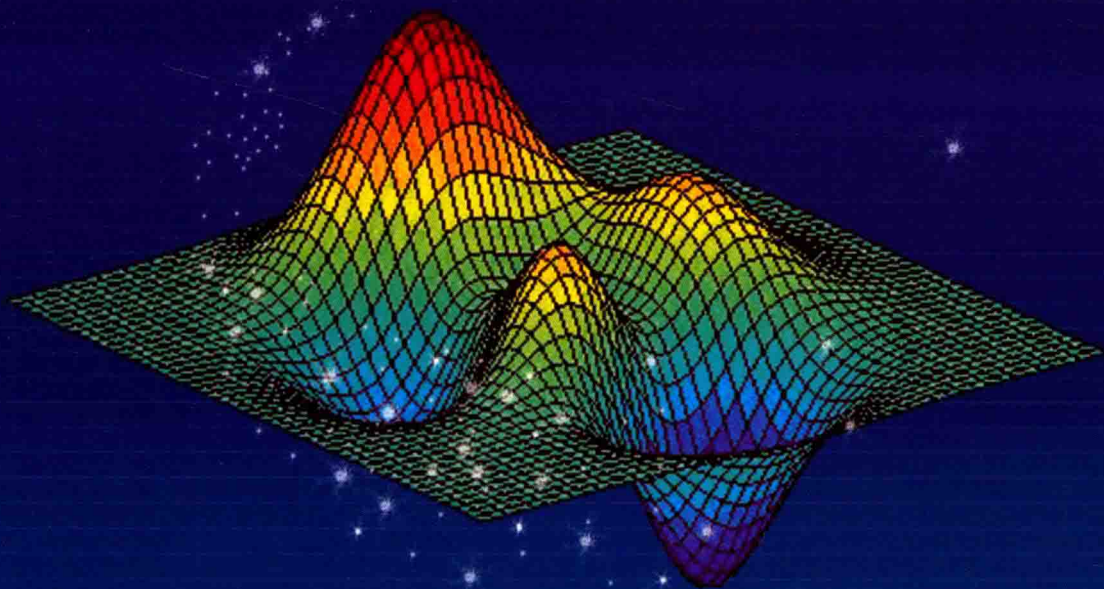


# MATLAB在声学理论 基础中的应用

● 陈文剑 张揽月 著



HEUP 哈尔滨工程大学出版社

# MATLAB 在声学理论基础中的应用

陈文剑 张揽月 著

 哈尔滨工程大学出版社

## 内 容 简 介

本书包含了振动问题、平面波场、球面波场、柱面波场、组合声源辐射声场、波导中的声传播、刚硬障板上圆面活塞辐射器声场、圆球和无限长圆柱散射声场以及常用特殊函数等内容。首先简要介绍相关的基本理论,然后利用MATLAB软件将振动与声学现象进行可视化的展现,让枯燥的数理公式伴之以形象的动画或图像,是学习振动与声基础非常有价值的参考书。书中给出了全部MATLAB程序源代码,这些程序可作为教师多媒体授课使用,也可供学生课后的自学。

本书可作为学习“振动与声基础”和“声学基础”课程的本科生、研究生的参考书,也可供从事相关工作的科技人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

MATLAB 在声学理论基础中的应用 / 陈文剑, 张揽月  
著. —哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2016. 12  
ISBN 978 - 7 - 5661 - 1405 - 1

I. ①M… II. ①陈… ②张… III. ①Matlab 软件 - 应用 - 声学 - 研究 IV. ①O42 - 39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 317089 号

选题策划 龚 晨  
责任编辑 张忠远 马中月  
封面设计 恒润设计

---

出版发行 哈尔滨工程大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号  
邮政编码 150001  
发行电话 0451 - 82519328  
传 真 0451 - 82519699  
经 销 新华书店  
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司  
开 本 787mm × 1 092mm 1/16  
印 张 6.25  
字 数 180 千字  
版 次 2016 年 12 月第 1 版  
印 次 2016 年 12 月第 1 次印刷  
定 价 29.80 元

<http://www.hrbeupress.com>

E-mail: heupress@hrbeu.edu.cn

---

# 前 言

MATLAB 是一种科学计算领域的高级语言,具有编程简单、计算功能强大、语言简单等特点,特别是拥有便捷强大的绘图功能,这些优点使得该软件被广泛应用于科学实践与实际工程计算中。关于 MATLAB 软件的参考书非常之多,本书略去了关于软件及编程语言介绍的内容,不熟悉该软件的学生可参考任一关于 MATLAB 基础入门的书籍。

本书主要是针对初学“振动与声基础”和“声学基础”课程的本科生或研究生而编写的。利用 MATLAB 软件的绘图功能,将振动或声学现象进行直观的显示,增加学生感性知识并提高学习兴趣,也可以培养学生分析问题、解决问题的能力。结合理论课中的讲授内容,通过让学生观察现象、思考问题,可以使其对理论课中的基本概念、基本理论、基本方法有比较准确的理解。

本书共分 9 章。第 1 章为振动问题,对单自由度系统振动、两自由度耦合系统自由振动、弦的横振动和均匀细棒的纵振动问题进行了简要理论介绍,通过 MATLAB 软件编程实现振动过程的动画演示。第 2 章至第 8 章为声学问题,包括平面、球面、柱面波场问题的声场特性计算和声场动画演示;均匀脉动球、声偶极子、两同性极子、线列阵声源和刚硬障板上圆面活塞辐射器的辐射声场仿真演示;平行平面层波导和圆管波导中各阶简正波的节线分布计算以及对应介质质点的振动动画演示;刚硬圆球、自由边界圆球和刚硬无限长圆柱散射声场的方向性和空间声场分布仿真显示。第 9 章介绍了在声场计算过程中常用到的一些特殊函数,结合函数图形让学生对函数性质有更充分的理解。

本书在编写过程中得到孙辉教授的指导和大量帮助,在此表示衷心感谢。(本书在哈尔滨工程大学“2016 年本科生教材立项”和“2016 年教学改革研究项目”的资助下得以出版。)由于作者水平所限,书中难免有许多不当之处,恳请广大读者批评指正。

著 者

2016 年 10 月



# 目 录

第 1 章 振动问题 .....	1
1.1 单自由振动 .....	1
1.2 两自由度耦合系统自由振动 .....	10
1.3 弦的横振动 .....	14
1.4 均匀细棒的纵振动 .....	17
第 2 章 平面波场 .....	20
2.1 平面行波场 .....	20
2.2 平面驻波场 .....	23
2.3 平面波在两种介质分界面上的反射与折射 .....	24
2.4 平面波在介质层上的反射与透射 .....	26
第 3 章 球面波场 .....	29
3.1 简谐均匀球面波场 .....	29
3.2 球面波场声压、振速、声能流密度、声强的关系 .....	31
第 4 章 柱面波场 .....	35
4.1 简谐均匀柱面波场 .....	35
4.2 柱面波场声压、振速、声能流密度、声强的关系 .....	37
第 5 章 组合声源辐射声场 .....	40
5.1 均匀脉动球面辐射声场 .....	40
5.2 声偶极子辐射声场 .....	41
5.3 两同性极子声源辐射场 .....	44
5.4 线列阵声源辐射场 .....	47
第 6 章 波导中的声传播 .....	49
6.1 平行平面层波导的声传播 .....	49
6.2 圆管波导中的声传播 .....	55
第 7 章 刚硬障板上圆面活塞辐射器声场 .....	68
7.1 刚硬障板上圆面活塞辐射器的指向性 .....	68
7.2 刚硬障板上圆面活塞辐射器的轴向声场分布 .....	70
第 8 章 圆球与无限长圆柱散射声场 .....	71

---

---

8.1 刚硬圆球的散射 .....	71
8.2 自由边界圆球的散射 .....	74
8.3 刚硬无限长圆柱的散射 .....	77
<b>第9章 常用特殊函数</b> .....	<b>80</b>
9.1 三角函数 .....	80
9.2 柱函数 .....	81
9.3 球函数 .....	83
<b>参考文献</b> .....	<b>92</b>

# 第1章 振动问题

## 1.1 单自由振动

### 1.1.1 单自由度无阻尼振动系统受迫振动

如图 1.1 所示的弹簧振子为一个单自由度无阻尼受迫振动系统。

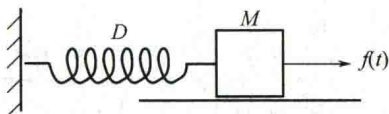


图 1.1 单自由度无阻尼受迫振动系统

谐和力作用时,质量为  $M$  的物块运动方程为

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + Dx(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (1.1)$$

其解为

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (1.2)$$

式中,  $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  为自由振动分量,  $\frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega^2)}$  为强迫振动分量, 其中  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{M}}$ ,  $A$  和  $\varphi$

由初始条件决定。若取初始条件为  $x|_{t=0} = 0$ ,  $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = 0$ , 则质量为  $M$  的物块位移表达式为

$$x(t) = A_0 \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right)$$

式中,  $A_0 = \frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega^2)}$ 。 (1.3)

当外力频率与系统固有频率相近时, 振动表现为拍现象。当外力频率与系统固有频率相等时, 有

$$x(t) = \frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right) = \frac{F_0 t}{2M\omega_0} \sin(\omega t) \quad (1.4)$$

由式(1.4)可以得到, 质量块的振幅随时间增加逐渐变大。

令式(1.3)中  $A_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 40$ ,  $\omega = 35$ , 可得此时质量块随时间振动的波形。MATLAB 程序如下。

```
%单自由度无阻尼振动系统受迫振动仿真演示(外力频率等于固有频率)
clear;clc;close all;
A0 = 1;
```

```

omega0 = 40;
omega = 35;
t = 0:0.01:10;
x = A0 * sin((omega0 - omega) * t/2) .* sin((omega0 + omega) * t/2);
plot(t,x)
xlabel('t');ylabel('x')

```

当  $\omega = 35$  时质量块随时间振动的波形如图 1.2 所示。

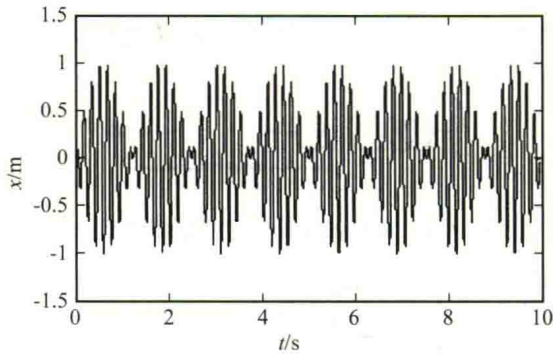


图 1.2  $\omega = 35$  时质量块随时间振动的波形

当  $\omega = 38$  时质量块随时间振动的波形如图 1.3 所示。

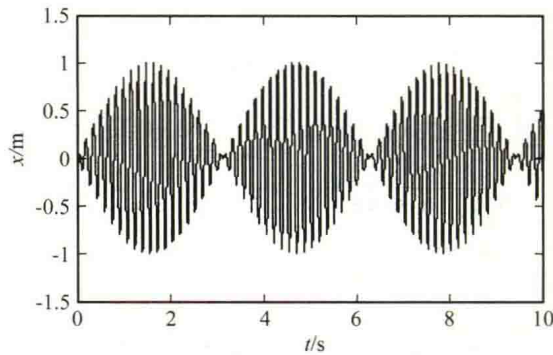


图 1.3  $\omega = 38$  时质量块随时间振动的波形

令式(1.4)中  $\frac{F_0}{2M\omega_0} = 1, \omega = 35$ , 可得外力频率和固有频率相等时, 质量块随时间振动的波形。

% 单自由度无阻尼振动系统受迫振动仿真演示 (外力频率等于固有频率)

```

clear;clc;close all;
A0 = 1;
omega = 35;
t = 0:0.01:10;
x = A0 * t .* sin(omega * t);

```



```
plot(t,x)
xlabel('t');ylabel('x')
```

外力频率等于固有频率时质量块的振动波形如图 1.4 所示。

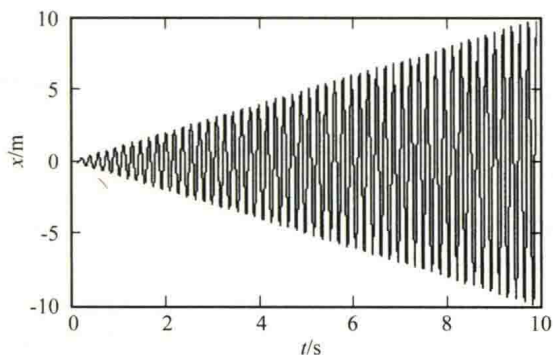


图 1.4 外力频率等于固有频率时质量块的振动波形

以下是实现质量块振动过程动画演示的 MATLAB 程序。

% 质量块运动动画演示(外力频率不等于固有频率)

```
clear;clc;close all;
A0 = 1;
omega0 = 40;
omega = 35;
for t = 0:0.01:10
    tp = 0:0.01:t;
    xp = A0 * sin((omega0 - omega) * tp/2) .* sin((omega0 + omega) * tp/2);
    subplot(2,1,1)
    plot(tp,xp)
    xlabel('t');ylabel('x')
    axis([0 10 -1.5 1.5])
    subplot(2,1,2)
    x = A0 * sin((omega0 - omega) * t/2) .* sin((omega0 + omega) * t/2);
    plot(x,0, '.', 'MarkerSize', 30)
    xlabel('x')
    axis([-1 1 -1 1])
    pause(0.05)
end
```

% 质量块运动动画演示(外力频率等于固有频率)

```
clear;clc;close all;
A0 = 1;
```

```

omega = 35;
for t = 0:0.01:10
    tp = 0:0.01:t;
    xp = A0 * tp. * sin(omega * tp);
    subplot(2,1,1)
    plot(tp,xp)
    xlabel('t');ylabel('x')
    axis([0 10 -10 10])
    subplot(2,1,2)
    x = A0 * t. * sin(omega * t);
    plot(x,0, '.', 'MarkerSize', 30)
    xlabel('x')
    axis([-10 10 -1 1])
    pause(0.05)
end

```

外力频率不等于固有频率时某时刻质量块运动位置如图 1.5 所示。

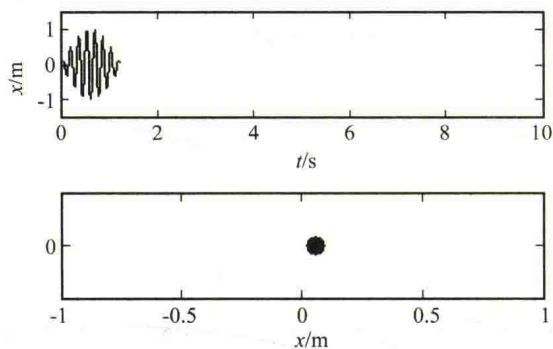


图 1.5 外力频率不等于固有频率时  
某时刻质量块运动位置图

外力频率等于固有频率时某时刻质量块运动位置如图 1.6 所示。

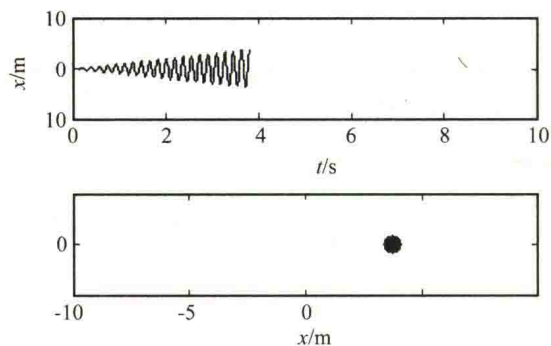


图 1.6 外力频率等于固有频率时  
某时刻质量块运动位置图

### 1.1.2 单自由度阻尼振动系统自由振动

在机械系统振动时,由于受摩擦力或其他阻力的作用,系统的能量会不断损耗,质量振幅逐渐减小,以致振动停止。图 1.7 所示为有阻尼时的单自由度振动系统。

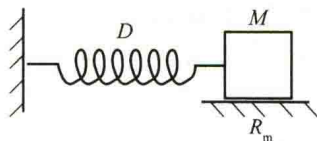


图 1.7 单自由度阻尼自由振动系统

单自由度阻尼系统的运动方程为

$$M \frac{dx^2}{dt^2} = -Dx - R_m \frac{dx}{dt} \quad (1.5)$$

式中, $M$  为质量块的质量; $D$  为弹性系数; $R_m$  为阻力系数。令  $\delta = \frac{R_m}{2M}$  ( $\delta$  为系统的阻尼系数),令  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{M}}$ ,则式(1.5)可写为常系数的线性微分方程形式,即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.6)$$

其一般解为

$$x = C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} \quad (1.7)$$

式中, $\mu_1, \mu_2$  是特征方程  $\mu^2 + 2\delta\mu + \omega_0^2 = 0$  的两个根,可表示为

$$\mu_1, \mu_2 = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (1.8)$$

$C_1, C_2$  的表达式为

$$\begin{cases} C_1 = \frac{v_0 - \mu_2 x_0}{\mu_1 - \mu_2} \\ C_2 = \frac{v_0 - \mu_1 x_0}{\mu_2 - \mu_1} \end{cases} \quad (1.9)$$

式中, $x_0, v_0$  分别为初始时刻的位移和速度。

根据  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的值,振动系统可分为两种情况。

①  $\delta^2 > \omega_0^2$  的情况为大阻尼或过阻尼,此时的特征根为实数。此时系统的运动按指数规律衰减,很快趋近于平衡位置,不会产生往复的振动现象。从物理意义上来看,由于阻尼较大,由初始激励输入给系统的能量很快就被消耗掉了,而系统来不及产生往复振动。

②  $\delta^2 < \omega_0^2$  的情况为小阻尼,此时的特征根为一对共轭复根。此时系统在平衡位置附近做往复运动,但振幅不断衰减,为振幅随时间衰减的简谐运动。

以下为大阻尼时计算质量块运动情况的 MATLAB 程序。

```
% 单自由度阻尼振动系统自由振动
clear;clc;close all;
t=0:0.01:30;
D=1;
M=1;
Rm=3; % 阻力系数
delta=Rm/(2*M);
```

```

omega0 = sqrt(D/M);
mu1 = -delta + sqrt(delta^2 - omega0^2);
mu2 = -delta - sqrt(delta^2 - omega0^2);
v0 = 0; % 初始振速
x0 = 0.5; % 初始位移
c1 = (v0 - mu2 * x0)/(mu1 - mu2);
c2 = (v0 - mu1 * x0)/(mu2 - mu1);
x = c1 * exp(mu1 * t) + c2 * exp(mu2 * t);
plot(t,x,'LineWidth',2)
axis([0 30 -1 1])
xlabel('t');ylabel('x')
grid on

```

程序中选取的参数为大阻尼情况,此时  $\delta^2 = 2.25$ ,  $\omega_0^2 = 1$ , 初始位移  $x_0 = 0.5$ , 初始振速  $v_0 = 0$ 。通过改变  $x_0, v_0$  的值可得到大阻尼情况时不同初始条件下质量块的运动情况,如图 1.8 所示。

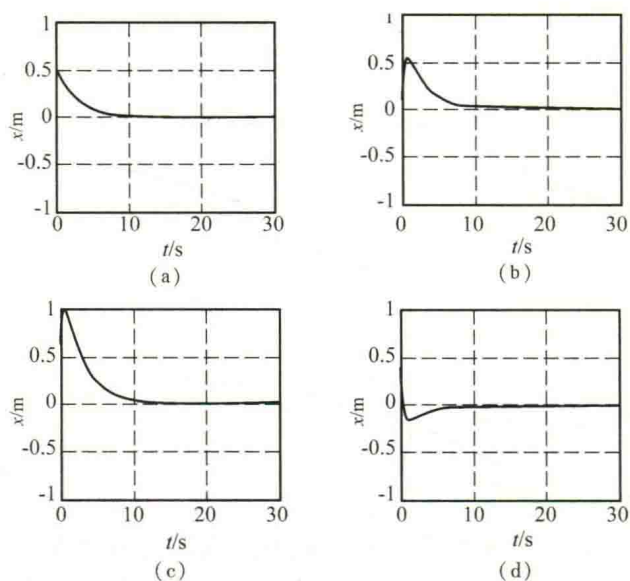


图 1.8 大阻尼情况下质量块的运动

(a)  $x_0 = 0.5, v_0 = 0$ ; (b)  $x_0 = 0, v_0 = 2$ ; (c)  $x_0 = 0.5, v_0 = 2$ ; (d)  $x_0 = 0.5, v_0 = -2$

通过改变阻力系数  $R_m$  (或弹性系数  $D$ 、质量  $M$ ) 可得到  $\delta^2 < \omega_0^2$  的小阻尼情况。取  $x_0 = 0.5, v_0 = 0, R_m$  分别为 0.5, 0.1 和 0, 质量块的运动情况分别如图 1.9 所示。

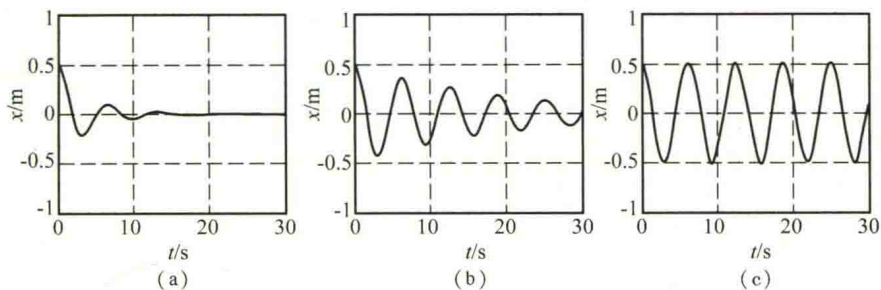


图 1.9 小阻尼情况下质量块的运动

(a)  $R_m = 0.5$  ( $\delta^2 = 0.063, \omega_0^2 = 1$ ); (b)  $R_m = 0.1$  ( $\delta^2 = 0.003, \omega_0^2 = 1$ ); (c)  $R_m = 0$  ( $\delta^2 = 0, \omega_0^2 = 1$ )

### 1.1.3 单自由度阻尼振动系统受迫振动

如图 1.10 所示的弹簧振子为一个单自由度阻尼受迫振动系统。

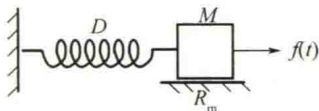


图 1.10 单自由度阻尼受迫振动系统

谐和力作用时,质量为  $M$  的物块的运动方程为

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + R_m \frac{dx}{dt} + Dx(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (1.10)$$

其解为

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\Omega t + \varphi) + \frac{F_0}{\omega |Z_m|} \sin(\omega t - \phi) \quad (1.11)$$

式中,  $A, \varphi$  由初始条件决定,  $\delta, \Omega, |Z_m|, \phi$  由系统参数决定;  $\delta = \frac{R_m}{2M}, \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, |Z_m| =$

$$\sqrt{R_m^2 + \left(M\omega - \frac{D}{\omega}\right)^2}, \phi = \text{atan} \frac{M\omega - \frac{D}{\omega}}{R_m}; \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{M}}。$$

质量块的运动由两个函数组成,一个是振幅衰减的间歇振动,它是自由振动项;另一个是振幅不变的简谐振动,它是强迫振动项。随着时间的增加,自由振动项对质量块运动的影响趋于零,强迫振动项成为描述质量块运动的函数。

% 单自由度阻尼振动系统受迫振动(波形显示)

```
clear;clc;close all;
```

```
A = 1;
```

```
psi = 0;
```

```
F0 = 10;
```

```
D = 20;
```

```
Rm = 1;
```



```

M = 1;
omega = 2;
delta = Rm/(2 * M);
omega0 = sqrt(D/M);
Omega = sqrt(omega0^2 - delta^2);
Zm = Rm + i * (M * omega - D/M);
Zm0 = abs(Zm);
phi = angle(Zm);
t = 0:0.1:40;
x = A * exp(-delta * t) .* cos(Omega * t + psi) + (F0/(omega * Zm0)) * sin(omega *
t - phi);
plot(t, x)
xlabel('t'); ylabel('x')
axis([0 40 -1.5 1.5])

```

图 1.11 为  $R_m = 1$  时质量块随时间振动波形。

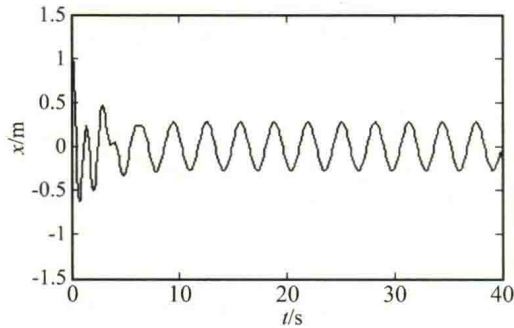


图 1.11  $R_m = 1$  时质量块随时间振动波形

图 1.12 所示为  $R_m = 0.3$  时质量块随时间振动波形。

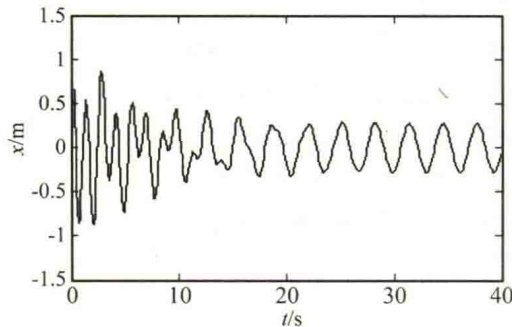


图 1.12  $R_m = 0.3$  时质量块随时间振动波形

以下是实现质量块振动过程动画演示的 MATLAB 程序和结果。

%单自由度阻尼振动系统受迫振动(动画显示)

```
clear;clc;close all;
A = 1;
psi = 0;
F0 = 10;
D = 10;
Rm = 0.3;
M = 1;
omega = 2;
delta = Rm/(2 * M);
omega0 = sqrt(D/M);
Omega = sqrt(omega0^2 - delta^2);
Zm = Rm + i * (M * omega - D/M);
Zm0 = abs(Zm);
phi = angle(Zm);
for t = 0:0.1:40
    tp = 0:0.1:t;
    xp = A * exp(-delta * tp) .* cos(Omega * tp + psi) + (F0/(omega * Zm0)) * sin(omega * tp - phi);
    subplot(2,1,1)
    plot(tp,xp)
    xlabel('t');ylabel('x')
    axis([0 40 -1.5 1.5])
    subplot(2,1,2)
    x = A * exp(-delta * t) .* cos(Omega * t + psi) + (F0/(omega * Zm0)) * sin(omega * t - phi);
    plot(x,0, '.', 'MarkerSize',30)
    xlabel('x')
    axis([-1 1 -1 1])
    pause(0.05)
end
```

图 1.13 所示是某时刻质量块运动位置显示,上图是随时间变化的运动轨迹,图中圆点代表质量块。程序运行结果中,圆点将沿  $x$  轴方向做往复运动。

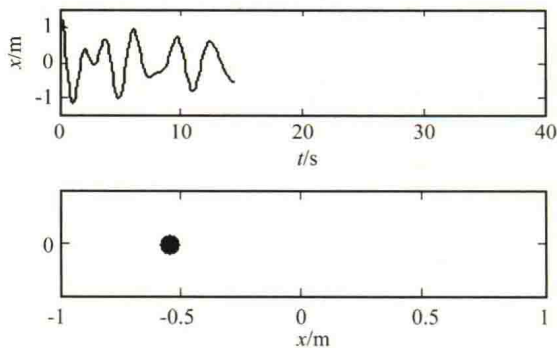


图 1.13 某时刻质量块运动位置

## 1.2 两自由度耦合系统自由振动

对于单自由度系统的运动只用一个空间变量  $x$  描述即可,但对于图 1.14 中的系统,需要用两个空间变量,一个是质量  $m_1$  的相对其平衡位置位移  $x_1$ ,另一个是质量  $m_2$  的相对其平衡位置位移  $x_2$ 。在系统的运动过程中, $x_1$  和  $x_2$  相互独立,因此它是两个自由度的振动系统。

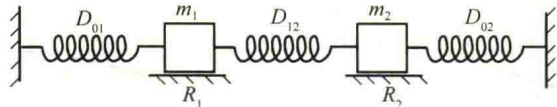


图 1.14 两自由度耦合系统振动系统

图中  $m_1$  和  $m_2$  的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_1^2}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 - k_1 \omega_1^2 x_2 = F_1 \\ \frac{dx_2^2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 - k_2 \omega_2^2 x_1 = F_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

式中,  $\omega_1 = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{D_2}{m_2}}$  ( $D_1 = D_{01} + D_{12}$ ,  $D_2 = D_{02} + D_{12}$ );  $k_1 = \frac{D_{12}}{D_1}$ ,  $k_2 = \frac{D_{12}}{D_2}$ ;  $\delta_1 = \frac{R_1}{2m_1}$ ,  $\delta_2 = \frac{R_2}{2m_2}$ 。

上式中,  $\delta_1, \delta_2, \omega_1, \omega_2, k_1, k_2$  都是由系统本身参数决定的常数。  $\delta_1, \delta_2$  是两个分振子的阻尼系数,它们取决于振动过程中系统能量的损耗;  $\omega_1, \omega_2$  是  $m_2$  或  $m_1$  固定不动时,分振子 ( $m_1, D_{01} + D_{12}$ ) 及 ( $m_2, D_{02} + D_{12}$ ) 的固有振动频率;  $k_1, k_2$  大小决定分振子的相互耦合作用,当  $m_2$  静止不动时,由于  $m_1$  运动而产生的弹性力为  $f_1 = (D_{01} + D_{12})x_1 = D_1 x_1$ ,而实际作用在  $m_2$  上的力为  $f_{12} = D_{12}x_1$ ,所以  $k_1 = \frac{D_{12}}{D_1} = \frac{f_{12}}{f_1}$ ,它表示  $m_2$  静止不动时,耦合作用到它上面的弹性力的百分比,因此  $k_1$  表示第一个振子通过耦合元件对第二个振子的耦合力的大小;同样

$k_2 = \frac{D_{12}}{D_2}$ , 表示第二个振子通过耦合元件对第一个振子的耦合作用的程度, 通常又取  $k = \sqrt{k_1 k_2}$ , 并称其为耦合系统的耦合系数。

当外力  $F_1 = F_2 = 0$  时, 得到自由振动的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_1^2}{dt^2} + 2\delta_1 \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 - k_1 \omega_1^2 x_2 = 0 \\ \frac{dx_2^2}{dt^2} + 2\delta_2 \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 - k_2 \omega_2^2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

无阻尼情况时, 有

$$\begin{cases} \frac{dx_1^2}{dt^2} + \omega_1^2 x_1 - k_1 \omega_1^2 x_2 = 0 \\ \frac{dx_2^2}{dt^2} + \omega_2^2 x_2 - k_2 \omega_2^2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

其解为

$$x_1 = C_+ \cos(\omega_+ t - \varphi_+) + C_- \cos(\omega_- t - \varphi_-) \quad (1.15)$$

$$x_2 = \gamma_+ C_+ \cos(\omega_+ t - \varphi_+) + \gamma_- C_- \cos(\omega_- t - \varphi_-) \quad (1.16)$$

式中

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k^2 \omega_1^2 \omega_2^2}}$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4k^2 \omega_1^2 \omega_2^2}}$$

$$\gamma_+ = \frac{\omega_1^2 - \omega_+^2}{k_1 \omega_1^2}, \quad \gamma_- = \frac{\omega_2^2 - \omega_-^2}{k_2 \omega_2^2}$$

振幅比值  $\gamma_+, \gamma_-$  是由系统固有参数决定的常数, 待定常数  $C_+, C_-, \varphi_+, \varphi_-$  由初始条件决定。

如果  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ , 初始条件  $t=0$ , 则

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ x_2 = 0 \\ \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=0} = 0 \\ \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

可得到

$$\omega_+ = \omega_0 \sqrt{1+k}, \quad \omega_- = \omega_0 \sqrt{1-k}$$

$$\gamma_+ = -\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}, \quad \gamma_- = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

$$C_+ = C_- = \frac{x_0}{2}$$

所以位移解为