

会
科学译丛

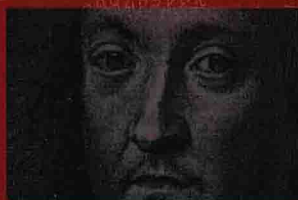
费马大定理

解开一个古代数学难题的秘密

FERMAT'S LAST THEOREM

Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem

[美] 阿米尔·艾克塞尔 著 左平 译



上海科学技术文献出版社
Shanghai Scientific and Technological Literature Press



费马大定理

解开一个古代数学难题的秘密

FERMAT'S LAST THEOREM

Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem

[美] 阿米尔·艾克塞尔 著 左平 译



上海科学技术文献出版社
Shanghai Scientific and Technological Literature Press

图书在版编目 (CIP) 数据

费马大定理：解开一个古代数学难题的秘密 / (美) 阿克塞尔著；
左平译．—上海：上海科学技术文献出版社，2016.6

(合众科学译丛)

书名原文：FERMAT'S LAST THEOREM: Unlocking the Secret of an
Ancient Mathematical Problem

ISBN 978-7-5439-6996-4

I. ① 费… II. ① 艾…② 左… III. ① 费马最后定理—普及读
物 IV. ① O156.49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 057361 号

Fermat's Last Theorem

by Amir D. Aczel

Copyright © 1996 Amir D. Aczel

Simplified Chinese translation copyright © 2016

by Shanghai Scientific & Technological Literature Press

Published by arrangement with Da Capo Press, a Member of Persus Books LLC
through Bardon-Chinese Media Agency

博达著作权代理有限公司

All Rights Reserved

版权所有·翻印必究

图字：09-2015-633

责任编辑：李 莺

封面设计：许 菲

丛书名：合众科学译丛

书 名：费马大定理——解开一个古代数学难题的秘密

[美] 阿米尔·阿克塞尔 著 左平 译

出版发行：上海科学技术文献出版社

地 址：上海市长乐路 746 号

邮政编码：200040

经 销：全国新华书店

印 刷：上海中华商务联合印刷有限公司

开 本：650×900 1/16

印 张：8.25

字 数：95 000

版 次：2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷

书 号：ISBN 978-7-5439-6996-4

定 价：20.00 元

<http://www.sstlp.com>

献给我的父亲

序 言

1993年6月，我的老朋友汤姆·舒尔特从加利福尼亚到波士顿来看我。我们来到阳光明媚的新巴利街，坐在人行道旁的咖啡座上，高耸于杯上的冷饮放在我们面前。汤姆刚离婚，有点沉默寡言。他侧转过头来对着我说：“顺便告诉你，费马大定理刚被人证明出来了。”随后汤姆的注意力回到了人行道。我想，这必定又是在开玩笑。20年前，我们都是加利福尼亚大学柏克莱分校数学系的大学生，汤姆和我住同一宿舍。有关费马大定理的一些事情是我们经常谈论的话题。我们还讨论函数、集合、数域和拓扑学。数学系的学生晚上睡眠时间都不多，因为我们的课业很难，这是与其他许多系科学生不同之处。有时我们整夜都在思考数学问题……试图证明某些定理，直至清晨。但费马大定理呢？没有人相信我们这辈子能看到它被证明出来。要证明这个定理非常困难，三百多年来吸引众多的人想要证明它。我们也知道，在试图证明此定理的过程中，产生了一些新的数学分支。但证明此定理的努力一次又一次地失败了。费马大定理渐渐变成了无法解决的象征。我曾经有一次认为，对我来说，意识到不可能证明此定理或许是有益的。几年以后，我已经从柏克莱数学系毕业并正在修读计算科学的硕士学位。我住在国际公寓时，一个自负的数学系学生，不知道我的数学背景，表示可给我提供他的帮助。“我是学纯粹数学的，”他说，“如果你有什么解决不了的数学问题，你尽管问我好了。”说完他就打算离开，但听到我说“嗯，是的。有一个问题，你可能会给我帮

助……”他转回身，“好，一定，让我看看是什么问题。”我铺开一张餐巾纸——当时我们正在餐厅。我在它上面慢慢写出：

$$x^n + y^n = z^n \quad \text{当 } n \text{ 大于 } 2 \text{ 时没有整数解。}$$

“从昨夜开始，我一直在试图证明这一问题。”我说，向他举起那张餐巾纸。我看到他的脸色变白。“费马大定理！”他哼哼唧唧道。“是的，”我说，“你是学纯粹数学的，你能给我帮助吗？”此后我再未碰到过此人了。

“我是认真的。”汤姆喝完他的冷饮说。“安德鲁·怀尔斯 (Andrew Wiles)。他上个月在剑桥证明了费马大定理。记住这个名字。今后你会不断地听到它。”那晚，汤姆即乘飞机返回加利福尼亚。后一个月，我已认识到汤姆确实没有跟我开玩笑，并且我追踪了事件的整个过程。怀尔斯最初受到了欢呼，然后发现他的证明里有个漏洞，为此，证明被撤回一年，接着用一种正确的方法完全解决了问题。但随着进一步的了解，我认为汤姆还是错了。我不应只注意安德鲁·怀尔斯一个名字，或单独他一个人。我，以及整个世界，应该知道费马大定理的证明远远不只是一个数学家的工作成果。当怀尔斯得到那么多赞扬时，这荣耀同时也属于其他很多人：肯·里贝特 (Ken Ribet)，巴厘·梅修尔 (Barry Mazur)，志村五郎 (Goro Shimura)，谷山丰 (Yutaka Taniyama)，杰哈德·弗雷 (Gerhard Frey) 等等。这本书讲述了一个完整的解决费马大定理的故事，其中包括荧幕背后和相机镜头及闪光灯外不为人知的趣闻轶事。同时，这也是一个含有欺骗、阴谋和背叛的故事。

“或许我能借助进入黑暗大楼内的经验，最好地描述我如

何做数学研究。你进入第一间房屋，但它里面一片漆黑，伸手不见五指。你磕碰家具，不时被周围的东西绊倒。逐渐地，你能感觉并知道每一样东西、每一件家具都在哪里。并且最后，在6个月或更长些时间后，你能找到灯的开关并把灯点亮。突然，屋内大放光明并且你可看清你准确的位置。然后你再进入下一间黑房……”

这是安德鲁·怀尔斯教授描述他七年来如何搜寻数学圣灵的故事。

目 录

序 言	001
第一章	001
1. 剑桥, 英国, 1993 年 6 月	001
2. 皮埃尔·德·费马	004
3. 素数	007
4. 写在空白处的著名评注	007
5. 1993 年 7—8 月——一个隐含的漏洞	009
第二章	010
6. 约公元前 2000 年, 底格里斯河与幼发拉底河之间	010
7. 数的平方意味着财富	011
8. 黏土平板文书 “Plimptom 322”	012
9. 秘密宣誓的“数崇拜者”的古代盟会	013
10. “万物皆数”	014
11. 斜边的平方等于其余两边平方之和……	016
12. 整数, 分数, 还有什么	017
13. 毕达哥拉斯的遗产	020
14. 绳子, 钉子, 和几何学的诞生	022
15. 什么是定理	024
16. “我找到它了! 我找到它了!”	024
17. 大约公元 250 年, 亚历山大, 古埃及	027

第三章	029
18. 阿拉伯之夜	029
19. 中世纪商人和黄金分割	030
20. 求未知数者	034
第四章	036
21. 复兴和探索古代知识	036
22. 平方, 立方, 和更高次	036
23. 演算法家	038
24. 柯尼斯堡七桥问题	041
25. 高斯, 伟大的德国天才	042
26. 虚数	045
27. 索菲·热尔曼	047
28. 1811年闪耀的彗星	048
29. 弟子	049
第五章	051
30. 拿破仑时代的数学家	051
31. 周期函数	052
32. 拉梅的证明	055
33. 理想数	055
34. 另一项赏金	058
35. 非欧几里得几何	058
36. 美丽与悲剧	059
37. 另一个受害者	063
38. 戴德金的理想理论	064

第六章	066
39. 全才庞加莱	066
40. 模形式	068
41. 与拓扑学的意外联系	070
42. 佛廷斯的证明	072
43. 神秘的且名字可笑的希腊将军	073
44. 椭圆曲线	076
45. 奇特的猜想	077
第七章	078
46. 东京, 日本, 1950年代初期	078
47. 一个有希望的起点	080
48. “你在说什么?”	081
49. 志村的猜想	082
50. 阴谋与背叛	084
51. “有兴趣读者的一个练习”	086
52. 谎言	087
第八章	091
53. 1984年秋, 黑森林深处	091
54. 里贝特定理	092
第九章	097
55. 童年时的梦想	097
56. 重新点燃一个古老光焰	098
57. 把一个大问题拆解为若干小问题	100
58. 弗莱切的论文	101

59. 一位好朋友	102
60. 谜题的最后部分	104
61. 检验	105
62. 深藏的一个隐含的漏洞	106
63. 烦恼	108
64. 如愿以偿	109
第十章	112
65. 费马有证明吗	112
注 释	115
作者的话	118



第一章

1993年6月23日的黎明前，普林斯顿大学的约翰·康韦（John Conway）教授来到校园里那座黑暗中的数学大楼。他打开前门并急忙走进他的办公室。自他的同事安德鲁·怀尔斯出发去英国后的这几星期里，不同寻常的传闻持续不断，已充满世界数学界。约翰·康韦感到要发生重要事情。但确切的是什么事情，他没有概念。他打开他的计算机，坐下并盯视着屏幕。早晨5:53，一条简明的电子信息越过大西洋闪现出来：“怀尔斯证明了F.L.T.（费马大定理）”

1. 剑桥，英国，1993年6月

1993年6月下旬，安德鲁·怀尔斯教授飞到英国。他回到了剑桥大学，这里是20年前他还是大学生时学习的地方。怀尔斯以前在剑桥的博士论文的导师，约翰·科茨（John Coates）教授正在组织一次有关依瓦沙瓦（Iwasawa）理论的研讨会，该理论是数论中的独特部分，怀尔斯所写的论文恰恰是有关此领域的，因而对此理论知之甚详。科茨此时问他以前的学生，是否愿意在会议上就你选择的论题做一简短的1小时的演讲。令和其他会议的组织者感到极其惊讶的是，害羞的以前厌恶对公众讲话的怀尔斯竟然要求，是否能给他3个小时的演讲时间。

当40岁的怀尔斯到达剑桥时，他看起来是一位典型的数学家：

袖子随便挽起的白色衬衫，厚厚的角质架眼镜，不太规整的稀疏头发。生于剑桥的他，这次归来是某种特殊的回家——实现他童年之梦。为追求这一梦想，安德鲁·怀尔斯关在自己的顶楼里已面壁七年。但他希望，这种牺牲，这种长期孤军奋战的时日，不久将会结束。他期盼能有更多时间与妻女在一起，而在这七年里他只有极少时间能看到她们。他经常失约家庭午餐，或忘了下午茶，晚饭也很少在家吃。但现在，荣耀将归于他一人。

剑桥的艾萨克·牛顿数学科学研究所近来才开放，这是因为怀尔斯教授要来这里发表他的3小时演讲。这研究所是一座宏伟的大楼，坐落在围绕剑桥大学的景观区内，环境优美。演讲厅外的宽广区域里，有装饰着绒布的舒适坐椅，方便促进学者和科学家之间的非正式思想交流，提高学术和知识。

从世界各地来参加这次特别会议的数学家，虽然怀尔斯大多数都认识，但他此时不与他们接触。当同事们对他安排的演讲之长表示奇怪时，怀尔斯只是说你们应该来听我的演讲，你们会发现这是值得的。如此这般地保持神秘，甚至对于数学家们也是非比寻常的！当通常一个数学家单独在为证明某定理而工作，并且一般地说世界上大多数与他们有交往者都还不知道详情时，数学家们经常会彼此分享研究成果。数学结果以预印稿的形式在它们的作者之间自由传阅。这些预印稿给作者们带来了外部的评论，从而使论文在发表前得到改善。但怀尔斯没有散发预印稿，也没有预先讨论他的工作。怀尔斯演讲的题目是“模形式、椭圆曲线和伽罗瓦表示”，但此题目对演讲将引向何处没给出一点暗示，甚至在这些领域里的专家也猜不出来。传言随着时间的流逝而快速增长。

第一天，怀尔斯用讲述一些强力和未曾预料到的数学结果酬谢

了二十多位听他演讲的数学家——并且提醒他们还有两次演讲。接着将会得到什么呢？每一个人都清楚，答案就在怀尔斯的演讲中。悬念随着充满期待的数学家的大批拥入而不断增加。

第二天，怀尔斯的介绍增多了。他带来了200页的讲稿，包括公式和推导，原始思想和漫长而抽象的定理证明。厅内所有空余地方都挤满了人。每一个人都耐心地在听。演讲将导向何处？怀尔斯没有给出一点暗示。他沉着地不断在黑板上写着，一直写了一天，然后他就匆匆离开了。

接下来的一天，1993年6月23日，星期三，是怀尔斯演讲的最后一天。当他走近演讲厅时，怀尔斯发现必须推挤人群才能进入。在入口处外面聚集了许多站立的人群，屋内则超负荷挤满了人。很多人还带着相机。当怀尔斯再次在黑板上写着似乎是没完没了的公式和定理时，紧张气氛加剧了。“怀尔斯的介绍只可能有一个顶峰，只可能有一个结果”，事后加利福尼亚大学的肯·里贝特教授在柏克莱告诉我说。怀尔斯正在完成他对谜样的、复杂的一个数学猜想，即谷山-志村猜想的证明的最后几行。然后他最后突然增加一行，写出了几个世纪的古老方程，肯·里贝特七年前已经证明，这应是此猜想的必然结果。“那么这就证明了费马大定理，”他说，几乎是随之而来的，又说，“我想我就在此结束。”

在整个大厅内出现了瞬间的惊愕和沉寂。然后爆发出听众发自内心的鼓掌欢呼。相机闪光显现出人们都站起来向喜形于色的怀尔斯祝贺。几分钟内，电子邮件和传真飞遍世界各地。这个长期困扰人们的最费脑子的数学问题看起来已经解决了。

“不曾料到的是，第二天我们被世界出版机构所发的洪水淹没

了，”约翰·科茨教授回忆说。科茨组织了这次会议，但他一点也没想到会议会成为最伟大数学成就之一的落地场所。世界报刊的头条都在欢呼这出乎意料的突破。“终于，可以大声呼喊，Eureka！（找到了！）几个世纪的古老数学秘密”这是1993年6月24日《纽约时报》的头版上所宣布的。《华盛顿邮报》在一篇重要文章里称怀尔斯为“数学巨龙的斩杀者”，并且是新故事中所描述的解决了向人们挑战已超过350年之久，最难以攻克的数学问题的人。只过了一夜，这个安静和不为人知的安德鲁·怀尔斯变成一个了不起的人。

2. 皮埃尔·德·费马

皮埃尔·德·费马是17世纪法国的一位律师，也是一位业余数学家。技术上称他是“业余的”，是因为他有一份日常的律师职业，权威的数学史学家E·T·贝尔在他20世纪早期所写的著作里，恰当地称费马为“业余数学家之王”。贝尔相信费马取得的成就比他同时代的大多数“职业”数学家的更重要。贝尔认为费马是17世纪最丰富多产的数学家，而17世纪是见证了某些最伟大数学头脑如何工作的一个世纪¹。

费马的最令人惊叹的成就之一，是他在艾萨克·牛顿出生前13年，发展了微积分学的主要概念。牛顿和同时代人莱布尼兹一起被看做创立了含有运动、加速度、力和轨道的数学理论，以及其他应用数学的连续变化的概念。这些人们称之为微积分学。

费马对古希腊的数学著作十分入迷。可能他的微积分概念是来自古希腊数学家阿基米得和欧多克斯的经典著作，阿基米得和欧多

克斯是分别生活在公元前的3和4世纪的人物。费马把所有空闲时间都用来研究这些古代著作——这些著作在他那时代已翻译成拉丁文。他的全职工作是重要的律师，但他的爱好——他的兴趣——是试图推广古代的工作和在那些被埋藏的数学发现里寻找新的美妙定理。“我已经找到了大量极漂亮的定理”，他有一次说。这些定理都摘记在他的古书翻译本的空白地方。

费马的父亲多米尼克·费马（Dominique Fermat）是皮革商人，多米尼克还是波梦特-洛马镇的第二执政官，他娶出身于议会法官家庭的克莱尔·德·隆为妻。费马生于1601年8月（8月20日在波梦特-洛马受洗礼），成长后其双亲一心要培养他为一地方执政官。他年轻时入图卢兹的学校学习，30岁时在此城被任命为地方官员。同年，1631年，他与他母亲的侄女路易斯·隆结婚。皮埃尔与路易斯有3个儿子和2个女儿。儿子之一的克来梦·塞缪尔（Clement Samuel），成为他父亲科学工作的整理者并且在他父亲去世后出版了其著作。事实上，正是这些留传了下来的出版物，使我们知道了他著名的大定理。克来梦·塞缪尔·德·费马意识到潦草地写在空白处的此定理的重要性，特意把它加到了再版的古书的翻译本中。

费马的生活常常被描写为平静、稳定和没有什么变化。他体面和诚实地工作着，并在1648年被提升至图卢兹地方议会议员的重要职位，直至1665年他去世，共担任了17年。考虑到费马要为王朝做大量工作，要忠诚的服务，要奉献生活的全部时间，很多历史学家都非常迷惑，他哪有时间和精力做第一流的数学研究——和写出那么多卷的数学著作。一法国专家指出，费马的官方工作对于他的数学研究实际上是有利的，因为为了避免行贿和其他腐败行为的

Arithmeticon Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hic etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 - 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitate quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. - 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. - 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 - 1 Q. Communis adiiciatur vtriusque defectus, & à similibus auferantur similia, sient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. ¶ Et ita igitur alter quadratorum ¶. alter vero ¶. & vtriusque summa est ¶ seu 16. & vterque quadratus est.

πέντηκον. ὁ δὲ ἑξήκοντα εἰκοσήμετριον, ὁ δὲ δύο συμπλήρης ποιόσσι ὁ εἰκοσήμετρια, ἢ τὴν μονάδας 16. καὶ ἐστὶν ἐκείντος πεντάγωνου.

TON ὀρθογώνου τετραγώνου διελθὲν εἰς δύο πεντάγωνους. ἐπιπέδων δὲ τῶν 16 διελθὲν εἰς δύο πεντάγωνους. καὶ πλάτων ὁ ὡρθογώνου διωάμεως μίας. διήσει ἄρα μονάδας 16 λείψα δύναμει μίας ἴσας ἐπὶ πλάτων. πλάτων τὸ τετράγωνον ἀπὸ 16. ὅσον δὲ ποτε λείψα τῶν ὄρων μὲ ὅσον ὅστιν ἢ τῶν μὲ πλάτων. ἔστω 16 β λείψα μὲ δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται διωάμεων δὲ μὲ 16 [λείψα 16 16.] ταῦτα ἴσα μονάσει 16 λείψα δύναμει μίας. κοινὴ ὡρθογώνου ἢ λείψα; καὶ ὅσοι ὁμοίω ὁμοίω. διωάμεως ἄρα ἔσται ἀριθμοῦ 16. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς 16 πέντηκον. ἔσται ὁ μὲν σὺν 16 εἰκοσήμετριον.

杜克大学特别收集的图书资料

皮埃尔·德·费马的“大定理”再次登载在丢番图的算术的一个版本上，该版本也是由费马的儿子克来梦设法出版的。而带有费马手写笔记的丢番图的原始复制本却一直没有找到。

诱惑，法国议会议员被要求把非官方的社交活动减少到最低程度。因此费马必须限制他的社交活动，但肯定又需要在繁重工作之余有一种消遣，而数学可能就提供了他所需要的休息。微积分的思想远不是费马仅有的成就。费马还给我们带来了数论。数论中的一个重要元素是素数的概念。