寿险随机精算模型

肖宇谷
张景肖 ◎编著

Stochastic Actuarial Models in Life Insurance

清华大学出版社

寿险随机精算模型

肖宇谷　张景肖◎编著

Stochastic Actuarial Models in Life Insurance

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

国内寿险业发展迅速，产品的复杂程度和保险监管要求也在快速变化，保险精算人员需要适度更新理论知识。本书的主要目的是搭建一个桥梁，让稍微具备一点寿险精算基础的学生或研究人员能快速地了解这一领域当前的主要理论模型，了解现代寿险精算的发展，了解这些理论模型与国内实务的对应关系。本书的主要内容包括5个部分：寿险数学基础，寿险现金流的随机过程模型，布朗运动、随机微积分与期权定价，含期权特征的寿险合约定价，风险度量与管理。本书的主要对象是保险精算领域的研究生和对相关内容感兴趣的研究人员。

图书在版编目(CIP)数据

寿险随机精算模型/肖宇谷，张景肖编著．--北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-43427-6

Ⅰ．①寿… Ⅱ．①肖… ②张… Ⅲ．①人寿保险－精算学 Ⅳ．①F840.62

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第072682号

责任编辑：左玉冰
封面设计：汉风唐韵
责任校对：宋玉莲
责任印制：何 芊

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084
社总机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：170mm×240mm **印 张**：10.5 **字 数**：182千字
版 次：2016年6月第1版 **印 次**：2016年6月第1次印刷
印 数：1～3000
定 价：39.00元

产品编号：066087-01

PREFACE

前 言

近十年来，国内寿险业发展迅速，其中产品的复杂程度也在快速增加，比较突出的几个特点是：

(1) 产品的保险给付含有各种期权式的不确定收益，例如：分红险、投连险和变额年金等收益不确定的产品占据了寿险的主要市场。这些内含期权式收益的产品对定价和风险管理方法提出了全新要求。

(2) 随着人口老龄化，寿险行业新开发的产品如老年长期护理、住房反抵押等在定价模型上已经大大超出了传统寿险精算的领域。

(3) 保险监管偿付能力二代的推出，对寿险行业的风险管理提出了极高的实质性要求。传统的准备金监管转向基于风险资本的监管，风险资本的定量测算直接影响到公司核心竞争力。

产品研发和监管的快速发展使得保险精算人员需要适度更新理论知识，快速掌握国际精算领域的最新成果，但这些新知识散见于不同的文献和书籍中，与传统寿险精算缺少衔接，也与寿险实务缺少关联。本书的主要目的是搭建一个桥梁，让稍微具备一点寿险精算基础的学生或研究人员能快速地了解这一领域当前的主要

理论模型，了解这些理论模型与国内实务的对应关系，使之能更好地理解和研发新产品，应对当前寿险风险管理的迫切需求。

本书的主要对象是保险精算领域的研究生，主要目的是讲解现代寿险精算中的一些理论模型，让读者了解现代寿险精算的发展。本书的大部分内容是基于作者在中国人民大学统计学院2006年至2014年给风险管理与精算方向的研究生开设的《寿险随机精算模型》课程。

本书的主要内容包括5个部分：第1章为寿险数学基础，介绍了一些必备的寿险数学基础知识，给出描述准备金变化率的Thiele微分方程。第2章为寿险现金流的随机过程模型，介绍了用个体生命过程和随机过程的观点讨论寿险合约，通过一种相对统一的方式表达合约的价值，这种模型便于理论上的扩展。在此基础上，讲解了多状态合约的连续时间马尔可夫链模型。最后给出了转移概率和准备金变化微分方程的数值计算程序。第3章为布朗运动、随机微积分与期权定价，介绍了伊藤随机微积分、期权定价Black-Scholes公式、期权定价的二叉树方法和欧式期权的典型数值计算方法。第4章为含期权特征的寿险合约定价，介绍了带保证收益的投连险和分红险的金融工程定价方法。第5章为风险度量与管理，介绍了两种单期风险度量VaR和CTE以及一致性风险度量的含义，给出了VaR和CTE的数值模拟计算程序，以及CTE的优化算法。最后用两个例子说明它的应用扩展：一个是其在长期合约风险资本评估中的应用；另一个是其在最优资产配置策略问题中的应用。

本书的编写得到张波老师的鼓励和支持；罗欢、幺瞳宣、孙舟、刘素、颜淑莹、陈卓、贾志芳、王婧等同学参与了本书初稿的录入与校对，并绘制了部分图形。在此谨表衷心感谢！

本成果受到中国人民大学“统筹推进世界一流大学的一流学科建设”专项经费的支持。

鉴于作者水平有限，书中肯定存在很多不足，敬请读者批评指正。

编　者

2016年5月

CONTENTS
目　录

第 2 章　寿险现金流的随机过程模型

第 3 章　布朗运动、随机微积分与期权定价

|第 1 章|

寿险数学基础

本章主要介绍一些必备的寿险数学基础知识,包括生存分布中常用的概念和计算公式,传统人寿保险的净保费与净准备金。在净保费与净准备金中,我们以连续模型为主,体现一般性思想,不论述过于繁杂的计算和实务细节。

1.1 单生命生存模型

1.1.1 生存分布

假设一个刚出生的个体寿命为随机变量 T。本书除特别说明,恒假定 T 的分布函数连续,且分布函数的密度存在。由于人的寿命有限,所以严格说来 T 是有界随机变量。记 $F_T(t)$为 T 的分布函数,密度记为 $f_T(t)$,除特别说明,均假设 $f_T(t)$($t\geqslant 0$)为连续函数。

下面引入生存分布和死力的概念。

定义 1.1 若随机变量 T 为连续型随机变量，具有分布函数 $F_T(t)$和概率密度函数 $f_T(t)$，则 $S(t)=P(T>t)=1-F_T(t)(t\geqslant 0)$称为寿命 T 的**生存分布**(或**生存函数**)，而

$$\mu(t)=\frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}=\frac{f_T(t)}{S(t)},t\geqslant 0$$

称为寿命 T 的**死力**。

生存函数 $S(t)$表示个体活过 t 岁的概率。死力是与分布函数一一对应的函数，在寿险中也常称为“死亡率强度”，在可靠性中称为“失效率”。

例 1.1 死力可以理解为已知某时刻活着，但在紧接着的单位时间内死亡的条件概率。分析过程如下：

首先，因为概率密度函数 $f_T(t)$是分布函数的导数，即

$$f_T(t)=\lim_{h\to 0}\frac{F_T(t+h)-F_T(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{P(T\in(t,t+h])}{h}$$

所以 $P(T\in(t,t+h])=f_T(t)h+o(h)$，其中 $o(h)$为关于 h 的高阶无穷小量，即 $o(h)$比 h 更快地收敛于 0。若 h 很小，则概率密度函数 $f_T(t)h$ 可以理解为随机变量 T 落在区间$(t,t+h]$里的概率。

其次，

$$P(T\in(t,t+h]\mid T>t)=\frac{P(T\in(t,t+h])}{P(T>t)}=\frac{f_T(t)h+o(h)}{1-F_T(t)}=\mu(t)h+o(h)$$

所以**死力可以表示已知寿命大于某时刻，但在该时刻后的单位时间内死亡的概率**。如果取单位时间为一年的话，$f_T(70)$可以近似理解为寿命在 70～71 岁的概率，而 $\mu(70)$可以近似理解为刚满 70 岁的人在紧接着的一年内死亡的概率。

生存函数 $S(t)$、密度函数 $f_T(t)$和 $\mu(t)$有下面的关系。

定理 1.1 生存函数 $S(t)$、密度函数 $f_T(t)$可由 $\mu(t)$来表示：

$$S(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s},f_T(t)=\mu(t)e^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$$

证明 由死力的定义可得

$$\mu(t)=\frac{-S'(t)}{S(t)}$$

整理得

$$(\ln(S(t)))'=-\mu(t)$$

所以积分得

$$\ln(S(t)) = -\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s + C, C \text{ 为某一常数}$$

由 $S(0)=1$,可得 $C=0$,所以

$$S(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$$

$$f(t) = -S'(t) = \mu(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s}$$

证毕。

几种常见的死亡力函数见表 1.1。

表 1.1 死力与生存函数

提出者	死力 $\mu(t)$	生存函数 $S(t)$
De Moivre(1729)	$\frac{1}{w-t}$ $0\leqslant t<w$	$1-\frac{t}{w}$ $0\leqslant t<w$
Gompertz(1825)	BC^t $B>0,C>1$ $t\geqslant 0$	$\exp\left(-\frac{B}{\ln C}(C^t-1)\right)$ $B>0,C>1$ $t\geqslant 0$
Makeham(1860)	$A+BC^t$ $B>0,A\geqslant -B,C>1$ $t\geqslant 0$	$\exp\left(-At-\frac{B}{\ln C}(C^t-1)\right)$ $B>0,A\geqslant -B,C>1$ $t\geqslant 0$
Weibull(1939)	kt^n $k>0,n>0$ $t\geqslant 0$	$\exp\left(-\frac{k}{n+1}t^{n+1}\right)$ $k>0,n>0$ $t\geqslant 0$

1.1.2 x 岁个体的生存分布

定义 1.2 若一新生儿生存至 x 岁，记此时的个体为(x)。这里假设 x 为整数。令随机变量 $T(x)=T-x$，称为个体(x)的**剩余寿命**。

个体(x)的剩余寿命 $T(x)$的概率分布函数、密度函数、生存函数和死力分别记为 $F_{T(x)}(t)$、$f_{T(x)}(t)$、$S_{T(x)}(t)$和 $\mu_x(t)$。若已知新生个体的死力 $\mu(t)$、概率分布函数 $F(t)$和密度函数 $f(t)$，则可以计算出剩余寿命 $T(x)$相应的概率分布函数 $F_{T(x)}(t)$、密度函数 $f_{T(x)}(t)$、死力 $\mu_x(t)$和生存函数 $S_{T(x)}(t)$。

定理 1.2 个体(x)的未来剩余寿命 $T(x)$的概率分布函数

$$F_{T(x)}(t)=1-\frac{S(x+t)}{S(x)}$$

密度函数

$$f_{T(x)}(t)=\frac{f(x+t)}{S(x)}$$

死力

$$\mu_x(t)=\mu(x+t)$$

生存函数

$$S_{T(x)}(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(x+s)\mathrm{d}s}$$

证明 根据定义知

$$\begin{aligned}F_{T(x)}(t)&=P(T-x\leqslant t\mid T>x)=\frac{P(T\leqslant x+t,T>x)}{P(T>x)}\\&=P(T-x\leqslant t\mid T>x)=\frac{P(T>x)-P(T>x+t)}{P(T>x)}\\&=1-\frac{S(x+t)}{S(x)}\end{aligned}$$

由上式可知

$$f_{T(x)}(t)=\frac{-S'(x+t)}{S(x)}=\frac{f(x+t)}{S(x)}$$

根据死力的定义和上面已证的结果知

$$\mu_x(t)=\frac{f_{T(x)}(t)}{1-F_{T(x)}(t)}=\left(\frac{f(x+t)}{S(x)}\right)\left(\frac{S(x+t)}{S(x)}\right)^{-1}=\mu(x+t)$$

再根据定理 1.1 知

$$S_{T(x)}(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t \mu_x(s)\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{-\int_0^t \mu(x+s)\mathrm{d}s}$$

证毕。

定理 1.3 若已知个体(x)的剩余寿命 $T(x)$大于 t，则其剩余寿命 $T(x)$与个体$(x+t)$的剩余寿命同分布，即

$$P(T(x)>s+t\mid T(x)>t)=P(T(x+t)>s)\text{，对任意的 } s\geqslant 0$$

证明 对任意的 $s\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}P(T(x)>s+t\mid T(x)>t)&=P(T-x>s+t\mid T-x>t)\\&=P(T-x-t>s\mid T>x+t)=P(T(x+t)>s)\end{aligned}$$

证毕。

1.1.3 生存分布的一些精算表示法

精算学中常采用一些符号来表示生存概率分布。具体有：

${}_tp_x$：个体(x)的剩余寿命大于 t 的概率，即个体(x)至少再活 t 年的概率。

${}_tq_x$：个体(x)的剩余寿命小于 t 的概率，即个体(x)在未来 t 年内死亡的概率。

${}_{u|t}q_x$：个体(x)在$(x+u,x+u+t]$死亡的概率，即个体(x)活过 $x+u$ 岁，并在接下来的 t 年内死亡的概率。

当 $t=1$ 时，可简记为

$p_x={}_1p_x$，$q_x={}_1q_x$；${}_{u|}q_x={}_{u|1}q_x$

根据定义知，${}_tp_x=S_{T(x)}(t)$，${}_tq_x=F_{T(x)}(t)$。

性质 1.1 ${}_tp_x=\dfrac{S(x+t)}{S(x)}$。

证明 由定理 1.2 直接可得。

性质 1.2 对 $t>0,u>0$,生存概率${}_tp_x$ 与死亡概率${}_tq_x$ 和${}_{u|t}q_x$ 有如下关系：

$$ {}_tq_x=1-{}_tp_x,\ {}_{u|t}q_x={}_up_x\cdot{}_tq_{x+u},\ {}_{u|t}q_x={}_up_x-{}_{u+t}p_x $$

证明 ${}_tq_x=P(T(x)\leqslant t)=1-P(T(x)>t)=1-{}_tp_x$

利用定理 1.3,有

$$ \begin{aligned} {}_{u|t}q_x &=P(T(x)\leqslant t+u,T(x)>u)=P(T(x)>u)P(T(x)\leqslant t+u\,|\,T(x)>u)\\ &=P(T(x)>u)P(T(x+u)\leqslant t)={}_up_x\cdot{}_tq_{x+u} \end{aligned} $$

同时有

$$ \begin{aligned} {}_{u|t}q_x &=P(T(x)\leqslant t+u,T(x)>u)\\ &=P(T(x)>u)-P(T(x)>t+u)={}_up_x-{}_{u+t}p_x \end{aligned} $$

证毕。

性质 1.3 对 $0<h<t$,生存概率${}_tp_x$ 满足

$$ {}_tp_x={}_hp_x\cdot{}_{t-h}p_{x+h} $$

证明 对 $0<h<t$,利用定理 1.3,有

$$ \begin{aligned} {}_tp_x &=P(T(x)>t)=P(T(x)>h)P(T(x)>t\,|\,T(x)>h)\\ &=P(T(x)>h)P(T(x+h)>t-h)={}_hp_x\cdot{}_{t-h}p_{x+h} \end{aligned} $$

证毕。

性质 1.4 $f_{T(x)}(t)={}_tp_x\cdot\mu(x+t),\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_tp_x)=-{}_tp_x\cdot\mu(x+t)$。

证明 由定理 1.2 知

$$ {}_tp_x=S_{T(x)}(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(x+s)\mathrm{d}s} $$

对上式中的 t 求导,整理得

$$ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}({}_tp_x)=-{}_tp_x\cdot\mu(x+t) $$

因为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_{T(x)}(t))=-f_{T(x)}(t)$,所以

$$f_{T(x)}(t)={}_tp_x\cdot\mu(x+t)$$

证毕。

下面将常用的一些公式列于表 1.2。

表 1.2　生存分布中常用的几个公式

函数名称	关系式	位置
概率分布	$F_{T(x)}(t)=1-\frac{S(x+t)}{S(x)}$	定理 1.2
密度函数	$f_T(t)=\mu(t)\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(s)\mathrm{d}s}$	定理 1.1
	$f_{T(x)}(t)=\frac{f(x+t)}{S(x)}={}_tp_x\cdot\mu(x+t)$	定理 1.2;性质 1.4
生存函数	$S(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(s)\mathrm{d}s}$	定理 1.1
	$S_{T(x)}(t)=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu_x(s)\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{-\int_0^t\mu(x+s)\mathrm{d}s}$	定理 1.2
生存概率	${}_tp_x=S_{T(x)}(t)=\frac{S(x+t)}{S(x)}$	性质 1.1
	${}_tp_x={}_hp_x\cdot{}_{t-h}p_{x+h}$	性质 1.3
死亡概率	${}_tq_x=1-S_{T(x)}(t)=1-{}_tp_x$	性质 1.2
死力	$\mu(t)=\frac{f_T(t)}{1-F_T(t)}=\frac{f_T(t)}{S(t)}$	定义 1.1
	$\mu_x(t)=\mu(x+t)$	定理 1.2

1.2　传统人寿保险的精算现值

人寿保险通常以人的生存或死亡状态为基本给付条件,同时考虑合约的期限。这里需要注意两个时间,即人的死亡时间(或生命状态改变发生的时间)和合约给付覆盖的时间区间。

常见的人寿保险包括定期寿险、终身寿险、生存保险、两全保险、定期生存年

金、终身生存年金和延期生存年金，具体给付条件见表 1.3。

表 1.3 常见的人寿保险给付条件

保险名称	给付条件
定期寿险	以被保险人在固定期限内死亡发生为给付条件
终身寿险	被保险人不论何时死亡，保险人都负责给付保险金
生存保险	被保险人生存至保险期满，则获得约定的保险金额
两全保险	无论被保险人在保险期限内死亡还是生存至保险期满，都可以获得约定的保险金额
年金保险	被保险人生存期间在约定期限内按每月或每年的时间间隔，持续地获得保险金额
延期保险或延期年金	在签单后的一段延期期间内，保险人不承担保险责任

未来金额在当前时刻的价值，称为**现值**。保险给付是否发生依赖于人的寿命，所以是一个随机变量。根据人的寿命分布对未来给付的现值计算期望，称这个期望值为**精算现值**(actuarial present value)，简记为 **APV**。精算现值反映了保险人平均每个保单需要给付的金额在当前时刻的价值。

在保险实务中，具体的缴费方式(一次性趸交或分期缴费)、给付时间(期初给付或期末给付)与给付方式(立即给付或延期给付)都会影响合约的精算现值。本书主要介绍基本原理，所以只给出代表性基础模型，这里的重点是用剩余寿命随机变量来描述合约的给付现值。

下面给出表 1.3 中传统人寿保险的精算现值基础模型，在这一节中假设利率 $r>0$ 为常数，个体(x)的剩余寿命为 $T(x)$。

1. 定期寿险的精算现值

定期寿险以被保险人在固定期限内死亡发生为给付条件。基础模型为：若 x 岁的被保险人在未来 n 年内死亡，则保险人立即给付保险金 1 元；反之，则没有保险金给付。