普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学（经管类）

（上册）

GAODENG SHUXUE (JINGGUANLEI)

史悦 李晓莉 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学(经管类)

（上册）

史 悦 李晓莉 编

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

内容提要

本书内容根据高等院校经管类专业高等数学课程的教学大纲及“工科类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成.全书注重从学生的数学基础出发,通过实际问题引入数学概念,利用已知数学工具解决新问题,并将数学方法应用于实际问题,特别是结合学生的专业特点,精选了许多高等数学方法在经济理论上的应用实例.在这个过程中培养学生的数学素养,建模能力,严谨的思维能力,创新意识及应用能力,本书力求数学体系完整,深入浅出.

全书分为上、下两册,上册包括:函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、微分方程.书末附有便于学生查阅的基本数学公式,常见曲线方程及图形,习题答案与提示.

本书适合作为各类普通高等院校经济管理类各专业高等数学课程的教材及参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经管类.上册/史悦,李晓莉编.--北京:北京邮电大学出版社,2016.8

ISBN 978-7-5635-4902-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①史…②李… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 192830 号

书　　名: 高等数学(经管类)(上册)
著作责任者: 史　悦　李晓莉　编
责 任 编 辑: 彭　楠　张珊珊
出 版 发 行: 北京邮电大学出版社
社　　址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)
发 行 部: 电话:010-62282185　传真:010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经　　销: 各地新华书店
印　　刷: 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本: 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张: 18.5
字　　数: 484 千字
版　　次: 2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4902-3　　定　价:40.00 元

·如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系·

前　　言

数学不仅是一门科学，一种计算工具，更是一种严谨的思维模式. 高等数学作为各级高等院校的重要基础课，随着课程改革的深入，更加注意培养学生的创新能力和数学建模的应用能力，因此全书注重从学生的数学基础出发，首先突出数学建模的思想，通过实际问题引入数学概念(即建立数学模型)，体现数学概念的来源，避免生硬地直接引入数学概念；其次在建立模型之后，注意引导解决模型所提出问题的思想方法，在此过程中特别强调发散性思维对解决问题的思路和创新方法的影响，开阔学生思路，引导学生对解决问题的各种想法进行实践，体现研究问题的一般过程. 最后利用已知数学概念和方法应用于实际问题，结合学生的专业特点，精选了许多高等数学方法在经济理论上的应用实例，并为提高学生的学习兴趣引入了实际生活中许多应用的实例，使得教师在教学过程中能够培养学生的数学素养、建模能力、严谨的思维能力、创新意识及应用能力.

书中对例题的选择注重典型多样，富有启发性，着重基本概念和基本方法的理解，不片面追求技巧性与难度，在每节的习题选择上也体现了这一基本原则. 但在每章的总习题中注重知识的综合应用与常用技巧的训练. 本书在编写过程中，融入了编者多年的教学经验，在整体内容上力求数学体系完整，深入浅出，适于经管类学生的学习难度与后续经济、管理类课程的应用衔接，对于 * 号部分可根据专业及学生基础进行教学并可指导学生作为课下阅读.

全书分为上、下两册，上册包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、微分方程. 书末附有便于学生查阅的基本数学公式，常见曲线方程及图形，积分表及习题答案与提示.

本书的完成要感谢北京邮电大学教务处的支持和各位数学系同仁的帮助，同时要感谢北京邮电大学出版社的大力支持. 数学系同仁对本书的内容提出了许多宝贵的意见，出版社从编审到出版付出了很大的精力，实则本书是大家共同努力的结晶，在此表示感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中错误及不当之处在所难免，敬请各位专家、同行、读者指出，以便今后改进、完善、提高.

编　者

目　　录

第一章　函　　数

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象，更确切地讲高等数学是以变量与变量之间的一种依赖关系——函数关系为研究对象的一门学科. 因此，函数是高等数学中最重要、最基本的概念之一.

本章作为本课程的基础知识，首先介绍实数的一些基本性质，复习常用实数集及常见的不等式，然后介绍函数等基本概念及函数的基本性质，与初等数学衔接并提高.

第一节　基础知识

一、实数的重要性质与实数集

若无特别声明，本课程中所指的数都是实数. 关于实数的严密理论这里不深入讨论，现列举以后常用的几个重要性质.

1. 实数的几个重要性质

(1) 有序性　　对任意两个实数 a、b，则 $a<b$，$a=b$，$a>b$ 三者必居其一且只居其一；若 $a\leqslant b$，$a\geqslant b$，则 $a=b$；a、b、c 均为实数，若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$.

(2) 无界性　　对任一实数 a，总存在实数 b，使 $a<b$，或者总存在自然数 n，使 $a<n$. 这个性质称为实数无上界. 同样实数无下界.

(3) 稠密性　　对任意两个实数 a、b，若 $a<b$，则存在实数 c，使 $a<c<b$. 从而在任意两个不等实数之间存在无穷多个实数.

推论 1　对任意两个实数 a、b，且 $a<b$，总存在实数 $\varepsilon>0$，使 $a<b-\varepsilon$.

推论 2　对任意两个实数 a、b，如果对任意 $\varepsilon>0$，总有 $|a-b|<\varepsilon$ 成立，则 $a=b$.

有理数在实数中的稠密性(同理无理数在实数中亦稠密)：在任意两个不等实数之间存在无穷多个有理数.

(4) 完备性　　实数和直线上的点存在一一对应关系，称这条直线为实数轴，简称数轴. 数轴上与点对应的数称为该点的坐标. 实数的这个特性说明了实数之间无空隙称为实数的连续性或完备性. 实数的完备性是极限理论的基础. 有理数和无理数没有这个性质.

2. 常用实数集

高等数学中常用的实数集合是区间：

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\};\quad [a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\};$$
$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\};\quad (a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\};$$

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\};\quad (a,+\infty)=\{x|x>a\};$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\};\quad (-\infty,b)=\{x|x<b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\mathbf{R}\}=\{x|-\infty<x<+\infty\}.$$

邻域也是经常用到的一种集合形式.设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 **$\boldsymbol{\delta}$ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为此邻域的中心,δ 称为此邻域的半径,如图 1-1(a)所示.$U(a,\delta)$ 几何上表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域,当我们不关心 δ 的大小时,可将 a 的邻域表示为 $U(a)$.

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的**去心 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.如图 1-1(b)所示.

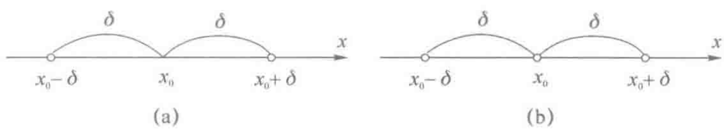

图 1-1

二、绝对值

实数的绝对值的定义、性质及相关不等式在初等数学中已经学过,在此仅列出以便查用.这里需强调的是关于绝对值不等式,因在高等数学中常用不等式对一些量进行估计,所以请读者熟练掌握和应用这些不等式.

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases};\quad |a|=\sqrt{a^2};\quad |a\cdot b|=|a|\cdot|b|;\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq 0);$$
$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|;\quad |a\pm b|\geqslant|a|-|b|;\quad ||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|;$$
$$|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a;\quad |x|>a\Leftrightarrow x<-a\text{ 或 }x>a.$$

例 1 解不等式 $|2x-1|+|x+3|\leqslant 15$.

解 $x=-3$ 及 $x=\frac{1}{2}$ 将 $(-\infty,+\infty)$ 分成 3 个子区间 $(-\infty,-3)$,$\left[-3,\frac{1}{2}\right]$,$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,在这 3 个子区间上分别求解不等式.

当 $x\in(-\infty,-3)$ 时,原不等式化为 $(-2x+1)-(x+3)\leqslant 15$,即 $x\geqslant-\frac{17}{3}$,所以在 $(-\infty,-3)$ 上的解为 $-\frac{17}{3}\leqslant x<-3$.

同理,在 $\left[-3,\frac{1}{2}\right]$ 上的解为 $-3\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上的解为 $\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{13}{3}$.

原不等式的解为各子区间上解的并,即 $-\frac{17}{3}\leqslant x\leqslant\frac{13}{3}$.

三、常用数学符号

为了书写简洁，在今后的学习中常采用下列逻辑记号：

(1)"$\exists$"表示"存在"；

(2)"$\forall$"表示"对每一个"或"对任一个"或"对所有的"；

(3)"$\in$"表示"属于"；

(4)"$\notin$"表示"不属于"；

(5)"$A\Rightarrow B$"表示"如果命题 A 成立，则命题 B 成立"，或称"A 是 B 的充分条件"；

(6)"$A\Leftarrow B$"表示"如果命题 B 成立，则命题 A 成立"，或称"A 是 B 的必要条件"；

(7)"$A\Leftrightarrow B$"表示"A 是 B 的充要条件"，或称"A 与 B 等价"；

(8)"max"表示"最大"，"min"表示"最小"；

(9) $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$；

(10) $\prod\limits_{i=1}^{n} u_i = u_1 u_2 \cdots u_n$.

例如，"对任意的实数 y，存在实数 x，使得 $y<x$"可表示为"$\forall y\in\mathbf{R}$，$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $y<x$". 又如，"对任意给定的正数 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，有 $|u_n-A|<\varepsilon$"可表示为"$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，有 $|u_n-A|<\varepsilon$". 其中 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集. 而"$a=b\Leftrightarrow a\leqslant b$，$a\geqslant b$"表示"$a=b$ 的充要条件是 $a\leqslant b$ 且 $a\geqslant b$".

例 2(Cauchy-Schwartz 不等式)　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为任意实数，证明

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

证　$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k x)^2\geqslant 0$，即

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+2a_k b_k x+b_k^2 x^2)\geqslant 0,$$

或

$$x^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant 0,$$

不等式左端是一个关于 x 的二次三项式，其无实根或只有重根的充要条件是

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant 0,$$

于是

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

例如，当 $n=3$ 时，不等式为 $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$.

还有一个常用的不等式：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非负实数，则

$$\sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

称为**平均值不等式**.

习　题　一

1. 指出下列邻域的中心与半径：

(1) $(-7,7)$;　　(2) $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$;　　(3) $(-4,13)$.

2. 设 A、B、C 为三个集合：

(1) 已知 $A\subset B$,求 $A\cup B, A\cap B, A\backslash B$;

(2) 已知 $A\subset B, A\subset C$,证明 $A\subset(B\cap C)$;

(3) 已知 $A\supset B, A\supset C$,证明 $A\supset(B\cup C)$.

3. 解下列不等式：

(1) $|x-1|<3$;　　(2) $|x+1|>2$;

(3) $1\leqslant|x|\leqslant3$;　　(4) $|x-1|\leqslant|5-x|$.

4. (1) 若 $ab>0$,证明 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}|a+b|$;

(2) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意实数,证明 $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leqslant a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$;

(3) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意非负实数,证明 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$;

(4) 证明 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

5. 将下列句子用 $\forall$, $\exists$ 等记号表示：

(1) 对 $1<x<2$ 中的每一个 x,都使得 $x^2-3x+2<0$ 成立;

(2) 存在负数 x,使得 $x^2-x-2<0$.

第二节　函　　数

一、函数的概念

定义 1　设 D 是一个给定的非空实数集,若存在一个对应法则 f,使得对于每一个 $x\in D$ 总有确定的 y 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的**函数**,记为 $y=f(x)$. 称 D 为函数的**定义域**,相应的 y 值的全体所组成的集合称为函数的**值域**,记为

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\},$$

x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

关于函数概念的几点说明：

(1) 当 x 取数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值 y_0 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记作 $y_0=f(x_0)$ 或 $y_0=f(x)\big|_{x=x_0}$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,如“φ”“F”等.这时函数就记作 $y=\varphi(x)$, $y=F(x)$等.

(3) 如果 $\forall x\in D$,总是对应唯一的函数值 y,这种函数称为**单值函数**,否则称为**多值函数**. 例如,若变量 x 和 y 的对应关系由方程 $y^2=x$ 给出,当 $x=a,a>0$ 时,y 有两个值$\sqrt{a}$,$-\sqrt{a}$与之对应,则这个方程确定了一个多值函数. 对于多值函数,往往只要附加一些条件,就可以转化为单值函数. 例如,若附加 $y\geqslant 0$ 的条件,就可以得到一个单值函数$y=\sqrt{x}$,常称为该多值函数的一个单值分支. 以后若没有特别说明,函数都是指单值函数.

(4) 关于函数的定义域需要指出:在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如反映自由落体运动过程中高度 h 和时间 t 关系的函数 $h=\frac{1}{2}gt^2$,因 t 表示时间,若开始下落的时间 $t=0$,落地的时间 $t=T$,则函数定义域为 $D=[0,T]$.

在数学研究中,常不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定:函数的定义域是自变量所取的使算式有意义的一切实数的全体. 这种定义域称为函数的自然定义域. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1,1]$,函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为$(-1,1)$. 一般地,当给出一个函数的具体表达式时,应指出它的定义域,否则表明默认它的定义域就是自然定义域.

(5) 由于函数是由定义域和对应法则所确定的,因此考察两个函数是否为同一函数时,要考察他们的定义域和对应法则是否完全相同,而不是注意它们的记号. 如果两个函数 $f(x)$与$g(x)$的定义域相同且对定义域中每一个 x 都有 $f(x)=g(x)$,则称 $f(x)$与$g(x)$相等.

例 1 求函数 $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$的定义域.

解 因为 $\lg\frac{1}{1-x}$的定义域 $D_1=(-\infty,1)$,$\sqrt{x+2}$的定义域 $D_2=[-2,+\infty)$,所以所求函数的定义域 $D=D_1\cap D_2=[-2,1)$.

例 2 下列函数 $f(x)$与 $g(x)$是否相同?

(1) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$与 $g(x)=\sin x$;

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^5}$与 $g(x)=x\sqrt[3]{1+x^2}$.

解 (1) $f(x)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,但是对应法则不同,$f(x)=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$,从而它们的值域不同,$0\leqslant f(x)\leqslant 1$,而$-1\leqslant g(x)\leqslant 1$,所以 $f(x)$与$g(x)$不相同.

(2) $f(x)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,且对应法则相同,所以 $f(x)$与 $g(x)$为相同函数.

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D. 对于任意取定的 $x\in D$,对应的函数值为 $y=f(x)$. 以 x 为横坐标,y 为纵坐标,就在 xOy 平面上确定了一点(x,y). 当 x 遍取 D 上的每一个数值时,就得到点(x,y)的一个集合 C:$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$. 这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$的图形.

函数常用解析表达式表示,所谓解析表达式就是对变量和常数施加四则运算、乘方、指数运算、取对数、三角函数等数学运算所得到的式子. 用解析表达式表示两个变量间的函数关系的方法称为**解析法**(或**公式法**),其优点是简明准确、便于理论分析.

特别地,在定义域的互不重叠的子集上,对应法则用不同解析表达式来表示的函数,通常称为**分段函数**. 注意在整个定义域上它是一个函数,而不是几个函数. 在自然科学和工程技术中,经常会遇到分段函数的情形. 下面给出几个常见的分段函数.

例 3 狄里克莱(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{0,1\}$. 此函数无法作出它的图形.

例 4 取整函数 $y=[x]$,$x\in\mathbf{R}$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数(见图 1-2).

例如,$[2.17]=[2+0.17]=2$; $[-3.91]=[-4+0.09]=-4$; $\left[\frac{1}{3}\right]=\left[0+\frac{1}{3}\right]=0$; $[-2]=-2$.

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$,如图 1-3 所示. 易知 $\forall x\in\mathbf{R}$,$x=|x|\operatorname{sgn}x$.

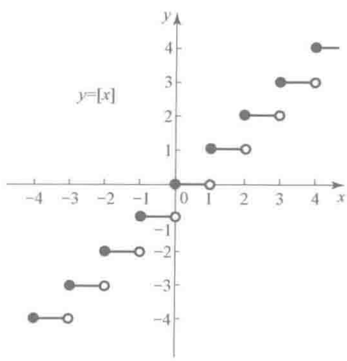

图 1-2

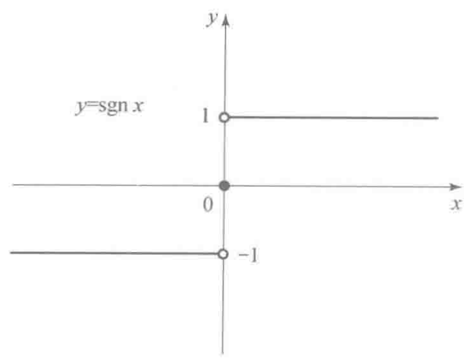

图 1-3

例 6 设某种电子产品每台售价 900 元,成本为 600 元. 厂家为鼓励销售商大量采购,采用以下优惠策略,若订购超过 100 台,每多定一台,每台售价降低 10 元,但最低价为 750 元/台. (1) 将每台实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;(2) 将利润 P 表示为订购量 x 的函数.

解 (1) 当 $x\leqslant 100$ 时,售价为 900 元/台;当 $x\geqslant 150+100$ 时,售价为 750 元/台;当 $100<x<250$ 时,售价为 $900-(x-100)\times 10$ 元/台. 于是,实际售价 p 与订购量 x 的函数关系为

$$p=\begin{cases}900, & x\leqslant 100,\\ 900-10(x-100), & 100<x<250,\\ 750, & x\geqslant 250.\end{cases}$$

(2) 利润 P 与订购量 x 的函数关系为 $P=(p-600)x$.

二、函数的几种初等性态

1. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $I\subset D$,如果 $\exists K_1$,$\forall x\in I$,有 $f(x)\leqslant K_1$,则称 $f(x)$在 I 上**有上界**,而 K_1 称为 $f(x)$在 I 上的一个上界.

如果$\exists K_2$，$\forall x \in I$，有$f(x) \geqslant K_2$，则称$f(x)$在I上**有下界**，而K_2称为$f(x)$在I上的一个下界.

如果$\exists M>0$，$\forall x \in I$，有$|f(x)| \leqslant M$，则称$f(x)$在I上**有界**，或称$f(x)$是I上的有界函数. 否则，就称$f(x)$在I上无界.

显然有：函数$f(x)$在I上有界的充要条件是它在I上既有上界又有下界.

例如，函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内，有$|\sin x| \leqslant 1$，故其在$(-\infty,+\infty)$上是有界的，这里$M=1$（当然也可取大于1的任何数作为$\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上的界）. 又如，函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在任意$a>0$的区间$[a,+\infty)$上有界.

例 7 证明$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上无界.

证 反证，设$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上有界，即$\exists M>0$，$\forall x \in (0,+\infty)$，有$\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$.

取$x_0=\dfrac{1}{M+1}>0$，则有$\left|\dfrac{1}{x_0}\right|=M+1>M$，与假设矛盾.

故$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上无界.

2. 函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I \subset D$. 如果$\forall x_1, x_2 \in I$，且$x_1<x_2$，总有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数$f(x)$在区间I上是**单调增加**（或**单调减少**）的. 单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数$f(x)=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的（见图1-4）. 又如，函数$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的，但在区间$(-\infty,+\infty)$上函数$f(x)=x^2$不是单调的. 一般地，一个在定义域内不单调的函数可以在其定义域的子集上单调，即分段单调.

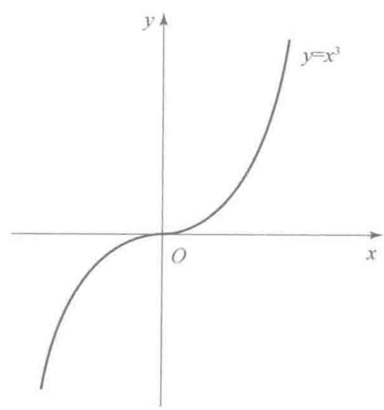

图 1-4

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 如果$\forall x \in D$，有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**. 如果$\forall x \in D$，有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于y轴对称. 奇函数的图形关于原点对称.

例 8 判断函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，因为

$$\begin{aligned} f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x), \end{aligned}$$

所以$f(x)$为偶函数.