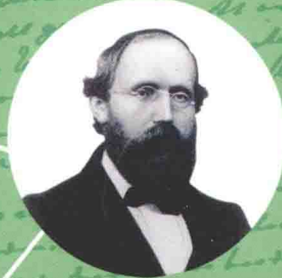
卢昌海
科普著作



黎曼猜想漫谈

一场攀登数学高峰的天才盛宴

卢昌海◎著

假如有一个魔鬼，
引诱数学家用自己的灵魂来换取一个定理的证明，
多数数学家想要换取的会是什么定理？
我想会是黎曼猜想。

——休·蒙哥马利

THE
RIEMANN
HYPOTHESIS

清華大學出版社

黎曼猜想漫谈

一场攀登数学高峰的天才盛宴

卢昌海◎著

THE
RIEMANN
HYPOTHESIS

清华大学出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

黎曼猜想漫谈：一场攀登数学高峰的天才盛宴/卢昌海著. --北京：清华大学出版社，2016

ISBN 978-7-302-44245-5

Ⅰ. ①黎…　Ⅱ. ①卢…　Ⅲ. ①黎曼猜测　Ⅳ. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 152395 号

责任编辑：胡洪涛
封面设计：蔡小波
责任校对：刘玉霞
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：148mm×210mm　**印张**：7.25　**插页**：1　**字　　数**：148 千字
版　　次：2016 年 9 月第 1 版　**印　　次**：2016 年 9 月第1 次印刷
印　　数：1～5000
定　　价：39.00 元

产品编号：070083-01

《黎曼猜想漫谈》读后感(代序)

王　元

一

随着公众数学水平的逐渐提高,越来越多的人知道黎曼(Riemann)猜想这个问题,我们将它记为RH。特别是RH曾被希尔伯特(Hilbert)列入他的二十三个问题的第八问题,现在又被列为克莱数学研究所提出的千禧年七大待解决难题之一,备受关注。不少人已经知道RH是数学中第一号重要问题。

但RH是个什么问题?为什么重要?至今似未见一篇有相当深度的普及文章来加以解释,常常需要参见数学专业著作与文献,才能得知一些。因此,一般人恐怕仅仅只知道有这么一个问题而已。

卢昌海在《数学文化》上的六期连载文章《黎曼猜想漫谈》,对RH相关问题作了详细的解释。文章中关于数学的阐述是严谨的,数学概念是清晰的。文字流畅,并间夹了一些流传的故事,以增加趣味性与可读性。

从这几方面来看，都是一篇很好的雅俗共赏的数学普及文章。

数学普及文章最要紧的是严谨性，有一些普及文章像在讲故事，不谈数学本身，从而读者在读完后，会觉得不知其所以然，一头雾水。

二

RH 发端于黎曼在 1859 年的一篇文章，其历史远比费马(Fermat)大定理(FLT)与哥德巴赫(Goldbach)猜想(GC)的历史短得多，而且不像这两个问题那样，只要有中小学数学知识的人，就知道其题意。

要了解 RH 的题意，则至少需要知道亚纯函数的含义。所谓黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)(s=\sigma+\mathrm{i}t)$ 是一个复变函数，它在右半平面 $\sigma>1$ 上由一个绝对收敛的级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(\sigma>1)$$

来定义。所以，$\zeta(s)$ 在 $\sigma>1$ 上是全纯的。它在左半平面 $\sigma\leqslant 1$ 上的情况如何呢？则需要将 $\zeta(s)$ 解析延拓至全平面，延拓后的 $\zeta(s)$ 是一个 s 平面上的亚纯函数，它只在 $s=1$ 处有一个残数为 1 的 1 阶根。$\zeta(s)$ 仅在左半平面 $s\leqslant 1$ 上有零点 $s=-2n(n=1,2,\cdots)$。这些零点称为 $\zeta(s)$ 的平凡零点，剩下的零点则位于狭带 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 之中，这些零点称为 $\zeta(s)$ 的非平凡零点。所谓 RH 是说：

> $\zeta(s)$ 的非平凡零点都位于直线 $\sigma=1/2$ 之上。

RH 与素数在自然数中的分布密切相关。我想一般关于 RH 的普及文章也就讲到这里了。

卢昌海的文章从这里讲起，他介绍了 $\zeta(s)$ 的开端，即欧拉(Euler)关于 $\zeta(s)$ 的工作，其中 s 为实变数，及高斯(Gauss)关于不超过 x 的素数个数 $\pi(x)$ 的猜想

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} = Li(x),$$

这是素数分布的中心问题。独立于高斯，勒让德(Legendre)也对$\pi(x)$作了猜想

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1.08366}。$$

由于 $Li(x) \sim \frac{x}{\log x - 1.08366} \sim \frac{x}{\log x}$，所以我们称

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

为“素数定理”。素数定理已由阿达马(Hadamard)与德·拉·瓦·布桑(de la Valee Poussin)于 1896 年独立地证明了。但人们期望有一个具有精密误差项的素数定理。可以证明用高斯的猜想公式比勒让德的猜想公式的误差项要精确得多。在 RH 之下，可以证明

$$\pi(x) = Li(x) + O(\sqrt{x}\log x)。$$

反之，由这个公式也可以推出 RH。所以，这个公式可以看作 RH 的算术等价形式。由此足见 RH 的极端重要性了。

然后，卢昌海的文章深入到了 $\zeta(s)$ 较近代的重要研究：其实，黎曼的文章中还包括了几个未经严格证明的命题。除了 RH 之外，都被阿达马与曼戈尔特(Mangoldt)证明了，只剩下现在所谓的 RH。

命 $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 在矩形 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1, 0 < t < T$ 中的零点个数，黎曼作了猜想

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}。$$

这个结果已由曼戈尔特证明。命 $N_0(T)$ 表示在线段 $\sigma = \frac{1}{2}, 0 < t < T$ 上，$\zeta(s)$ 的零点个数，则塞尔伯格(Selberg)证明了，存在正常数 c 与 T_0 使

$$N_0(T) > cN(T) \quad (T > T_0)。$$

这个结果是非常惊人的。它说明了 $\zeta(s)$ 在线段 $\sigma = \frac{1}{2}, 0 < t < T$ 上的零

点个数与它在矩形 $0\leqslant\sigma\leqslant1,0<t<T$ 上的零点个数相比，占有一个正密度，而线段的二维测度为零。卢昌海还介绍了往后数学家关于 c 的估计的重要工作：$c\geqslant\frac{1}{3}$（莱文森（Levinson））与 $c\geqslant\frac{2}{5}$（康瑞（Conrey））。

卢昌海用了相当多的篇幅介绍了 $\zeta(s)$ 的非平凡零点的计算方法与大量的计算结果。

这两方面的成果，大大加强了人们对 RH 正确性的可信度。

三

黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 与 RH 都是“原型”，有不少 $\zeta(s)$ 与 RH 的类似及推广。这些类似及推广都有强烈的数学背景。

卢昌海的文章中谈到了这个问题，即他所谓的 RH 的“山寨版”与“豪华版”。所谓山寨版，就是 RH 的某种类似，而豪华版则为 RH 的某种推广。无论是山寨版，还是豪华版，其数学背景都是极其重要的。

卢昌海介绍了有限域 F_q 上的平面代数曲线对应的 RH，即每一条满足一定条件的代数曲线都对应于一个 L 函数，它们的零点都位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。这一命题已由韦伊（Weil）证明，而且韦伊对于高维代数簇的 RH 也作了猜想。这个猜想已由德利涅（Deligne）证明。这些无疑都是 20 世纪最伟大的数学成就之一。据我所知韦伊与德利涅的结果对解析数论就有极大的推动。例如，由韦伊证明的 RH 可以推出模素数 p 的克卢斯特曼（Kloosterman）和与完整三角和的最佳阶估计

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(cx+d\bar{x})/p}\right|\leqslant2\sqrt{p}\quad(p\nmid cd,x\bar{x}\equiv1(\bmod p))$$

与

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(a_kx^k+\cdots+a_1x)/p}\right|\leqslant k\sqrt{p}\quad(p\nmid a_k)。$$

长期以来，对这两个问题都只能得到较弱的估计。又如命 $n(p)$ 表示模 p

的最小二次非剩余,则由韦伊的结果,布尔吉斯(Burgess)证明了

$$n(p)=O_\varepsilon(p^{\frac{1}{4\sqrt{e}}+\varepsilon}),$$

其中 $\varepsilon>0$ 为任意给予的正数。过去 $n(p)$ 的最佳阶为 $O_\varepsilon(p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}+\varepsilon})$。

由德利涅的结果可以推出拉马努金(Ramanujan)的一个著名猜想。

韦伊的 RH 的算术形式为代数曲线在 F_q 上的点数公式的误差为 $O(q^{1/2})$。这是最佳可能估计,称为"韦伊界"。

卢昌海介绍了所谓 RH 的豪华版,指的是狄利克雷(Dirichlet)L 函数对应的 RH 类似与戴德金(Dedekind)L 函数的 RH 类似。由于这两个 L 函数均以黎曼 ζ 函数为特例,所以它们对应的 RH 称为广义黎曼猜想,记为 GRH 或 ERH。

介绍狄利克雷 L 函数时,先需要引进所谓狄利克雷特征 $\chi(n) \bmod q$。级数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}\quad(s=\sigma+\mathrm{i}t,\sigma>1)$$

是绝对收敛的。它也可以解析延拓至 s 全平面。它是 s 平面上的亚纯函数。这就是模 q 的狄利克雷 L 函数 $L(s,\chi)$。所谓 GRH 就是

所有 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点都位于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上。

当 χ 为主特征时,$L(s,\chi)$ 本质上就是 $\zeta(s)$,它们仅相差一个仅依赖于 q 的常数倍数。

戴德金 L 函数是在一个代数数域 K 上定义的。这里就不详细讲了。当 $K=\mathbf{Q}$ 为有理数域时,戴德金 L 函数就是黎曼 ζ 函数。所谓 GRH 就是戴德金 L 函数的非平凡零点都位于 $\sigma=1/2$ 上。

与 RH 类似,由狄利克雷 L 函数的 GRH 可以推出:当 $(l,q)=1$ 时,令算术数列 $l+kq(k=0,1,2,\cdots)$ 中,不超过 x 的素数个数为 $\pi(x,q,l)$,则

$$\pi(x,q,l)=\frac{1}{\varphi(q)}Li(x)+O(\sqrt{x}\log x)$$

此处 $\varphi(q)$ 表示欧拉函数。当 $q=1$ 时，即 $\pi(x,1,1)=\pi(x)$。上式就是 RH。这是狄利克雷 L 函数的 GRH 之算术形式。

由戴德金 L 函数的 GRH 可以推出代数数域 K 中的有最佳误差主阶的素理想定理。这也是戴德金 L 函数的 GRH 的算术形式。当 $K=\mathbf{Q}$ 时，即为 RH。

但也不是关于 $\zeta(s)$ 的结果都对 $L(s,\chi)$ 有相应的结果。例如关于 $\zeta(s)$ 的无零点区域估计，对于二次特征 χ_2 对应的狄利克雷 L 函数 $L(s,\chi_2)$ 有无这样类似区域估计就不知道了。对此，西格尔(Siegel)关于 $L(s,\chi_2)$ 的非平凡实零点的估计在解析数论中就是非常重要的。

GRH 有极强的数学背景。下面就解析数论领域再举几个例子。

20 世纪最重要的解析数论成果之一是维诺格拉多夫(Vinogradov)证明的关于 GC 的“三素数定理”，即

> 每个充分大的奇数都是三个素数之和。

其实，这个结果最早已由哈代(Hardy)与利特尔伍德(Littlewood)在狄利克雷 L 函数的 GRH 之下证明了。维诺格拉多夫的工作就是发展了以素数为变数的指数和估计方法，从而取消了三素数定理证明中的 GRH。

中国数学家的著名结果之一是关于 GC 的所谓“陈氏定理”，即

> 每个充分大的偶数都是一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和。

其实，早于陈景润，中国在这方面已研究了十多年，总是先假定了狄利克雷 L 函数的 GRH，做出关于 GC 的结果，然后再设法取消证明中的 GRH。

再以 $n(p)$ 的估计为例。在狄利克雷 L 函数的 GRH 之下有估计

$$n(p)=O(\log^2 p),$$

这就比山寨版的 RH 的推论强得太多了。

四

卢昌海文章中用了很大篇幅谈到研究 RH 的尚未成功的(即未得到确定结果的)一些想法与尝试。

卢昌海文章中亦用了很大篇幅谈了一些关于 RH 的美丽的传说。这些传说,我本人也听过一点。例如韦伊在中科院访问作的第一次报告就是讲他的山寨版 RH。报告一开始,他就说:“曾经希望证明 RH,但不发表,待 RH 提出一百年时再发表,现在只能希望在 RH 提出二百年时,再见到它的证明了。”塞尔伯格在访问中科院时的一次宴会上说:“FLT 与 GC 本身都没有什么用。”我说:“研究它们带动了一些新方法的产生。”他说:“那是。”这个观点在卢昌海的文章中也提到了。

这些传说都是非常美丽的,人们津津乐道。

五

卢昌海的文章还有以下优点:在讲到一些重大结果时,作者对这些结果的重要前期成就都作了介绍。例如素数定理,塞尔伯格关于 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上的零点个数估计,及韦伊关于山寨版 RH 的证明等。又为了讲清楚文章中涉及的一些概念,作者还举例子加以说明。例如在解释戴德金 L 函数时,涉及“理想”这个概念,作者以有理数域 $\mathbf{Q}$ 与二次域作为例子来说明,所以是深入浅出的。我认为数学系本科高年级学生是可以看懂这篇文章所讲的问题、结果与数学概念的含义的。对于专职数学家

与教师，甚至数论学家，也值得阅读。我想他们对于 RH 的了解基本上是在学习与研究数学的过程中，零星的逐渐积累得到的。如果有机会系统地了解一下 RH，也会很有好处。因此我愿意向大家推荐卢昌海的文章。

我还想谈一点意见：仅从题意表面来看，RH 只是研究一个特殊的亚纯函数 $\zeta(s)$ 的零点性质。从亚纯函数的理论来看，只是一个例子而已。就像研究 FLT 与 GC 一样，研究它们的目的主要在于发展数学中的新思想与新方法。形象地说，这两个问题都是数学中"下金蛋的母鸡"。

从过去的研究来看，RH 当然是数学中下金蛋的母鸡，但研究它的目的，远远不止此。它之所以成为数学中第一重要问题，主要是由于一系列的数学中的重大问题的解决都依赖于各种 RH 的解决。一旦这些 RH 解决了，人类就站在一个不知比现在高多少的数学平台上，看到更远得多的风景。

到底各种 RH 可以推出多少数学结果？要求弄清楚这么多东西恐怕是太难了。如果卢昌海这篇文章还要继续写下去，也许可以考虑写各种 RH 的推广。这会使读者更能了解到解决各种 RH 的巨大意义。

最后，我愿借此机会祝卢昌海文章成功，并盼望见到它能够成书出版，使更多读者能读到，并从中受益。

目　录

1　哈代的明信片　//1

2　黎曼 ζ 函数与黎曼猜想　//4

3　素数的分布　//7

4　黎曼的论文——基本思路　//14

5　黎曼的论文——零点分布与素数分布　//20

6　错钓的大鱼　//30

7　从零点分布到素数定理　//35

8　零点在哪里　//39

9　黎曼的手稿　//43

10　探求天书　//47

11　黎曼-西格尔公式　//51

12　休闲课题：围捕零点　//55

13　从纸笔到机器　//61

14　最昂贵的葡萄酒　//65

15　更高、更快、更强　//69

16　零点的统计关联　//73

17 茶室邂逅 //79
18 随机矩阵理论 //84
19 蒙哥马利-欧德里兹科定律 //90
20 希尔伯特-波利亚猜想 //93
21 黎曼体系何处觅 //96
22 玻尔-兰道定理 //101
23 哈代定理 //108
24 哈代-利特尔伍德定理 //113
25 数学世界的“独行侠” //117
26 临界线定理 //121
27 莱文森方法 //125
28 艰难推进 //129
29 哪里没有零点 //133
30 监狱来信 //135
31 与死神赛跑的数学家 //139
32 从模算术到有限域 //145
33 “山寨版”黎曼猜想 //152
34 “豪华版”黎曼猜想 //159
35 未竟的探索 //173

附录 A 欧拉乘积公式 //189
附录 B 超越 ZetaGrid //193

附录C　黎曼猜想大事记　//197

人名索引　//201
术语索引　//204
参考文献　//209
初版后记　//213

1 哈代的明信片

让我们从一则小故事开始我们的黎曼猜想(Riemann hypothesis)漫谈吧。[①] 故事大约发生在20世纪30年代,当时英国有位很著名的数学家叫做哈代(Godfrey Hardy,1877—1947),他不仅著名,而且在我看来还是两百年来英国数学界的一位勇者。为什么这么说呢? 因为在17世纪的时候,英国数学家与欧洲大陆的数学家之间发生了一场激烈的论战。论战的主题是谁先发明了微积分。论战所涉及的核心人物一边是英国的科学泰斗牛顿(Isaac Newton,1642—1727),另一边则是欧洲大陆(德国)的哲学及数学家莱布尼茨(Gottfried Leibniz,1646—1716)。这场论战打下来,两边筋疲力尽自不待言,还大伤了和气,留下了旷日持久的后遗症。自那以后,许多英国数学家开始排斥起来自欧洲大陆的数学进展。一场争论演变到这样的一个地步,英国数学界的集体荣誉及尊严、牛顿的赫赫威名便都成了负资产,英国的数学在保守的舞步中走起了下坡路。

这下坡路一走便是两百年。

在这样的一个背景下,在复数理论还被一些英国数学家视为来自欧洲大陆的危险概念的时候,土生土长的英国数学家哈代却对来自欧洲大陆(而且偏偏还是德国)、有着复变函数色彩的数学猜想——黎曼猜想——产生了浓厚兴趣,积极地研究它,并且——如我

---

① 这则故事来自与哈代相识的匈牙利数学家波利亚(George Pólya,1887—1985)。

们将在后文中介绍的——取得了令欧洲大陆数学界为之震动的成就，算得上是勇者所为。

当时哈代在丹麦有一位很要好的数学家朋友叫做玻尔(Harald Bohr，1887—1951)，他是著名量子物理学家玻尔(Niels Bohr，1885—1962)的弟弟。玻尔对黎曼猜想也有浓厚的兴趣，曾与德国数学家兰道(Edmund Landau，1877—1938)一起研究黎曼猜想(他们的研究成果也将在后文中加以介绍)。哈代很喜欢与玻尔共度暑假，一起讨论黎曼猜想。他们对讨论都很投入，哈代常常要待到假期将尽才匆匆赶回英国。结果有一次当他赶到码头时，很不幸地发现只剩下一条小船可以乘坐了。从丹麦到英国要跨越宽达几百公里的北海(North Sea)，在那样的汪洋大海中乘坐小船可不是闹着玩的事情，弄得好算是浪漫刺激，弄不好就得葬身鱼腹。为了旅途的平安，信奉上帝的乘客们大都忙着祈求上帝的保佑。哈代却是一个坚决不信上帝的人，不仅不信，有一年他还把向大众证明上帝不存在列入自己的年度六大心愿之中，且排名第三(排名第一的是证明黎曼猜想)。不过在面临生死攸关的旅程之时哈代也没闲着，他给玻尔发去了一张简短的明信片，上面只有一句话：

“我已经证明了黎曼猜想。”

哈代果真已经证明了黎曼猜想吗？当然不是。那他为什么要发那样一张明信片呢？回到英国后他向玻尔解释了原因，他说如果那次他乘坐的小船真的沉没了，那人们就只好相信他真的证明了黎曼

猜想。但他知道上帝是肯定不会把这么巨大的荣誉送给他——一个坚决不信上帝的人——的，因此上帝是一定不会让他的小船沉没的。①

上帝果然没舍得让哈代的小船沉没。自那以后又过了大半个世纪，吝啬的上帝依然没有物色到一个可以承受这么大荣誉的人。

① 哈代的这个解释让我想起了一句有趣的无神论者的祈祷语：上帝啊，如果你存在的话，拯救我的灵魂吧，如果我有灵魂的话(God, if there is one, save my soul if I have one)。