



新世纪高等学校教材

数学教育主干课程系列教材

北京师范大学数学科学学院 主 编

数学学习论

郭玉峰 刘春艳 程国红 编 著

SHUXUE
XUEXILUN



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



新世纪高等学校教

数学教育主干课程系列教

北京师范大学数学科学学院 主 编

数学学习论

SHUXUE XUEXILUN

郭玉峰 刘春艳 程国红 编 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学学习论/郭玉峰, 刘春艳, 程国红编著. —北京: 北京师范大学出版社, 2015.7

新世纪高等学校教材 数学教育主干课程系列教材

ISBN 978-7-303-19108-6

I. ①数… II. ①郭… ②刘… ③程… III. ①数学教学—教学研究—中小学—高等学校—教材 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 130574 号

营销中心电话 010-58802181 58805532

北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com>

电子邮箱 gaojiao@bnupg.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印刷: 北京东方圣雅印刷有限公司

经销: 全国新华书店

开本: 730 mm×980 mm 1/16

印张: 20

字数: 350 千字

版次: 2015 年 7 月第 1 版

印次: 2015 年 7 月第 1 次印刷

定价: 32.00 元

策划编辑: 岳昌庆

责任编辑: 岳昌庆 周志杰

美术编辑: 焦 丽

装帧设计: 焦 丽

责任校对: 陈 民

责任印制: 陈 涛

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

内容提要

本书从数学和数学学科特点出发，结合教育学、心理学的部分研究成果，探讨中小学生学习数学。分理论篇和实践篇。

理论篇主要分两部分：数学学习的过程；数学学习中获得的数学能力、积累的数学基本活动经验。具体内容包括：几种主要学习理论对数学学习的启示；数学学习的一般过程；数学学习的认知规律；数学思维的基本过程及数学思维品质；数学能力及其获得；数学基本活动经验及其积累。

实践篇也分两部分：如何学习数学概念、命题；如何解决数学问题。其中数学概念、命题以高中代数、几何中的几个核心概念、命题为例，说明如何从具体到抽象，或者借助归纳、类比等逐步抽象出数学概念和命题；数学问题解决部分说明什么题是好题，具体实例展示了如何解决数学问题。

本书可作为师范院校数学教育专业本科生、研究生教材，也可供中小学数学教师、教研员作教学参考书。

北京师范大学数学科学学院简介

北京师范大学数学系成立于1922年,其前身为1915年创建的北京高等师范学校数理部,1983年成立数学与数学教育研究所,2004年成立数学科学学院。学院现有教师78人,其中教授35人,副教授26人;有博士学位的教师占96%。特别地,有中国科学院院士2人,第三世界科学院院士1人,国家千人计划2人,全国高校教学名师奖1人,教育部长江学者奖励计划特聘教授4人和讲座教授1人,国家杰出青年基金获得者4人,入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人。现有全日制在校生914人,其中本科生636人,硕士研究生206人,博士研究生72人。

数学科学学院1981年获基础数学、概率论与数理统计学博士学位授予权,1986年获应用数学博士学位授予权。1988年,基础数学、概率论与数理统计被评为国家级重点学科。1990年建立了北京师范大学第一个博士后流动站。1996年,数学学科成为国家211工程重点建设的学科。1997年成为国家基础科学人才培养基金基地。1998年获数学一级学科博士学位授予权。2001年概率论方向被评为国家自然科学基金创新群体。2005年进入“985工程”科技创新基础建设平台。2007年数学被评为一级学科国家重点学科。2008年数学与应用数学专业师范教育方向获第一批高等学校特色专业建设点。2009年教育部数学与复杂系统重点实验室挂牌,分析类课程教学团队被评为国家级优秀教学团队,调和分析与流形的几何方向被评为教育部创新团队。2011年获统计学一级学科博士学位授予权。2012年在高校第3轮数学一级学科评估中排名第5。学院还有8个硕士点、9个教研室和《数学通报》杂志编辑部。

一百年来,数学科学学院已毕业全日制本科生7860人(不含辅仁大学数学系毕业生)。30多年来,已授予博士学位387人,硕士学位1608人,研究生班毕业209人。据不完全统计,在博士毕业生中:当选为中国科学院院士2人和第三世界科学院院士1人,获全国高校教学名师奖2人,入选万人计划教学名师1人,任教育部长江学者特聘教授3人,中国科学院百人计划1人,获国家杰出青年基金6人,获国家自然科学基金4人,获国家科技进步奖3人,获国家级有突出贡献的中青年专家称号2人,入选新世纪百千万人才工程国家级人选2人,入选全国百篇优秀博士学位论文2篇,获全国百篇优秀博士学位论文提名奖5篇。(李仲来执笔)

2015-07-06

前言

1915年北京高等师范学校成立数理部,1922年成立数学系。2004年成立北京师范大学数学科学学院。经过100年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验。将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的。

1980年,北京师范大学出版社成立,给教材的出版提供了一个很好的契机。北京师范大学数学科学学院教师编著的多数教材已先后在这里出版。除《北京师范大学现代数学丛书》外,就大学教材而言,共有5种版本。第1种是列出编委会的《高等学校教学用书》,这是在1985年,由我校出版社编写出版了1套(17部)数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材。在出版社的大力支持下,这一计划完全实现,满足了当时教学的需要。第2种是未列编委会的《高等学校教学用书》。第3种是《面向21世纪课程教材》。第4种是《北京师范大学现代数学课程教材》。第5种是未标注“高等学校教学用书”,但实际上是高等学校教学用书。在这些教材中,除再次印刷外,已经有多部教材进行了修订或出版了第2版。

2005年5月,李仲来教授汇总了北京师范大学数学科学学院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作,由李仲来教授与北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商,由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责),准备对学院教师目前使用的,或北京师范大学出版社已经没有存书的部分教材进行修订后再版,另有一些教材需要重新编写。计划用几年时间,出版数学与应用数学系列教材、数学教育主干课程系列教材、大学公共课数学系列教材、数学学科硕士研究生系列教材,共4个系列的主要课程

教材。

由学院组织和动员全院在职和退休教师之力量,主编出版数学一级学科4个系列的60余部主要课程教材。教材编写涉及面如此之广和数量之大,持续时间之长,这在一所高校数学院系内是为数不多的,其数量在中国数学界列全国第一。经过10年的编写,至今已经出版了65部教材,原计划的大多数教材已经出版,对于学院来讲,这是一件值得庆贺的大事。现在可以说,数学科学学院和北京师范大学出版社基本上是干成了一件大事。这是很难办成圆满的一件大事。剩下的一些教材在两三年内多数可以出版。若留下缺憾,则需要后人去补充。

从数量上看,按教材系列,出版数学与应用数学系列教材31部、数学教育主干课程系列教材11部、大学公共课数学系列教材12部、数学学科硕士研究生系列教材11部。按出版教材版次,第1版24部、第2版22部、第3版18部、第4版1部。还出版了3部教辅教材。

从质量上看,7部教材被评为普通高等教育“十一五”国家级规划教材;8部教材被评为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材;7部教材被评为北京市高等教育精品教材;《师范院校数学学科4个系列教材建设》项目获2012年北京师范大学教育教学成果一等奖。

本套教材可供高等师范院校数学教育本科生和研究生、教育学院数学系、函授(数学专业)、开放大学和在职中学教师等使用和参考。希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者,提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善。(李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院
2015年3月28日

作者的话

自2000年开始面向北京师范大学数学本科生开设《数学学习论》选修课，至今已讲过十多届，每届一学期。这门课程最初安排在大四第一学期，在学生教育实习前，以及一个月左右的教育实习结束后讲授。2007年国内师范院校开始招收免费师范生，他们需在中学教育实习约3个月，这门课程调整到大三第二学期，在学生教育实习前讲授。开设这门课，主要目的是帮助未来的数学教师们了解中小学生的数学学习心理特点和心理规律，以更好适应将来的工作。

这本书的整体架构是围绕中小学生学习如何进行数学学习为主线展开，分理论篇和实践篇。事实上，理论篇中也有具体实例说明，实践篇中也有一定理论阐述。之所以这样区分，一是理论篇中不涉及系统、明确的内容主题，实践篇中有系统的内容主题，即以数学概念、数学命题（包括定理、公式、性质、法则等）、数学问题解决为线索展开；二是理论篇的具体实例是解释、说明理论研究成果，实践篇的教学实例更具一般性。

理论篇从心理学中几种主要学习理论对数学学习的启示入手，探讨了数学学习的一般过程、数学学习中的认知规律、数学思维的基本过程，以及数学学习的两个主要结果——获得数学能力、积累数学基本活动经验。

行为主义学习理论对我们研究中小学生学习中的试错、纠误、顿悟，以及更合理对待学生的某些数学学习行为提供了一定的借鉴；认知主义学习理论对我们认识中小学生的机械学习和有意义学习等提供了帮助。数学学习的一般过程说明了学生在数学学习中的主体地位。数学学习的感知规律、注意规律、记忆规律、迁移规律帮助我们了解中小学生的数学认知规律，更好地认识学生在数学学习上的差异，包括数学学习成绩上的差异。数学思维的基本过程进一步揭示

了学生数学思维的几个基本步骤以及数学思维品质上的差异。数学能力从三大基本数学能力入手,说明学生在这些能力的发展特点,以及如何帮助学生进一步提高这些能力。数学基本活动经验从实践活动经验和思维活动经验两大主要分类入手,说明如何积累这两方面的经验。

在此基础上,实践篇阐明学生是如何学习数学概念、数学命题,以及如何解决数学问题。其中,数学概念和数学命题的学习首先阐明了基本的学习过程及影响因素,并分代数和几何两大主要分支,通过具体教学实例进行了说明。这些教学实例的选取基于两点考虑:一是具有一定的典型性和代表性,是代数、几何中的核心概念或命题;二是能够体现从具体到抽象,或需要借助归纳类比得出的核心数学概念和命题。数学问题解决一章主要说明了什么样的题是好题,具体实例展示了如何进行数学问题解决。

除了以上,实际教学中还会根据进度适当补充有关数学学习习惯、数学学习方法、数学学习成绩优秀学生 and 数学学习困难学生特征、表现及成因、影响学生数学学习的因素等,限于篇幅本书没有包括这些内容。

尽管这门课已开设多年,但每年还是如履薄冰,需要随时调整。我想有这样几种可能:一是这门学科相对年轻,面对的对象又是教学实践中的中小學生,研究人是复杂的事情,研究人如何进行数学学习又是复杂事情,从数学学科和数学学习特点出发研究学生的数学学习更不是容易的事情;二是授课对象是缺乏一定教学实践经验的大学本科生,他们往往凭借自己在中小学读书的经历,或者仅有的一点家教经验或教育实习经历来领悟这门课程的主旨,于是造成部分毕业生的感叹,“工作之后才觉得这门课程很重要,可惜当时……”。因此,在近几年的教学中我逐步加大了教学实例的比例,尽量用更多的例子来说明问题,并结合当前数学课程内容的调整 and 变化反映学生数学学习的特点。尽管如此,因为数学教育研究的复杂性、数学学习心理研究方法、研究技术以及研究手段等处 in 发展中,尤其因为本人水平有限,书中错误、纰漏在所难免。敬请各位读者、同仁指正。

本书第1~7章,第8章§8.1由郭玉峰编著。第8~10章由刘春艳、程国红负责编著。其中第8章§8.2.1, §8.3.2、第9章§9.2.1、第10章由刘春艳编著;第8章§8.3.1、第9章§9.1, §9.2.2由程国红编著。§8.2.2, §9.3.1的教学案例由北京师范大学第一附属中学吴夏光提供;§9.3.2的教学案例由北京师范大学第一附属中学罗德健提供。全书由郭玉峰统稿。

北京师范大学数学科学学院、北京师范大学出版社对本书的出版提供了大力支持和帮助,在此一并致谢。同时,对本书所有引用和参考的资料,包括引用图的作者和译者,致以诚挚的谢意。

郭玉峰
2015年4月

目 录

理论篇 中学生如何学数学

第1章 绪论 /3

§ 1.1 数学教育学简介	4
§ 1.1.1 数学教育学的研究对象	5
§ 1.1.2 数学教育学研究的基本问题	6
§ 1.1.3 数学教育学研究的基本思路	7
§ 1.2 数学学习心理学简介	8
§ 1.2.1 数学学习心理学的研究内容	8
§ 1.2.2 数学学习心理学的研究方法	9
§ 1.2.3 数学学习心理学的研究意义：几个 具体例子的说明	11
§ 1.3 数学学习心理学历史发展简介	21
思考题	23

第2章 几种主要学习理论及对数学学习的启示 /24

§ 2.1 行为主义学习理论	24
§ 2.1.1 巴甫洛夫的经典性条件反射理论	24
§ 2.1.2 桑代克的联结主义学习理论	26
§ 2.1.3 斯金纳的操作性条件反射理论	30
§ 2.2 认知主义学习理论	33
§ 2.2.1 格式塔的学习观	33

§ 2.2.2 托尔曼的认知论	41
§ 2.2.3 布鲁纳的认知发现理论	43
§ 2.2.4 奥苏伯尔的有意义接受学习理论	49
§ 2.2.5 布鲁纳和奥苏伯尔学习理论对数学学习的启示	50
§ 2.2.6 基于布鲁纳和奥苏伯尔学习理论的实例分析	54
思考题	59

第3章 数学学习的一般过程 /60

§ 3.1 学习和数学学习的特点	60
§ 3.1.1 什么是学习	60
§ 3.1.2 学生学习的特点	63
§ 3.1.3 数学学习的特点	65
§ 3.2 数学学习的一般过程	66
§ 3.2.1 一般的学习过程进展图	66
§ 3.2.2 数学学习过程进展图	67
§ 3.2.3 数学学习的过程分析	68
§ 3.3 从实践中理解学生的数学学习	70
思考题	85

第4章 数学学习的认知规律 /86

§ 4.1 感知规律及其在数学学习中的应用	87
§ 4.1.1 感觉、知觉、表象	87
§ 4.1.2 观察	89
§ 4.1.3 感知规律	92
§ 4.1.4 感知规律在数学中的应用	93
§ 4.2 注意规律及其在数学学习中的应用	108
§ 4.2.1 注意	108
§ 4.2.2 注意的两种分类	108
§ 4.2.3 注意规律	110

§ 4.2.4 从注意的角度分析初中学生数学成绩的分化	113
§ 4.3 记忆规律及其在数学学习中的应用	118
§ 4.3.1 数学记忆的过程和分类	118
§ 4.3.2 遗忘及其规律	118
§ 4.3.3 记忆规律在数学学习中的应用	119
§ 4.4 迁移规律及其在数学学习中的应用	120
§ 4.4.1 迁移	120
§ 4.4.2 迁移规律在数学学习中的应用	122
思考题	128

第5章 数学思维的基本过程及数学思维品质 /129

§ 5.1 思维与数学思维	130
§ 5.1.1 思维	130
§ 5.1.2 数学思维	130
§ 5.2 数学思维的基本过程	132
§ 5.2.1 观察联想	134
§ 5.2.2 归纳猜想	136
§ 5.2.3 数学表达	137
§ 5.2.4 验证或证明	138
§ 5.3 数学思维品质	139
§ 5.3.1 数学思维的深刻性	139
§ 5.3.2 数学思维的灵活性	142
§ 5.3.3 数学思维的创新性	146
§ 5.4 中学生数学思维发展特点	150
§ 5.4.1 数学思维发展的层次及年龄特征	150
§ 5.4.2 初、高中学生数学思维发展的特点	152
§ 5.4.3 数学思维的发展是逐步、长期培养和训练的过程	153
思考题	158

第6章 数学能力的获得 /159

§ 6.1 数学能力概述	159
§ 6.1.1 关于能力的看法	159
§ 6.1.2 关于数学能力、数学知识、数学技能	160
§ 6.1.3 两种水平的数学能力	161
§ 6.1.4 数学能力的组成成分	162
§ 6.2 三大基本数学能力	164
§ 6.2.1 数学运算能力	164
§ 6.2.2 数学空间想象能力	167
§ 6.2.3 数学逻辑思维能力	172
§ 6.3 三大基本数学能力的获得	175
§ 6.3.1 中学生数学运算能力的获得和提高	175
§ 6.3.2 中学生数学空间想象能力的获得和提高	182
§ 6.3.3 中学生数学逻辑思维能力的获得和提高	185
§ 6.4 数学反思能力	187
§ 6.4.1 什么是数学反思	187
§ 6.4.2 学生数学反思思维的萌芽	188
§ 6.4.3 如何具备数学反思能力	189
思考题	192

第7章 数学基本活动经验的积累 /193

§ 7.1 为什么在数学课程目标中提出数学基本活动经验的要求	193
§ 7.1.1 数学的创造	193
§ 7.1.2 从数学的创造看数学基本活动经验的提出	195
§ 7.2 如何理解数学基本活动经验	197
§ 7.2.1 数学基本活动经验不同于数学知识	197
§ 7.2.2 数学基本活动经验不同于数学能力	198

§ 7.2.3 数学基本活动经验的两大分类：“实践活动的经验” 和“思维活动的经验”	199
§ 7.2.4 数学思维活动经验是长期经历归纳推理和演绎推理 积淀的经验	199
§ 7.3 学生数学实践活动经验的积累	201
§ 7.3.1 数学实践活动经验的内涵	201
§ 7.3.2 数学实践活动经验的积累	201
§ 7.4 学生数学思维活动经验的积累	205
§ 7.4.1 数学思维活动经验的内涵	205
§ 7.4.2 数学思维活动经验的积累	205
思考题	210

实践篇 中学生如何学习数学概念、 命题、解决数学问题

第8章 中学生如何学习数学概念 /213

§ 8.1 数学概念的学习过程及影响因素	213
§ 8.1.1 数学概念的定义	213
§ 8.1.2 数学概念的学习过程	217
§ 8.1.3 影响学生数学概念学习的主要因素	223
§ 8.2 中学代数核心概念的教学实例	225
§ 8.2.1 由具体例子归纳概括出数学概念：函数概念	225
§ 8.2.2 由类比得出数学概念：等比数列概念	232
§ 8.3 中学几何核心概念的教学实例	236
§ 8.3.1 观察、实验基础上抽象出数学概念：椭圆概念	236
§ 8.3.2 类比物理知识引入数学概念：平面向量的数量积概念	240
思考题	246

第9章 中学生如何学习数学命题 /247

§ 9.1 数学命题的学习过程及影响因素	247
§ 9.1.1 数学命题的定义	247
§ 9.1.2 数学命题的学习过程	247
§ 9.1.3 数学命题学习的影响因素	249
§ 9.2 中学代数核心命题的教学实例	256
§ 9.2.1 由具体到抽象, 利用导数研究函数单调性	256
§ 9.2.2 由具体到抽象, 推导两角和与差的正、余弦公式	262
§ 9.3 中学几何核心命题的教学实例	267
§ 9.3.1 借助归纳类比, 学习直线与平面垂直的判定定理	267
§ 9.3.2 借助归纳类比, 学习空间向量的线性运算	272
思考题	276

第10章 中学生如何学会解决数学问题 /277

§ 10.1 为什么要学会解题	277
§ 10.1.1 从数学学科发展的角度看	277
§ 10.1.2 从数学教学的角度看	278
§ 10.2 什么样的题是好题	283
§ 10.2.1 题目清晰, 不人为设置“陷阱”, 并具有代表性	283
§ 10.2.2 题目应该有多种解法	284
§ 10.2.3 题目应蕴含丰富的或者典型的数学思想方法	287
§ 10.2.4 题目结论或者方法可以进一步推广	288
§ 10.3 中学生如何学会解决数学问题的教学案例	290
思考题	301

主要参考文献 /302

理论篇

中学生如何学数学

