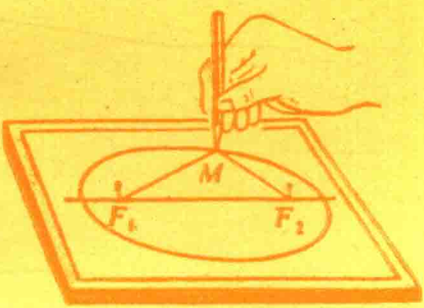
幼儿师范学校课本

数学

SHUXUE

下册



人民教育出版社

说明

一、根据国家教育委员会颁布的《幼儿师范学校教学计划》和《幼儿师范学校数学教学大纲(试行草案)》,我们编写了这套《数学》课本,分上、下两册,供三年制幼儿师范学校和四年制幼儿师范学校试用,也可供职业高中幼教班选用。考虑到四年制幼儿师范学校数学课时较多,另编《电子计算机的初步知识》和《概率统计的初步知识》(拟于1988年秋供书),供这些学校选用。

二、这套《数学》课本在确定教学内容时,注意到以下几点:

1. 要与普通中学的初中数学内容相衔接;

2. 精选传统的初等数学内容,知识面适当宽一些,在理论、推理论证以及例、习题的技巧方面的要求要适度;

3. 适当充实与从事幼儿教育工作有联系的教学内容,适当增加与幼儿教育有关的例、习题。

三、本书是《数学》下册,内容包括行列式和线性方程组,直线的方程,圆锥曲线,数列和数学归纳法,排列、组合和二项式定理,复数,数集等七章。供三年制幼儿师范学校和四年制幼儿师范学校二年级使用。

四、本书习题包括练习、习题两类:

1. 练习　供课堂练习用。

2. 习题　供课内、外作业用。

五、本书由我室编写。参加编写工作的有方明一、许缦阁、李慧君，责任编辑是方明一。全书由吕学礼校订。

本书在编写过程中，于云华、林明娜、朱青、王国福、蒋国政、孟庆坤、武锡志、龙建秋、柴俊山、高仲林等同志对初稿提了很多宝贵意见。在此，谨向这些同志表示感谢。

由于编写时间仓促，难免存在一些失误和不足之处，请同志们在试用中提出宝贵意见，以便进一步修改。

人民教育出版社数学室

1986年12月

目　录

第七章　行列式和线性方程组

一次方程组又叫做**线性方程组**，如二元一次方程组叫做二元线性方程组，三元一次方程组叫做三元线性方程组，等等.

我们在初中已经学会用消元法解二元和三元线性方程组. 从理论上讲，多元线性方程组可以用逐个消元的方法解出. 但是，用消元法解三元或三元以上的线性方程组很繁杂，不便于计算. 为此，我们来学习用行列式解线性方程组的方法.

7.1　二阶行列式

二元线性方程组的一般形式可以写成

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2, & (2) \end{cases}$$

其中 x, y 是未知数，a_1, a_2, b_1, b_2 是未知数的系数，c_1, c_2 是常数.

如果当 $x=x_1, y=y_1$ 时，方程组(I)中每个方程左右两边的值都相等，也就是说 $x=x_1$，$y=y_1$ 适合方程组 (I)，那么 $x=x_1, y=y_1$ 叫做方程组(I)的一个解，记为

$$\begin{cases} x=x_1, \\ y=y_1. \end{cases}$$

例如，方程组

$$\begin{cases}2x+3y=1, \\ 5x+4y=6\end{cases}$$

的一个解为

$$\begin{cases}x=2, \\ y=-1.\end{cases}$$

我们用加减消元法解方程组(I).

(1)$\times b_2-$(2)$\times b_1$，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1; \tag{3}$$

(2)$\times a_1-$(1)$\times a_2$，得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{4}$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，可以得出方程组(I)的唯一解，即

$$\begin{cases}x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\end{cases} \tag{5}$$

在公式(5)中，分母都是 $a_1b_2-a_2b_1$，并且只含有未知数的系数. 把未知数的系数按照它们在方程组中原来的位置排列成正方形，即

可以看出 $a_1b_2-a_2b_1$ 是这样两项的和：一项是正方形中实线表示的对角线(叫做主对角线)上两数的积，再添上正号；一项是正方形中虚线表示的对角线(叫做副对角线)上两数的

积，再添上负号．我们在这四个数的两旁各加一条竖线，引进符号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

并且规定它表示

$$a_1b_2-a_2b_1. \tag{7}$$

这时，符号(6)叫做**二阶行列式**，a_1, a_2, b_1, b_2 叫做行列式(6)的**元素**．这四个元素排成二行二列(横排叫行，竖排叫列)．例如 a_2 是位于第二行第一列上的元素，b_1 是位于第一行第二列上的元素．利用对角线把符号(6)表示的二阶行列式展开成(7)式，这种方法叫做二阶行列式展开的**对角线法则**．

例1 展开下列行列式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} 10 & -9 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} m+1 & m+2 \\ m & m+1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}$．

解： (1) $\begin{vmatrix} 10 & -9 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}=10\times7-(-3)\times(-9)=43$；

(2) $\begin{vmatrix} m+1 & m+2 \\ m & m+1 \end{vmatrix}=(m+1)^2-m(m+2)=1$；

(3) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}=-\sin^2x-\cos^2x=-1$．

例2 求证

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 \\ a_2 & kb_2 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

证明： 左边 $=a_1kb_2-a_2kb_1=k(a_1b_2-a_2b_1)$，

右边 $=k(a_1b_2-a_2b_1)$，

左边 = 右边，

所以

$$\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 \\ a_2 & kb_2 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

练　习

1. 计算：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 4 & 4\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

2. 展开下列行列式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix} 6a-b & 2b \\ 3a & b \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} m+1 & m \\ m-2 & m-1 \end{vmatrix}$.

7.2 二元线性方程组的解的行列式表示法

我们知道，二元线性方程组

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2, & (2) \end{cases}$$

在 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases} \qquad (3)$$

利用二阶行列式，可以把公式(3)中的分子写成行列式的形式，即

$$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

这样，当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，二元线性方程组(I)的解可以写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\[2ex] y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{cases} \tag{4}$$

为了简便起见，通常用 D 表示(4)式中作为分母的行列式，用 D_x, D_y 分别表示(4)式中作为分子的行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

行列式 D 是由方程组(I)中未知数 x, y 的系数组成的，叫做这个方程组的**系数行列式**. D 中第一列的元素 a_1，a_2(即 x 的系数)分别换成方程组(I)的常数项 c_1, c_2，就得到行列式 D_x；D 中第二列的元素 b_1，b_2(即 y 的系数)分别换成常数项 c_1，c_2，就得到行列式 D_y.

综上所述，可以得到下面的结论：**二元线性方程组(I)，当系数行列式 D 不等于零时，有唯一解**

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}. \end{cases} \tag{5}$$

其中 D_x, D_y 是把系数行列式 D 中第一列、第二列分别换成方程组(I)的常数项列而得出的两个二阶行列式.

例 1 利用行列式解方程组

$$\begin{cases} 2x+5y-12=0, \\ x-2y+3=0. \end{cases}$$

解: 将方程组写成一般形式:

$$\begin{cases} 2x+5y=12, \\ x-2y=-3. \end{cases}$$

计算行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-1\times 5=-9\neq 0,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=12\times(-2)-(-3)\times 5=-9,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-1\times 12=-18.$$

由此得

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-9}{-9}=1,$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-18}{-9}=2.$$

所以,方程组的唯一解是

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

例2 利用行列式解方程组

$$\begin{cases}11x-2y+5=0,\\3x+7y+24=0.\end{cases}$$

解： 将方程组写成一般形式：

$$\begin{cases}11x-2y=-5,\\3x+7y=-24.\end{cases}$$

计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}11 & -2\\3 & 7\end{vmatrix}=11\times7-3\times(-2)=83\neq0,$$

$$D_x=\begin{vmatrix}-5 & -2\\-24 & 7\end{vmatrix}=(-5)\times7-(-24)\times(-2)=-83,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}11 & -5\\3 & -24\end{vmatrix}=11\times(-24)-3\times(-5)=-249.$$

由此得

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-83}{83}=-1,$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-249}{83}=-3.$$

所以，方程组的唯一解是

$$\begin{cases}x=-1,\\y=-3.\end{cases}$$

例3 求当 m 为何值时，关于 x, y 的方程组

$$\begin{cases}mx+y=m+1,\\x+my=2m\end{cases}$$

有唯一解，并求出它的唯一解.

解： 计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1=(m+1)(m-1),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2m & m \end{vmatrix}=m(m+1)-2m=m(m-1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2m \end{vmatrix}=2m^2-(m+1)=(2m+1)(m-1).$$

当 $m\neq-1$ 且 $m\neq1$ 时，$D\neq0$，方程组有唯一解，它的解是

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{m(m-1)}{(m+1)(m-1)}=\dfrac{m}{m+1}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{(2m+1)(m-1)}{(m+1)(m-1)}=\dfrac{2m+1}{m+1}. \end{cases}$$

即当 $m\neq-1$ 且 $m\neq1$ 时，方程组有唯一解，它的唯一解是

$$\begin{cases} x=\dfrac{m}{m+1}, \\ y=\dfrac{2m+1}{m+1}. \end{cases}$$

注意：当二元线性方程组(I)的系数行列式 $D=0$ 时，方程组(I)或者无解，或者有无穷多解.

例如，在例 3 中当 $m=-1$ 时，$D=0$，方程组化为

$$\begin{cases} -x+y=0, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

显然这个方程组无解.

又如，在例 3 中当 $m=1$ 时，$D=0$，方程组化为

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x+y=2. \end{cases}$$

显然这个方程组有无穷多解.

练　习

1. 利用二阶行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases}7x-8y=10,\\6x-7y=11;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}14x-6y+1=0,\\3x+7y-6=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x-y=2,\\3x=11-2y;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}3(x-1)=y+5,\\5(y-1)=3(x+5).\end{cases}$

2. 求当 m 为何值时，下列关于 x,y 的方程组有唯一解：

(1) $\begin{cases}4x+y=m,\\mx+y=1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x+(m-1)y=1,\\(m-1)x+y=2.\end{cases}$

习题二十二

1. 计算：

(1) $\begin{vmatrix}3 & 5\\7 & 4\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}-5 & 4\\8 & 0\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}-2 & 7\\-5 & 8\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}2-\sqrt{3} & 1+\sqrt{2}\\1-\sqrt{2} & 2+\sqrt{3}\end{vmatrix}$.

2. 展开下列行列式，并化简：

(1) $\begin{vmatrix}x+1 & x\\2 & x+1\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\a-b & a+b\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & 2\sin 2x\\1 & 2\cos x\end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix}a-b & a^2-ab+b^2\\a+b & a^2+ab+b^2\end{vmatrix}$.

3. 求证：

(1) $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}ka & kb\\a & b\end{vmatrix}=0$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

4. 利用二阶行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 5x-y=4; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+4y=-3.4, \\ 6x-4y=5.2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 13x-7y-10=0, \\ 19x+15y-2=0; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} \dfrac{7}{x}+\dfrac{9}{y}=3, \\ \dfrac{17}{x}+\dfrac{7}{y}=5; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos\beta, \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin\beta. \end{cases}$

5. 不解方程组,判断下列方程组是不是有唯一解:

(1) $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 5x-2y=1; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 6x+9y=7, \\ 4x+6y=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x-3y=5, \\ 8x+6y=22; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 5x-15y=10, \\ 3x-9y=6. \end{cases}$

6. 求当 m 为何值时,下列关于 x,y 的方程组有唯一解:

(1) $\begin{cases} mx+y=-1, \\ 3mx-my=2m+3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-(m^2-5)y=-1, \\ (m+1)x-(m+1)^2y=1. \end{cases}$

7.3 三阶行列式

把九个数排成三行三列，在这九个数的两旁各加一条竖

线，如

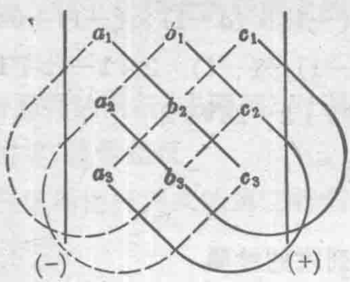
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

并且规定它表示

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2. \qquad (2)$$

这时，(1)式叫做**三阶行列式**. 三阶行列式有三行三列.

三阶行列式也可按对角线法则展开. 如图：



图中实线上三个元素的积，添上正号；虚线上三个元素的积，添上负号. 容易看出，三阶行列式就是这六项的和.

例 1 用对角线法则计算行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

解：
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$=3\times1\times(-2)+(-2)\times0\times1+2\times(-2)\times3$$
$$-2\times1\times1-(-2)\times(-2)\times(-2)-3\times0\times3$$

$$=-6+0-12-2+8-0=-12.$$

例 2 用对角线法则展开下列行列式,并化简:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 2 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \end{vmatrix}.$$

解: $\begin{vmatrix} a+1 & 2 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \end{vmatrix}$

$$=(a+1)a+(-1)\times(a-1)\times(-1)+0\times 2\times 2$$
$$-0\times a\times(-1)-(-1)\times 2\times 1-(a+1)(a-1)\times 2$$
$$=a^2+a+a-1+2-2a^2+2$$
$$=3+2a-a^2.$$

7.4 三阶行列式的性质

为了更好地掌握和运用行列式这一工具，简化行列式的计算,下面我们来学习行列式的一些性质.

定理 1 把行列式的各行变为相应的列，所得的行列式与原行列式相等,即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证明: 按对角线法则分别把上式两边的行列式展开.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2$$

$$-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2$$

$$-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

由定理 1 可知，对于行列式的行成立的定理对于列也一定成立;反过来也对.

定理 2 把行列式的两行(或两列)对调，所得行列式与原行列式绝对值相等,符号相反.

证明: 我们先证明把行列式的第二行与第三行对调时，结论成立,即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

用对角线法则展开上式两边的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2$$

$$-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1b_3c_2+a_3b_2c_1+a_2b_1c_3$$

$$-a_2b_3c_1-a_3b_1c_2-a_1b_2c_3$$