高等代数选讲

GAODENG DAISHU XUANJIANG

主　编　刘　丽
副主编　殷　明

重庆大学出版社

高等代数选讲

GAODENG DAISHU XUANJIANG

主　编　刘　丽
副主编　殷　明

重庆大学出版社

内容提要

本书是编者在多年从事"高等代数"及"高等代数选讲"教学的基础上编写的一本辅导材料。全书共分11章，内容包括行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、多项式、相似矩阵、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间、λ-矩阵等。每章内容均按教学要求、知识要点、典型例题、同步练习及参考答案5部分编写。在编写时，力求对内容进行概括性阐述，对例题进行分类讲解，对一些典型例题或具体的解题方法，多加以分析或评注；内容及例题安排上，由浅入深，便于教师教学和学生自学。

本书可作为数学类专业硕士研究生入学考试教材或复习指导书，也可作为理工科、经济管理类学生学习"高等代数"与"线性代数"的参考书，同时还可供教授"高等代数"与"线性代数"的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数选讲 / 刘丽主编. —重庆 : 重庆大学出版社,2017.3
ISBN 978-7-5689-0342-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等代数—教学参考资料 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第321667号

高等代数选讲

主 编 刘 丽
副主编 殷 明
责任编辑：李定群 版式设计：李定群
责任校对：关德强 责任印制：赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行
出版人：易树平
社址：重庆市沙坪坝区大学城西路21号
邮编：401331
电话：(023) 88617190 88617185(中小学)
传真：(023) 88617186 88617166
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
重庆共创印务有限公司印刷

*

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：16.75 字数：368千
2017年3月第1版 2017年3月第1次印刷
ISBN 978-7-5689-0342-4 定价：42.00元

前言

高等代数是数学类专业学生的一门重要基础课，它具有高度的抽象性、严密的逻辑性和应用的广泛性。高等代数的内容与方法不仅对后续课程有着重要作用，而且有助于培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力以及分析和解决问题的能力，同时它也是数学类硕士研究生入学考试的一门必考课程。由于该课程概念、性质、定理多而繁杂，初学者普遍感到难以理解和接受，做习题也时常感到困难重重，无从下手。本书旨在帮助学生进一步明确高等代数的基本要求，突破重点，分解难点；将知识点织成片、连成网，帮助学生理解所学知识间的纵横关系。通过典型例题选讲，帮助学生开阔视野，拓展思路，熟悉解题方法，提高解题能力，并通过练习提高应试能力，最终达到提升数学素养的目的。

本书共分 11 章，内容包括行列式、矩阵、n 维向量、线性方程组、多项式、相似矩阵、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间、λ-矩阵等。本书是由合肥工业大学数学学院老师在多年从事“高等代数”及“高等代数选讲”教学的基础上编写的一本辅导材料。每章内容均按教学要求、知识要点、典型例题、同步练习及参考答案 5 部分编写。在编写时，力求对内容进行概括性阐述，对例题进行分类讲解，对一些典型例题或具体的解题方法，多加以分析或评注；整个体系安排上，由浅入深，便于教师教学和学生自学。

本书可作为数学类专业硕士研究生入学考试高等代数的教材或复习指导书，也可作为理工科、经济管理类学生学习“高等代数”与“线性代数”的参考书，还可作为“高等代数”与“线性代数”教师的教学参考书。

本书由刘丽任主编，殷明任副主编，参加编写的有刘丽、殷明、褚标、李平、开晓山、史三英、常山、许莹，全书由刘丽统稿并定稿。

感谢合肥工业大学教务部、数学学院以及重庆大学出版社在教材出版过程中给予的支持和帮助。

由于编者水平所限，书中难免存在不妥及疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2017 年 2 月

目 录

第 1 章　行列式

一、教学要求

1. 掌握行列式的定义,会用定义计算低阶的行列式以及一些比较特殊的 n 阶行列式.

2. 掌握行列式的基本性质,并能熟练应用这些性质.

3. 掌握计算行列式的基本方法和技巧,并能灵活地应用它们来计算 n 阶行列式.

4. 掌握克莱姆(Cramer)法则,并能应用它来解线性方程组.

二、知识要点

1. 行列式的定义

定义 1　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,其中,$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项的前面带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项的前面带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数.

2. 行列式的性质

(1)行列互换,行列式值不变,即行列式与其转置行列式相等.

(2)对换两行(列)的位置,行列式反号. 特别地,两行(列)相同,行列式为零.

(3)一个数乘行列式的一行等于用这个数乘此行列式,即一行的公因子可以提到行列式符号外. 特别地,某行(列)元素全是零,行列式为零;两行(列)对应元素成比例,行列式为零.

(4)若行列式的某一行(列)是两组数的和,则此行列式可分成两个行列式的和,分开时其他各行(列)保持不动.

(5)将一行(列)的倍数加到另一行(列),行列式值不变.

3. 行列式按行(列)展开

1)代数余子式

定义2 在n阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$中划去元素$a_{ij}$所在的第$i$行与第$j$列,剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的位置次序构成的一个$n-1$阶行列式称为$a_{ij}$的**余子式**,记为$M_{ij}$,记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,称$A_{ij}$为$a_{ij}$的**代数余子式**.

2)行列式按行(列)展开

设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,则下列公式成立:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i. \end{cases}$$

或

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj}=a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} D, & l=j, \\ 0, & l\neq j. \end{cases}$$

4. 克莱姆法则

定理1 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases},$$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$，则方程组有唯一解，且 $x_i=\dfrac{D_i}{D}, i=1,2,\cdots,n$，其中，$D_i$ 是将 D 中第 i 列换成方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

定理 2　齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases},$$

的系数行列式 $D\neq 0$ 的充要条件是方程组只有零解，换言之，齐次方程组有非零解的充要条件是系数行列式 $D=0$.

5. 拉普拉斯(Laplace)定理

1)子式及其代数余子式

定义 3　在 n 阶行列式 D 中任取 k 行 k 列（$k\leqslant n$），位于这些行与列的交叉处 k^2 个元素按原来的位置次序组成的一个 k 阶行列式 M 称为行列式 D 的一个 k 阶子式. 在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按原来的位置次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为 **k 阶子式 M 的余子式**. 设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行与列分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 与 $j_1,j_2,\cdots,j_k$，则称 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}M'$ 为 **k 阶子式 M 的代数余子式**.

2)拉普拉斯定理

定理 3　在 n 阶行列式 D 中任取 k 行(列)（$1\leqslant k\leqslant n-1$），由这 k 行(列)所组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

注　拉普拉斯定理是行列式按一行(列)展开公式的推广，其基本思想是将 n 阶行列式进行降阶处理，这并不一定能减少计算量，但这两个公式在理论上是非常重要的.

6. 一些特殊的行列式

1)上(下)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2)次三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3)范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i - a_j).$$

4)若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶与 n 阶矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|,\quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|.$$

三、典型例题

1. 行列式的定义与性质

例 1 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$,求 $f(x)$ 的根.

分析 利用行列式的性质:若行列式两行(列)成比例,则行列式值为零,通过观察求解.

解 观察可得,若 $x^2-5=4$,则第三列与第二列成比例,此时行列式必为零. 因此,$x=\pm 3$ 是 $f(x)$ 的根. 同理,若 $x^2+1=2$,则行列式必为零. 因此,$x=\pm 1$ 也是 $f(x)$ 的根. 注意到 $f(x)$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的四次方程,至多只有 4 个根,故 $f(x)$ 的所有根为 $x=\pm 1$, ± 3.

例 2 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都是四维列向量,且 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$,$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$,则 $|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|$ 的值为(　　).

A. $m+n$　　B. $-m-n$　　C. $n-m$　　D. $m-n$.

解 由行列式的性质可得,

$$|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2| = |\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1| + |\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2|$$

$$= -\left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\right| + \left|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right| = n - m,$$

故应选 C.

例3　设 x_1,x_2,x_3 是三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根,求行列式 $D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$ 的值.

分析　综合运用行列式性质和根与系数关系解题.

解　由方程根与系数的关系可知, $x_1+x_2+x_3=0$. 于是,

$$D=\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=0.$$

例4　设 $D=\begin{vmatrix} 23 & 2\,013 & 48 & 58 \\ 545 & 636 & 732 & 823 \\ 23 & 15 & 2\,010 & 2\,011 \\ 2\,012 & 33 & 21 & 22 \end{vmatrix}$, 证明 D 能被 729 整除.

分析　注意到 $729=9^3$, 灵活运用行列式的性质,使行或列各元素为 9 的倍数.

证　将行列式的第 2,3,4 行分别减去第 1 行,得到后 3 行都是 9 的倍数,从而后 3 行都可以提出因子 9,剩下的行列式由于它的每个元素都是整数,它的值必为整数. 同时注意到 $729=9^3$, 因此 D 必能被 729 整除.

例5　已知 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 $(1\leqslant i,j\leqslant 4)$, 求 $A_{41}-A_{42}+A_{43}-A_{44}$ 与 $M_{12}+M_{22}+M_{32}+M_{42}$ 的值.

分析　注意到元素 a_{ij} 的余子式(或代数余子式)与 a_{ij} 的大小无关,只与该元素的位置有关.

解　结合 $A_{41}-A_{42}+A_{43}-A_{44}$ 中代数余子式的系数,考虑行列式

$$D'=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

此行列式与行列式 D 具有相同的代数余子式 $A_{41},A_{42},A_{43},A_{44}$. 于是,将行列式 D' 按第 4 行展开可得

$$A_{41}-A_{42}+A_{43}-A_{44}=-D'=-\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-7\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=28.$$

注意 $M_{12}+M_{22}+M_{32}+M_{42}=-A_{12}+A_{22}-A_{32}+A_{42}$，类似地，可以得到

$$-A_{12}+A_{22}-A_{32}+A_{42}=\begin{vmatrix}3&-1&4&0\\2&1&2&2\\0&-1&0&0\\5&1&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4&0\\2&2&2\\5&-2&2\end{vmatrix}=48.$$

2. 行列式的计算

行列式的计算是行列式理论的一个重点，行列式的计算关键是观察、分析行列式的特点，探寻最佳的解题思路. 下面介绍几种典型的计算 n 阶行列式的方法.

1）化行列式为三角形

例 6 计算行列式

$$\begin{vmatrix}x_1&1&1&\cdots&1\\1&x_2&0&\cdots&0\\1&0&x_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix}，其中 x_i\neq 0(i=2,3,\cdots,n).$$

解 将其转化成上三角行列式进行计算，为此将第 2 列的 $-\dfrac{1}{x_2}$ 倍，第 3 列的 $-\dfrac{1}{x_3}$ 倍，……，第 n 列的 $-\dfrac{1}{x_n}$ 倍加到第 1 列得

$$\begin{vmatrix}x_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{1}{x_i}&1&1&\cdots&1\\0&x_2&0&\cdots&0\\0&0&x_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix}=x_2\cdots x_n\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i}\right).$$

注 （1）本题中的行列式称为爪形（或箭形）行列式，爪形行列式是一类典型的 n 阶行列式，可通过转化为三角形行列式进行计算. 其基本形式为

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\b_2&x_2&0&\cdots&0\\b_3&0&x_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b_n&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix},$$

其中，$x_2x_3\cdots x_n\neq 0$.

将第 2 列的 $-\dfrac{b_2}{x_2}$ 倍，……，第 n 列的 $-\dfrac{b_n}{x_n}$ 倍加到第 1 列，从而化为三角形行列式. 由

此得到

$$D_n = x_2 \cdots x_n \left(x_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i b_i}{x_i} \right) .$$

(2)同样地,形如 $\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ 等爪形行列式也类似可化为三角形(或次三角)行列式进行计算.

例 7　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} .$$

解　注意到各行的和相等,将第 2,3,…,n 列都加到第 1 列,并提出公因子得

$$\begin{aligned} D_n &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m \right) (-m)^{n-1}. \end{aligned}$$

2)递推法

递推法是将行列式展开得到递推关系,如 $D_n = aD_{n-1} + b$,$D_n = \alpha D_{n-1} + \beta D_{n-2}$,由此计算出行列式.

例 8　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} .$$

解　按第 1 列展开,得 $D_n = xD_{n-1} + a_n$. 递推并且注意到 $D_1 = a_1$,得

$$D_n = xD_{n-1} + a_n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n .$$

注　若行列式满足 2 阶递推关系 $D_n = \alpha D_{n-1} + \beta D_{n-2}$,可利用特征方程进行求解,具体方法如下:

由 n 阶行列式 D_n 满足 $D_n-\alpha D_{n-1}-\beta D_{n-2}=0$，构造特征方程 $x^2-\alpha x-\beta=0$.

若判别式 $\Delta\neq 0$，则特征方程有两个不相等的复根 x_1,x_2，令 $D_n=ax_1^{n-1}+bx_2^{n-1}$，其中 a,b 为待定常数，取 $n=1,2$ 得方程组可解出 a,b.

若 $\Delta=0$，则特征方程有重根 $x_1=x_2$，令 $D_n=(a+nb)x_1^{n-1}$，其中 a,b 为待定常数，取 $n=1,2$ 得方程组可解出 a,b.

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}5&1&0&\cdots&0&0\\6&5&1&\cdots&0&0\\0&6&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&5&1\\0&0&0&\cdots&6&5\end{vmatrix}.$$

解 将行列式按第 1 行展开，可得

$$D_n=5D_{n-1}-\begin{vmatrix}6&1&\cdots&0&0\\0&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&6&5\end{vmatrix}=5D_{n-1}-6D_{n-2}.$$

特征方程为 $x^2-5x+6=0$，其根为 $x_1=2,x_2=3$. 令 $D_n=a\cdot 2^{n-1}+b\cdot 3^{n-1}$，取 $n=1,2$ 得方程组 $\begin{cases}a+b=5\\2a+3b=19\end{cases}$，解得 $a=-4,b=9$. 因此，$D_n=3^{n+1}-2^{n+1}$.

注 本题中的行列式称为三对角行列式，其基本形式为

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&&\\c&a&\ddots&\\&\ddots&\ddots&b\\&&c&a\end{vmatrix}(bc\neq 0).$$

这类行列式通过直接展开得到递推关系，再利用特征方程进行求解.

当然，也可直接递推进行求解，如下面的例 10.

例 10 当 $\alpha\neq\beta$ 时，计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta&\alpha\beta&0&\cdots&0&0\\1&\alpha+\beta&\alpha\beta&\cdots&0&0\\0&1&\alpha+\beta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}.$$

解 将行列式按第一行展开，可得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta\begin{vmatrix}1&\alpha\beta&\cdots&0&0\\0&\alpha+\beta&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&\alpha+\beta\end{vmatrix}=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

则

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$
$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}).$$

分别递推可得

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n,$$
$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n.$$

联立两式解得

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

注 对三对角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ & & c & a \end{vmatrix} (bc \neq 0),$$

若令 $a = \alpha + \beta, bc = \alpha\beta$, 类似地,可按例 10 中的方法得:

若 $\alpha \neq \beta$, 即 $a^2 \neq 4bc$, 则

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta};$$

若 $\alpha = \beta$, 即 $a^2 = 4bc$, 则

$$D_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

对于 n 阶行列式,也可采用数学归纳法进行计算. 通过计算行列式 D_1, D_2, D_3 等,归纳猜想出行列式 D_n 的表达式,再利用数学归纳法证明. 为了利用归纳假设,通常需要对 n 阶行列式作展开降阶处理.

例 11 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\gamma & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\gamma & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\gamma & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2\cos\gamma & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\gamma \end{vmatrix}.$$

解 易见 $D_1 = \cos\gamma, D_2 = 2\cos^2\gamma - 1 = \cos 2\gamma$, 猜想 $D_n = \cos n\gamma$. 下面用数学归纳法进行证明. 当 $n = 1$ 时结论成立,假设结论对 $\leqslant n-1$ 的正整数都成立. 现考虑等于 n 的情况,对 D_n 按最后一行展开得

$$\begin{aligned} D_n &= 2\cos\gamma D_{n-1} - D_{n-2} \\ &= 2\cos\gamma\cos(n-1)\gamma - \cos(n-2)\gamma \\ &= \cos[\gamma + (n-1)\gamma] + \cos[\gamma - (n-1)\gamma] - \cos(n-2)\gamma \\ &= \cos n\gamma, \end{aligned}$$

结论对 n 也成立,从而证明 $D_n = \cos n\gamma$.

例 12 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ z & 1+x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & 1+x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & 1+x \end{vmatrix},$$

其中, $x = yz$.

解 容易计算 $D_1 = 1 + x, D_2 = 1 + x + x^2, D_3 = 1 + x + x^2 + x^3$. 猜想:

$$D_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

用数学归纳法证明:当 $n = 1$ 时, $D_1 = 1 + x$, 结论成立. 假设结论对 $\leqslant n - 1$ 的正整数都成立. 现将 D_n 按第一行展开:

$$\begin{aligned} D_n &= (1+x)D_{n-1} - yzD_{n-2} \\ &= (1+x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) - x(1+x+x^2+\cdots+x^{n-2}) \\ &= 1+x+x^2+\cdots+x^n. \end{aligned}$$

从而结论成立.

3)升阶法

所谓升阶法,是将行列式加上 1 行 1 列,使其阶数升高但值不变,利用所加的行或列可化简行列式. 升阶法也称为加边法.

例 13 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix},$$

其中, $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

分析 注意观察,本题中的行列式除对角元素之外,各列元素均含有 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$.

解 将行列式加边升阶,得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_1+b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & a_2+b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

上式后一个行列式是爪形行列式,由例 6 注可知, $D_n = \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}\right) \prod_{i=1}^{n} a_i$.