

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/李文江,陶元红主编. —武汉:武汉大学出版社,2016.4
高等教育“十二五”应用型规划教材. 数学系列
ISBN 978-7-307-17780-2

Ⅰ.复… Ⅱ.①李… ②陶… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材 ②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 080271 号

责任编辑:刘小娟 李嘉琪　　责任校对:杨赛君　　装帧设计:乔 楚

出版发行:**武汉大学出版社** (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:whu_publish@163.com 网址:www.stmpress.cn)
印刷:武钢实业印刷总厂　　经销:全国新华书店
开本:787×1092 1/16　　印张:12　　字数:301 千字
版次:2016 年 4 月第 1 版　　2016 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-17780-2　　定价:30.00 元

前　言

“复变函数与积分变换”是高等院校理工类各专业的一门重要数学课程。本书是根据我国教育部高等教育本科“复变函数与积分变换”课程的基本要求，集编者多年教学经验编写而成。其基本内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数及留数定理、共形映射、傅立叶变换、拉普拉斯变换等8个项目。

全书以新颖的形式和结构全面地介绍复变函数与积分变换的传统内容。为了使读者快速了解项目的内容，在每个项目的开始用简短的语言点题，增加该项目的可读性。每个项目分为3个板块：基础理论板块、素养拓展板块和实训板块。基础理论板块介绍基本概念、基本方法和基本技能。素养拓展板块包括外文素养和应用素养，在外文素养任务中选择一些该项目涉及的重要定理或概念，用英汉双语叙述，旨在提高学生的外文素养，为阅读外文文献打下良好基础；在应用素养任务中应用数学软件做若干涉及该项目内容的数学实验，旨在提高学生的应用能力，帮助学生掌握现代科学计算方法。实训板块精选了与该项目知识点相匹配的练习题，帮助学生了解和学习复变函数、积分变换的方法与应用。

本书由电子科技大学李文江、延边大学陶元红担任主编，重庆文理学院高一文、呼和浩特职业学院陈向荣担任副主编，由李文江、陶元红统稿。编写分工如下：项目三、项目七素养拓展板块、项目八由李文江编写；项目四、项目五由陶元红编写；项目一、项目六由高一文编写；项目二、项目七基础理论板块、实训板块、参考文献由陈向荣编写。

由于编者水平有限，书中难免有不妥和疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2016年2月

目　录

项目1 复数与复变函数

基础理论板块

任务1 复 数

1. 复数的概念及其基本运算

设 x 和 y 为两个任意实数,称形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数为**复数**. 其中 i 称为**虚数单位**,满足 $\mathrm{i}^2=-1$. 在电工学中,常用 j 表示虚数单位. 实数 x 和 y 分别称为 z 的**实部**和**虚部**,分别记为 $x=\mathrm{Re}z$, $y=\mathrm{Im}z$.

当 $x=0$ 且 $y\neq 0$ 时,$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数;当 $y=0$ 时,$z=x$ 就是我们在数学分析中讨论的实数. 也就是说,实数是复数当虚部为零时的特殊情形.

两个复数相等,当且仅当它们的实部和虚部分别相等,即若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则 $z_1=z_2\Leftrightarrow x_1=x_2, y_1=y_2$. 若 $z=x+\mathrm{i}y=0$,则 $x=0$ 且 $y=0$. 和实数不同的是,复数一般不能比较大小.

实部相等、虚部互为相反数的两个复数互为共轭复数. z 的共轭复数记作 $\bar{z}$,即若 $z=x+\mathrm{i}y$,则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

若 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,称

$$z_1+z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$$

为 z_1 与 z_2 的加法,右端的结果为 z_1 与 z_2 的和;称

$$z_1-z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)$$

为 z_1 与 z_2 的减法,右端的结果为 z_1 与 z_2 的差;称

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$$

为 z_1 与 z_2 的乘法,右端的结果为 z_1 与 z_2 的积;当 $z_2\neq 0$ 时,称

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

为 z_1 与 z_2 的除法,右端的结果为 z_1 与 z_2 的商.

全体复数并引入上述运算之后称为复数域,记为 **C**.

可以验证,复数的加法满足交换律和结合律,即:

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\quad (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

复数的乘法既满足交换律和结合律,也满足分配律,即:

$$z_1z_2=z_2z_1,\quad (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),\quad z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

可以验证，共轭复数的运算满足以下性质：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2) $\overline{\overline{z}}=z$；

(3) $z\overline{z}=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2$，$z+\overline{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\overline{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}z$.

例 1.1 化简 $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7$ 及 $\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$.

解 因为

$$\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{(1-\mathrm{i})^2}{2}=-\mathrm{i},$$

所以

$$\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7=(-\mathrm{i})^7=\mathrm{i},$$

$$\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\frac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

例 1.2 设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}z$，$\mathrm{Im}z$ 与 $z\overline{z}$.

解
$$z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$\mathrm{Re}z=\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}z=-\frac{1}{2},$$

$$z\overline{z}=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例 1.3 已知 $x+\mathrm{i}y=(2x-3)+\mathrm{i}y^2$，$x,y\in\mathbf{R}$，求 $z=x+\mathrm{i}y$.

解 由 $x=2x-3$，可得 $x=3$；由 $y=y^2$，可得 $y=0$ 或 $y=1$；因此 $z=3$ 或 $z=3+\mathrm{i}$.

2. 复平面

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与有序实数对 (x,y) 一一对应，因此可建立复数域和一个直角坐标系平面之间的对应关系. 这个建立了直角坐标系的平面称为复平面或者 z 平面，复平面也可以用 $\mathbf{C}$ 来表示. 通常把横轴叫作实轴或 x 轴，纵轴叫作虚轴或 y 轴. 有了复平面的概念，在复数和平面的点之间就建立了联系. 就像实数和数轴上的点不加以区别一样，以后我们也可认为复数和复平面上的点是同一的. 说一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 时，它可以是平面上的点 (x,y)；说平面上的一个点 (x,y) 时，它可以是复数 $z=x+\mathrm{i}y$.

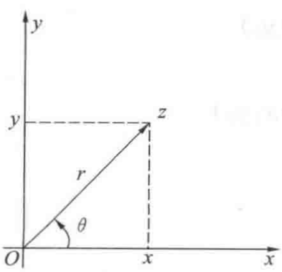


图 1.1

复平面上任一点 $z=x+\mathrm{i}y$ 都对应着一个从原点 O 到 $z=x+\mathrm{i}y$ 引出的向量，原点对应着零向量，如图 1.1 所示. z 对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为 z 的模或者绝对值，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

显然，关于模有下列各式成立：

(1) $|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$；

(2) $|z|\leqslant|x|+|y|$；

(3) $|z|=|\overline{z}|$，$z\overline{z}=|z|^2$；

(4) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$;

(5) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$(三角不等式).

当 $z\neq0$ 时,称向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与 x 轴正向之间的夹角 θ 为复数 z 的辐角,记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z,$$

于是有

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

当 $z\neq0$ 时,由于其辐角增加 2π 的整数倍,其终边不变,因此,辐角 $\theta=\mathrm{Arg}z$ 是多值的,z 的辐角中满足条件 $-\pi<\mathrm{Arg}z\leqslant\pi$ 的,称为 z 的辐角主值或主辐角,记为 $\arg z$,于是 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$,且有

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{1.1}$$

$z=0$ 时,z 的辐角没有意义.

$\arg z$ 与反正切函数 $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下关系(图1.2、图1.3):

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,y\text{ 为任意实数};\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$

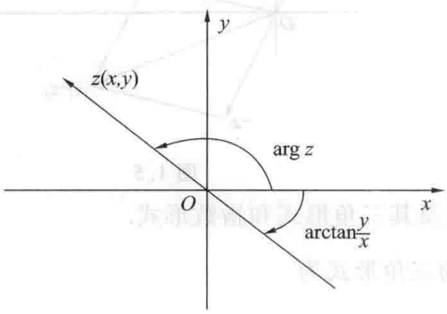


图 1.2

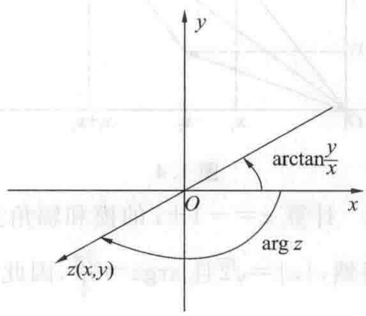


图 1.3

引入模和辐角的概念后,复数可以表示为 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,这种表示形式称为三角形式.

如果引入欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,则复数又可以表示为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,这种表示形式称为指数形式.前面我们用的复数表示形式 $z=x+\mathrm{i}y$ 称为代数形式.

复数的各种表示形式可以相互转化,能适应讨论不同问题的需要.

设 z_1 和 z_2 是两个非零复数,先把 z_1 和 z_2 转化为三角形式

$$z_1=|z_1|(\cos\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{i}\sin\mathrm{Arg}z_1),\quad z_2=|z_2|(\cos\mathrm{Arg}z_2+\mathrm{i}\sin\mathrm{Arg}z_2),$$

则容易验证

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2)],$$

即

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

或者

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

同理,可以通过验证得到

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \quad (z_2 \neq 0),$$

于是有

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0),$$

$$\begin{cases} \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \\ \operatorname{Arg}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \end{cases}$$

由此可见,复数的三角形式和指数形式用于计算乘除法比较简便.两个复数的乘积的模等于它们的模的乘积,两个复数的乘积的辐角等于它们的辐角之和,两个复数的商的模等于它们的模的商,两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

两个复数 z_1, z_2 的加减法与其对应的向量的加减法保持一致(图 1.4、图 1.5).

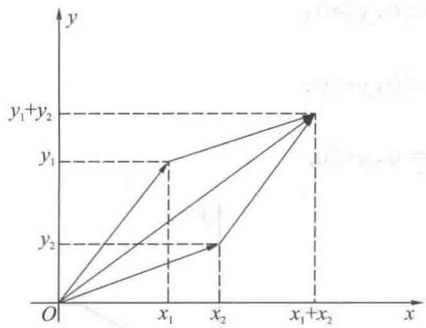


图 1.4

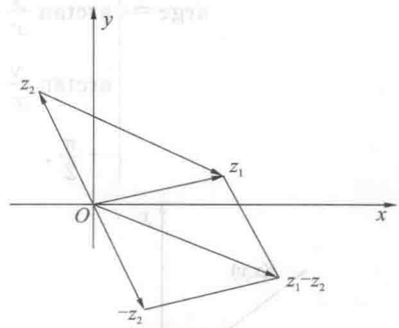


图 1.5

例 1.4 计算 $z=-1+\mathrm{i}$ 的模和辐角主值及其三角形式和指数形式.

解 显然,$|z|=\sqrt{2}$ 且 $\arg z=\dfrac{3\pi}{4}$,因此 z 的三角形式为

$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

指数形式为

$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

例 1.5 将下列复数转化为三角形式与指数形式:

(1) $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$;(2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解 (1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$,因为 z 在第三象限,所以

$$\theta=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi,$$

则其三角形式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right];$$

指数形式为

$$z=4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}.$$

(2)$z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$,显然

$$r=|z|=1,\quad \sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{10},$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{3\pi}{10},$$

故其三角形式为

$$z=\cos\frac{3\pi}{10}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10};$$

指数形式为

$$z=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}.$$

例 1.6 把复数 $z=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha(0<\alpha<\pi)$转化为三角形式.

解
$$\begin{aligned} z&=1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+2\mathrm{i}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ &=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\\ &=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

3. 复数的乘幂与方根

作为乘积的特例,我们考虑非零复数的正整数次幂 z^n,它是 n 个相同复数 z 的乘积,设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)],$$

从而有

$$|z^n|=|z|^n,\mathrm{Arg}(z^n)=n\mathrm{Arg}z.$$

当 $r=1$ 时,得到棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta).$$

求非零复数 z 的 n 次方根,就相当于解方程

$$w^n=z\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

记其根的总体为 $w=\sqrt[n]{z}$,下面求出它们.

为求 w,可设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,于是有

$$w^n=(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

它等价于

$$\rho^n=r\text{ 且 }n\theta=\varphi+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

于是

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

所求的方根为

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

容易验证 $w_{k+n}=w_k(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，于是 w_k 只有 n 个不同的值，所以，$w=\sqrt[n]{z}$ 的根又可以表示为

$$w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$

例 1.7 计算 $(-1+\mathrm{i})^{10}$.

解 由于

$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

因此

$$\begin{aligned}(-1+\mathrm{i})^{10}&=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{30\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{30\pi}{4}\right)\\&=32\left(\cos\frac{-\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{2}\right)\\&=-32\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 1.8 计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

解 由于

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

因此

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\quad(k=0,1,2,3).$$

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

这四个根是内接于中心在原点、半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点，且

$$w_1=\mathrm{i}w_0,w_2=-w_0,w_3=-\mathrm{i}w_0.$$

任务 2 复平面上的点集

1. 复平面上点集的一般概念

定义 1.1 设 $z_0\in\mathbf{C},r\in(0,+\infty)$，我们把满足 $|z-z_0|<r$ 的点集 $\{z\,|\,|z-z_0|<r,z\in\mathbf{C}\}$ 称为 z_0 的 r-邻域，记为 $U(z_0,r)$，称 z_0 为邻域中心，r 为邻域半径. 不需要指明邻域半径 r 的时候，就简称为 z_0 的邻域，记为 $U(z_0)$. 称集合 $\{z\,|\,0<|z-z_0|<r,z\in\mathbf{C}\}$ 为 z_0 的 r-空心邻域，记为 $\mathring{U}(z_0,r)$. 称集合 $\{z\,|\,|z-z_0|\leqslant r,z\in\mathbf{C}\}$ 为以 z_0 为中心、r 为半径的闭圆，记为 $\overline{U}(z_0,r)$.

定义 1.2　设 $E\subset \mathbf{C}$，$z_0\in \mathbf{C}$，若 $\forall r>0$，$U(z_0,r)\cap E$ 中有无穷个点，则称 z_0 为 E 的聚点．若 $\exists r>0$，使得 $U(z_0,r)\cap E=\{z_0\}$，则称 z_0 为 E 的孤立点．若 $\exists r>0$，使得 $U(z_0,r)\subset E$，则称 z_0 为 E 的内点．若 $\forall r>0$，$U(z_0,r)\cap E$ 中既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 z_0 为 E 的边界点．集合 E 的全部边界点组成的集合称为 E 的边界，记为 ∂E．

定义 1.3　若集合 E 的所有点都是它的内点，则称 E 为开集．若集合 F 的所有聚点都属于 F，则称 F 为闭集．$E\cup\partial E$ 称为 E 的闭包，记为 $\overline{E}$．

显然，任何集合 F 的闭包 $\overline{F}$ 一定是闭集．

定义 1.4　若 $\exists r>0$，$\exists z_0\in \mathbf{C}$，使得 $E\subset U(z_0,r)$，则称 E 是有界集，否则称 E 是无界集．

定义 1.5　若 $\forall r>0$，则称集合 $\{z\mid |z|>r, z\in \mathbf{C}_\infty\}$ 为无穷远点的一个邻域．

例 1.9　圆 $U(z_0,r)$ 是有界开集；闭圆 $\overline{U}(z_0,r)$ 是有界闭集．

例 1.10　集合 $\{z\mid |z-z_0|=r\}$ 是以 z_0 为中心、半径为 r 的圆周，它是圆 $U(z_0,r)$ 和闭圆 $\overline{U}(z_0,r)$ 的边界．

例 1.11　复平面、实轴、虚轴是无界集，复平面是无界开集．

例 1.12　集合 $E=\{z\mid 0<|z-z_0|<r\}$ 是去掉圆心的圆，是有界开集．

2. 复球面与无穷大

在点坐标是 (x,y,u) 的三维空间中，把 xOy 平面看作 $z=x+\mathrm{i}y$ 平面．考虑球面 S：

$$x^2+y^2+u^2=1,$$

球面上的点 $N(0,0,1)$ 称为球极（图 1.6）．

我们可以建立一个复平面 $\mathbf{C}$ 到 S-$\{N\}$ 之间的一一对应：

$$z=x+\mathrm{i}y=\frac{x'+\mathrm{i}y'}{1-u'},$$

$$x'=\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1},\quad y'=\frac{z-\overline{z}}{|z|^2+1},\quad u'=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

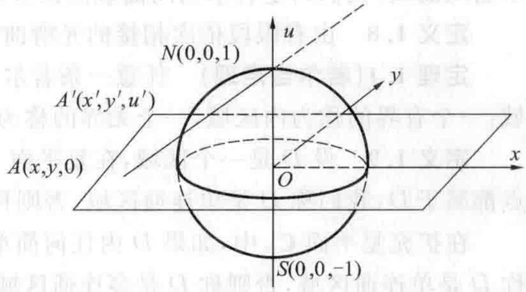


图 1.6

我们称上面的映射为球极射影．

对应于球极射影，我们引入一个新的非正常复数无穷远点 ∞，称 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 为扩充复平面，记为 $\mathbf{C}_\infty$．

关于 ∞，其实部、虚部、辐角无意义，模等于 $+\infty$，基本运算为（a 为有限复数）：

$$a\pm\infty=\infty\pm a=\infty;$$

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty\quad(a\neq 0);$$

$$\frac{a}{0}=\infty\quad(a\neq 0);\quad \frac{a}{\infty}=0\quad(a\neq\infty).$$

$\infty\pm\infty$，$\infty\cdot 0$，$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$ 没有意义．

3. 区域与曲线

定义 1.6　我们称复平面 $\mathbf{C}$ 上的集合 D 是一个区域，如果满足：

(1) D 是开集；

(2) D 是连通的，即 D 中任意两点可以用完全含于 D 内的有限折线连接．

我们则称区域 D 内及其边界上全部点所组成的集为闭域，记为 $\overline{D}=D\cup\partial D$．

$\mathbf{C}_\infty$ 引入邻域的概念以后,类似地可以定义聚点、内点、边界点与孤立点、开集和闭集等概念.

复平面 $\mathbf{C}$ 上的区域也是扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty$ 上不含无穷远点的区域,扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty$ 含无穷远点的区域是 $\mathbf{C}$ 上的一个区域 D 和一个与 D 相交不空的无穷远点的邻域的并集.

定义 1.7 如果 $x(t),y(t)$ 是 $[a,b]$ 上的两个连续的实变函数,则由方程组

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad a\leqslant t\leqslant b$$

所确定的点集 C 称为连续曲线,如果令 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$,则这个曲线就可以用一个方程

$$z=z(t)\quad (a\leqslant t\leqslant b),\quad t\in[a,b] \tag{1.2}$$

来代表,这就是平面曲线的参数方程. 如果 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 在 $[a,b]$ 上不同时为零,则称曲线 C 为一条光滑曲线,$z=z(a)$ 与 $z=z(b)$ 分别称为 C 的起点与终点. 确定了起点和终点的曲线就称为有向曲线,由起点到终点的方向就是曲线 C 的正方向,由终点到起点的方向是曲线 C 的负方向. 对于满足 $a\leqslant t_1\leqslant b$ 和 $a<t_2<b$ 的 t_1 和 t_2,当 $t_1\neq t_2$ 时,有 $z(t_1)=z(t_2)$,我们就称点 $z(t_1)$ 为曲线 C 的重点. 若连续曲线 C 没有重点,称 C 为简单曲线或若尔当(Jordan)曲线. 若还有 $z(a)=z(b)$,则称 C 为一条简单连续闭曲线,或若尔当闭曲线. 我们约定若尔当闭曲线的正方向是逆时针方向,负方向是顺时针方向.

定义 1.8 由有限段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为逐段光滑曲线.

定理 1.1(若尔当定理) 任意一条若尔当闭曲线把整个复平面分成两个没有公共点的区域:一个有界的称为内区域,一个无界的称为外区域.

定义 1.9 设 D 是一个区域,在复平面 $\mathbf{C}$ 上,如果 D 内任何简单闭曲线的内区域中每一点都属于 D,我们称 D 是单连通区域,否则称 D 是多连通区域.

在扩充复平面 $\mathbf{C}_\infty$ 中,如果 D 内任何简单闭曲线的内区域或外区域中每一点都属于 D,则称 D 是单连通区域,否则称 D 是多连通区域(图 1.7).

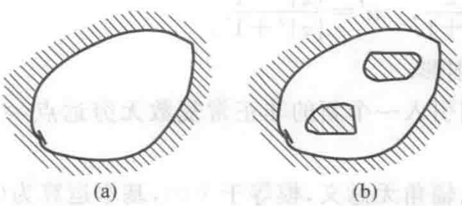


图 1.7

例 1.13 集合 $\{z\,|\,(1-\mathrm{i})z+(1+\mathrm{i})\bar{z}>0\}$ 为半平面,它是一个单连通无界区域,其边界为直线 $(1-\mathrm{i})z+(1+\mathrm{i})\bar{z}=0$,即 $x+y=0$.

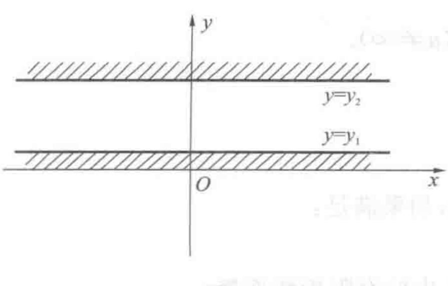


图 1.8

例 1.14 集合 $\{z\,|\,y_1<\mathrm{Im}z<y_2\}$ 是一个带形区域,它是一个单连通无界区域,其边界为直线 $\mathrm{Im}z=y_1$ 及 $\mathrm{Im}z=y_2$(图 1.8).

例 1.15 集合 $\{z\,|\,\theta_1<\arg z<\theta_2\}$ 是一角形区域,它是一个单连通无界区域,其边界为射线 $\arg z=\theta_1$ 及 $\arg z=\theta_2$(图 1.9).

例 1.16　$\{z\,|\,2<|z|<4\}$是一个圆环，它是一个多连通有界区域，其边界为圆周$|z|=2$及$|z|=4$(图 1.10).

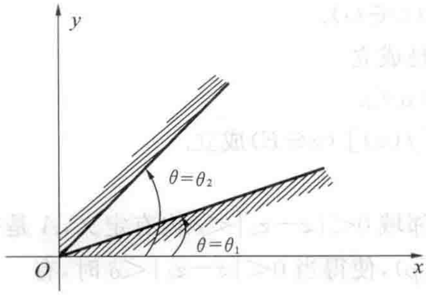


图 1.9

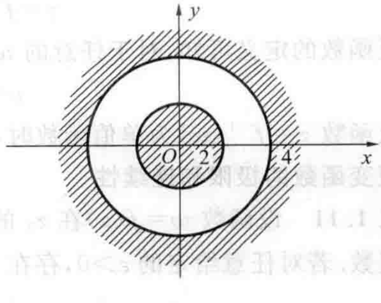


图 1.10

例 1.17　在$\mathbf{C}_\infty$上，集合$\{z\,|\,2<|z|\leqslant+\infty\}$与$\{z\,|\,2<|z|<+\infty\}$分别为单连通无界区域及多连通无界区域，其边界分别为$\{z\,|\,|z|=2\}$及$\{z\,|\,|z|=2\}\cup\{\infty\}$.

任务3　复变函数

1. 复变函数的定义

定义 1.10　设E为复平面的一个集合，如果存在某个对应关系f，按照这一关系，对于集合E中的每一个复数$z=x+\mathrm{i}y$，都存在唯一一个(两个或两个以上)复数$w=u+\mathrm{i}v$与之对应，我们称变量w是变量z的函数，记作

$$w=f(z),\quad z\in E.$$

如果一个z对应着唯一一个w，我们称函数$f(z)$是单值复变函数；如果一个z对应着两个或两个以上的w，我们称函数$f(z)$是多值复变函数. 集合E称为函数$f(z)$的定义域，对应于E中所有z的一切w值所成的集合$\{w\,|\,w=f(z),z\in E\}$，称为$f(z)$在E上的值域.

例 1.18　$w=|z|$，$w=z^2$及$w=\bar{z}$是单值函数，而$w=\mathrm{Arg}z(z\neq0)$及$w=\sqrt{z}(z\neq0)$是多值函数.

之后的章节如无特别声明，所讨论的函数均为单值函数.

w是z的函数，其实就是变量w依赖变量z的变化而变化. 由于决定一个复数$z=x+\mathrm{i}y$的两个因素是实部x和虚部y，决定复数$w=u+\mathrm{i}v$的两个因素是实部u和虚部v，因此复变函数w和自变量z之间的关系$w=f(z)$其实就是实部u和虚部v都依赖变量x和变量y的变化而变化，即相当于两个二元实函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$. 即

$$w=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y),\quad (x,y)\in E.$$

比如函数$w=z^2-2$. 令$z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$，那么$u+\mathrm{i}v=(x+\mathrm{i}y)^2-2=x^2-y^2-2+2xy\mathrm{i}$，因而函数$w=z^2-2$对应于两个二元实变函数$u=x^2-y^2-2$，$v=2xy$.

一个复变函数也可看作一个映射，设$f(z)$的定义域为E，$f(z)$的值的集合为G，则$f(z)$将点集E的点z映射为点集G的点w，点集E映射为点集G，则称点w为点z的像，点z为点w的原像.

我们知道，一一映射存在逆映射. 相应地，复变函数也有反函数的概念. 假若函数$w=f(z)$的定义域为点集E，值域为点集G，那么点集G中的每一个点w，必将对应着点集E中的

一个(或多个)点.于是,按照函数的定义,这种对应关系就确定了一个定义在点集G的一个单值(或多值)复变函数,我们把它称为函数$w=f(z)$的反函数,记作

$$z=f^{-1}(w) \quad (w\in G).$$

从反函数的定义可知,对于任意的$w\in G$,总是成立

$$w=f[f^{-1}(w)].$$

当反函数$z=f^{-1}(w)$为单值函数时,$z=f^{-1}[f(z)]\ (z\in E)$成立.

2. 复变函数的极限和连续性

定义 1.11 设函数$w=f(z)$在z_0的某去心邻域$0<|z-z_0|<\rho$内有定义,A是一个确定的有限复数.若对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0(\delta\leqslant\rho)$,使得当$0<|z-z_0|<\delta$时,有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

我们就称A为$f(z)$当z趋向于z_0时的极限,记作$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,或记作

$$f(z)\to A(z\to z_0).$$

这个定义的几何意义是:当变点z一旦进入z_0的充分小的δ去心邻域时,它的像点$f(z)$就落入A预先给定的ε的邻域中.它跟一元实变函数极限的几何意义十分类似,只是这里用圆形邻域代替了那里的区域.

应当注意,这个定义虽然在形式上和微积分中一元函数的极限定义完全相同,但这里的要求要苛刻得多.在微积分中,函数$f(z)$当$z\to z_0$时极限$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$是否存在,只需考虑$z$在$x$轴上沿着$z_0$的左、右两个方向的极限是否存在且相等,而定义1.11中z趋向于z_0的方式是任意的.就是说,z在z_0的邻域内沿任何路径,以任何方向、任意方式趋于z_0,$f(z)$都要趋向于同一个常数A.

复变函数的极限有类似于实函数极限的性质.例如,当$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$时,有

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B,$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB,$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

复变函数极限的计算,可归结为实函数极限的计算,具体来说,有下面的定理:

定理 1.2 若设函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,$A=u_0+\mathrm{i}v_0$,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,则$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$的充要条件是

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=v_0.$$

证 如果$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,那么根据极限的定义,就有:当$0<|(x+\mathrm{i}y)-(x_0+\mathrm{i}y_0)|<\delta$时,

$$|(u+\mathrm{i}v)-(u_0+\mathrm{i}v_0)|<\varepsilon;$$

或当$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时,

$$|(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)|<\varepsilon.$$

因此,当$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时,

$$|u-u_0|<\varepsilon,\quad |v-v_0|<\varepsilon,$$