普通高等教育“十二五”规划教材

新时期大学数学信息化精品教材丛书

● 丛书主编　龙爱芳　张军好

微积分学习辅导与习题全解

张军好　龙爱芳　余启港　主编

A(0.1)

CALCULUS

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

新时期大学数学信息化精品教材丛书

丛书主编　龙爱芳　张军好

微积分学习辅导与习题全解

张军好　龙爱芳　余启港　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为《微积分》配套使用的学习辅导书，它是按新时期大学数学教学大纲及考研大纲要求编写而成.内容丰富、理论结构严谨、解题思路清晰、例题典型、方法性强.注重分析解题思路与规律，并与考研数学的题型及方法紧密结合，对提高初学者学习微积分的效果及考研同学的考研成绩一定会起到较大作用.本书的内容按章编写，与教材完全同步.全书共分9章，内容涵盖了函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程.

本书可以作为高等院校经济类、管理类等专业学生的"微积分"或"高等数学"教学辅导书，也可作为其他专业的学生、自学者的阅读参考书，更适合作为考研同学的复习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导与习题全解/张军好，龙爱芳，余启港主编. 一北京：科学出版社，2016.9

新时期大学数学信息化精品教材丛书/龙爱芳，张军好主编

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-049869-4

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①张… ②龙… ③余… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第212384号

责任编辑：吉正霞 王 晶/责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超/封面设计：蓝 正

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：B5（720×1000）
2016年9月第 一 版 印张：25 3/4
2016年9月第一次印刷 字数：516 600

定价：46.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《微积分学习辅导与习题全解》

编委会

主　编　张军好　龙爱芳　余启港

副主编　（按姓氏笔画排序）

万　杭　孔跃东　宁　娣　安　智　孙仁斌

李学锋　李浩光　杨占英　何　毅　佘　纬

张国东　罗艾花　周　静　胡军浩　胡国香

俞诗秋　夏永波　殷红燕　蔡明建

前　言

当下，我国的高等教育已经走向了大众化的教育，社会各界对高等教育的质量十分关注. 我们编写这本配套教辅书，主要是为了适应这种新时期大学数学教育的新要求，一方面满足广大学生学习微积分课程的需要，期望对保证和提高微积分课程的教学质量，对广大学生掌握微积分基本思想与方法起到辅导作用；另一方面，也为了满足不同层次的学生的学习需要，利用辅导教材这种形式，对教材的内容与方法作出适当总结、延伸与扩展，对大学生继续深造给予帮助，同时对新时期的大学教育如何培养具有创新精神的优秀人才作出有益的探讨.

按照配套辅导教材的编写要求，本书的内容按章编写，与教材同步. 每章包含本章知识结构图、考研大纲要求、本章的内容概述与典型例题方法、考研真题解析、教材课后习题详解、目标自测题与答案共六个部分，最后在附录中给出了两套综合测试题. 基本结构如下.

本章的知识结构图：对该章主要内容作一个结构图表，使读者对该章重点内容的关系结构一目了然.

教学与考研大纲要求：结合教育部最新颁发的研究生入学考试的大纲要求对本章教学内容按"了解"、"理解"与"掌握"三个层次进行了分类编注，使读者对考研数学的测试要求做到一目了然，成竹在胸.

章节内容概述与典型例题方法：该部分包含本节的知识结构图、重点内容概述、典型的例题与方法三方面的内容. 它对本章的内容与方法进行了归纳总结，将基本的理论、基本的方法、解题技巧等多方面的内容融于范例之中. 这些典型例题注重分析解题思想，揭示解题规律，引导读者如何思考问题，对培养读者理性思维及分析问题和解决问题的能力大有帮助.

考研真题解析：考研真题解析部分主要将近十六年来全国硕士研究生入学考试数学三试题中高等数学部分进行了归纳与整理，对典型的测试类型进行了详细的剖析，并指出了经常测试的类型的大致演变方向，使同学们对考研题目有一个清楚的认识，把握学习的方向，这对提高考研数学成绩大有益处.

教材课后习题详解：该部分是对教材节后练习与章后练习题作出详细的解答，以便同学们在学习过程中对自己的解题答案与过程进行对照比较，从中找出自己

的不足之处，达到对问题的更深刻和更透彻地理解.

目标自测题与答案：该部分是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的，目的是给读者提供更深入的练习机会，让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力. 并在最后精心设计了两套综合测试题，以检验学生的整体学习效果.

本书体现了例题种类详细、知识点的结构层次清楚、内容充实、方法性强以及与考研题型联系紧密的特点.

本书由张军好、龙爱芳、余启港任主编，胡军浩、夏永波、孙仁斌、俞诗秋、安智、蔡明建、胡国香、宁娣、万杭、佘纬、李学锋、殷红燕、罗艾花、杨占英、周静、李浩光、孔跃东、张国东、何毅任副主编. 全书由张军好统筹定稿. 数学与统计学学院的段汕教授、胡军浩教授、欧阳露莎副教授及彭超权副教授认真审阅了全书，提出了宝贵意见.

本书在编写过程中参考了众多国内教学辅导书及考研辅导书，本书的出版得到了科学出版社的领导和同志们的大力支持，同时也得到了中南民族大学教务处、数学与统计学学院的支持与帮助，在此一并致谢!

尽管我们的想法很多，大家也都鞠躬尽瘁，但限于我们的学识与经验，书中难免有不妥之处，恳请各位同行、读者批评指正.

编　　者

2016 年 6 月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续 …… 1
第一部分 本章知识结构图 …… 1
第二部分 教学与考研大纲要求 …… 1
第三部分 章节内容概述、典型题型与方法 …… 2
第 1 节 初等函数 …… 2
第 2 节 数列的极限 …… 3
第 3 节 函数的极限 …… 5
第 4 节 无穷大与无穷小 …… 6
第 5 节 极限运算法则 …… 9
第 6 节 极限存在的准则 两个重要极限 …… 12
第 7 节 无穷小的比较 …… 13
第 8 节 函数的连续性与间断点 …… 15
第 9 节 连续函数的运算与初等函数的连续性 …… 18
第 10 节 闭区间上连续函数的性质 …… 19
第 11 节 经济学中的常用函数 …… 21
第四部分 考研真题解析 …… 21
第五部分 教材课后习题详解 …… 27
第六部分 目标自测题与答案 …… 47
目标自测题 …… 47
参考答案 …… 48
第 2 章 导数与微分 …… 51
第一部分 本章知识结构图 …… 51
第二部分 教学与考研大纲要求 …… 51
第三部分 章节内容概述、典型题型与方法 …… 52
第 1 节 导数的概念 …… 52
第 2 节 导数的运算法则 …… 54
第 3 节 高阶导数 …… 55
第 4 节 隐函数与参数方程的导数 …… 57

第 5 节 函数的微分 …… 60
第 6 节 边际与弹性 …… 62
第四部分 考研真题解析 …… 64
第五部分 教材课后习题详解 …… 70
第六部分 目标自测题与答案 …… 89
目标自测题 …… 89
参考答案 …… 91
第 3 章 微分中值定理与导数应用 …… 93
第一部分 本章知识结构图 …… 93
第二部分 教学与考研大纲要求 …… 93
第三部分 章节内容概述、典型题型与方法 …… 94
第 1 节 微分中值定理 …… 94
第 2 节 洛必达法则 …… 96
第 3 节 泰勒公式 …… 98
第 4 节 函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 101
第 5 节 函数的极值和最大(小)值 …… 103
第 6 节 函数图形的描绘 …… 105
第四部分 考研真题解析 …… 106
第五部分 教材课后习题详解 …… 117
第六部分 目标自测题与答案 …… 141
目标自测题 …… 141
参考答案 …… 142
第 4 章 不定积分 …… 146
第一部分 本章知识结构图 …… 146
第二部分 教学与考研大纲要求 …… 146
第三部分 章节内容概述、典型题型与方法 …… 146
第 1 节 不定积分的概念与性质 …… 146
第 2 节 换元积分法 …… 149
第 3 节 分部积分法 …… 152
第 4 节 有理函数的积分 …… 154
第四部分 考研真题解析 …… 157
第五部分 教材课后习题详解 …… 159

第六部分 目标自测题与答案…… 175
目标自测题…… 175
参考答案…… 176
第5章 定积分…… 179
第一部分 本章知识结构图…… 179
第二部分 教学与考研大纲要求…… 179
第三部分 章节内容概述、典型题型与方法 …… 180
第1节 定积分的概念…… 180
第2节 定积分的性质…… 181
第3节 微积分基本公式…… 183
第4节 定积分的换元积分法…… 186
第5节 定积分的分部积分法…… 188
第6节 反常积分与Γ函数 …… 190
第7节 定积分的几何应用…… 193
第8节 定积分在经济分析中的应用…… 197
第四部分 考研真题解析…… 199
第五部分 教材课后习题详解…… 209
第六部分 目标自测题与答案…… 230
目标自测题…… 230
参考答案…… 232
第6章 多元函数微分学…… 234
第一部分 本章知识结构图…… 234
第二部分 教学与考研大纲要求…… 235
第三部分 章节内容概述、典型题型与方法 …… 235
第1节 空间解析几何知识简介…… 235
第2节 多元函数的基本概念…… 237
第3节 偏导数…… 240
第4节 全微分…… 242
第5节 多元复合函数与隐函数的微分法…… 244
第6节 多元函数的极值和最值…… 247
第四部分 考研真题解析…… 250
第五部分 教材课后习题详解…… 258

第六部分　目标自测题与答案……………………………………………… 278
目标自测题……………………………………………………………… 278
参考答案………………………………………………………………… 280
第7章　二重积分……………………………………………………… 282
第一部分　本章知识结构图………………………………………………… 282
第二部分　教学与考研大纲要求…………………………………………… 282
第三部分　章节内容概述、典型题型与方法 ……………………………… 282
第1节　二重积分的概念与性质………………………………………… 282
第2节　在直角坐标系下计算二重积分………………………………… 285
第3节　在极坐标系下计算二重积分…………………………………… 288
第四部分　考研真题解析…………………………………………………… 291
第五部分　教材课后习题详解……………………………………………… 293
第六部分　目标自测题与答案……………………………………………… 304
目标自测题……………………………………………………………… 304
参考答案………………………………………………………………… 305
第8章　无穷级数……………………………………………………… 307
第一部分　本章知识结构图………………………………………………… 307
第二部分　教学与考研大纲要求…………………………………………… 308
第三部分　章节内容概述、典型题型与方法 ……………………………… 308
第1节　常数项级数的概念及性质……………………………………… 308
第2节　正项级数………………………………………………………… 311
第3节　任意项级数的绝对收敛与条件收敛…………………………… 313
第4节　泰勒级数与幂级数……………………………………………… 315
第5节　函数展开成幂级数及其应用…………………………………… 317
第四部分　考研真题解析…………………………………………………… 319
第五部分　教材课后习题详解……………………………………………… 327
第六部分　目标自测题与答案……………………………………………… 344
目标自测题……………………………………………………………… 344
参考答案………………………………………………………………… 345
第9章　微分方程……………………………………………………… 348
第一部分　本章知识结构图………………………………………………… 348
第二部分　教学与考研大纲要求…………………………………………… 348

第三部分　章节内容概述、典型题型与方法 …… 349
第1节　微分方程的基本概念 …… 349
第2节　一阶微分方程 …… 350
第3节　可降阶的二阶微分方程 …… 354
第4节　二阶线性微分方程解的结构 …… 355
第5节　二阶常系数线性微分方程的求解 …… 358
第6节　差分方程初步 …… 361
第四部分　考研真题解析 …… 363
第五部分　教材课后练习详解 …… 372
第六部分　目标自测题与答案 …… 386
目标自测题 …… 386
参考答案 …… 387
参考文献 …… 390
附录 …… 391
附录A　《微积分》1～4章综合测试题 …… 391
《微积分》1～4章综合测试题参考答案 …… 393
附录B　《微积分》5～9章综合测试题 …… 395
《微积分》5～9章综合测试题参考答案 …… 397

第 1 章　函数、极限与连续

第一部分　本章知识结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的定义及初等函数和分段函数，反函数和复合函数
    - 函数的性质：有界性、单调性、奇偶性和周期性
  - 极限
    - 极限的定义
      - 数列极限的 ε-N 定义
      - 函数极限的 ε-δ 定义
    - 极限的性质
      - 数列极限的存在唯一性、有界性、局部保号性
      - 函数极限的存在唯一性、有界性、局部保号性
    - 极限的计算方法
      - 四则运算法则、复合函数的运算法则
      - 极限存在的两个准则
      - 洛必达法则、泰勒公式
      - 两个重要极限、等价无穷小量代换
    - 无穷小量与无穷大量
      - 无穷小量与无穷大量的定义与关系
      - 无穷小量的性质
      - 无穷小量阶的比较
  - 连续
    - 连续的定义
    - 连续函数的性质：最大最小值定理、有界性定理和介值定理
    - 间断点的分类
      - 第一类间断点
        - 可去间断点
        - 跳跃间断点
      - 第二类间断点（无穷与振荡间断点）

图 1-1　第 1 章知识结构图

第二部分　教学与考研大纲要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.
2. 掌握函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右

极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及极限四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用两个重要极限求极限.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质求解问题.

第三部分　章节内容概述、典型题型与方法

第1节　初 等 函 数

一、本节知识结构图

$$\text{函数}\begin{cases}\text{函数的定义域和值域}\\ \text{初等函数和分段函数,反函数和复合函数}\\ \text{函数的四大性质:有界性、单调性、周期性和奇偶性}\end{cases}$$

图 1-2　第 1 节知识结构图

二、重点内容概述

1. 有界性: 函数 $f(x)$ 在 I 上有界 $\Leftrightarrow$ 存在一个正常数 M,使得对任意 $x \in I$,都有 $|f(x)| \leqslant M$. 函数 $f(x)$ 在 I 上无界 $\Leftrightarrow$ 对任意正常数 M,均存在一个 $x_0 \in I$,使得 $|f(x_0)| > M$.

2. 单调性: $f(x)$ 在 I 上单调增加 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x)$ 在 I 上单调减少 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$.

3. 奇偶性: 设 $f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称,若对任意的 $x \in D$,都有

$$f(-x) = -f(x)\,(f(-x) = f(x)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是奇(偶)函数.

4. 周期性: 设 $f(x)$ 的定义域为 I,如果存在数 $T > 0$,使任意 $x \in I$, $x + T \in I$,都有 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

三、典型例题、方法与技巧

例 1　设 $f:R \to R$ 单调增加, f^{-1} 为其反函数, x_1 是 $f(x)+x=a$ 的根, x_2 是 $f^{-1}(x)+x=a$ 的根,试求 x_1+x_2.

解: 由 $f(x_1)+x_1=a$ 知, $f(x_1)+f^{-1}[f(x_1)]=a$,表明 $f(x_1)$ 是方程 $f^{-1}(x)$

$+x=a$ 的根. 由于 f 是单调递增的,故 f^{-1} 也是单调递增的,因为 $f^{-1}(x)+x$ 是单调递增的,方程 $f^{-1}(x)+x=a$ 有根必唯一,故 $f(x_1)=x_2$,因而

$$x_1+x_2=x_1+f(x_1)=a$$

注　例 1 用到结论:单调的函数必有反函数,且 f 与 f^{-1} 有相同的单调性.

例 2　若 $f(x)$ 是 $(-l,l)$ 上的奇函数,并且有反函数 $f^{-1}(x)$,则 $f^{-1}(x)$ 也是奇函数.

证:由于 $f[f^{-1}(-x)]=-x$,则

$$x=-f[f^{-1}(-x)]=f[-f^{-1}(-x)]$$

于是　$f^{-1}(x)=-f^{-1}(-x)$,即 $f^{-1}(-x)=-f^{-1}(x)$,因而 $f^{-1}(x)$ 是奇函数.

例 3　设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,$f(1)=a$,$f(x+2)-f(x)=f(2)$,$\forall x\in\mathbf{R}$.

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 和 $f(5)$;

(2) a 为何值时,$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解:(1) 由于 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$,且 $f(x)$ 为奇函数,则有 $f(-1+2)-f(-1)=f(2)$,即 $f(2)=2f(1)=2a$;

同时有 $f(1+2)-f(1)=f(2)$,即 $f(3)=f(1)+f(2)=3a$. 再由 $f(2+3)-f(3)=f(2)$ 得,$f(5)=f(3)+f(2)=3a+2a=5a$.

(2) 由于 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$,即 $f(x+2)=f(x)+2a$,要使 $f(x)$ 以 2 为周期,即 $f(x+2)=f(x)$,则必须 $a=0$.

第 2 节　数列的极限

一、本节知识结构图

$$\text{数列极限}\begin{cases}\text{定义}(\varepsilon\text{-}N\text{ 定义})\\ \text{性质}\begin{cases}\text{存在唯一性}\\ \text{有界性}\\ \text{局部保号性}\end{cases}\end{cases}$$

图 1-3　第 2 节知识结构图

二、重点内容概述

1. 深刻理解数列极限的 ε-N 定义.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N$,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立. 关于以上定义,有几点要加以说明.

(1) ε 的任意性:ε 衡量 x_n 与 a 的接近程度,ε 越小表示接近程度越好,它除了是正数以外,不受任何限制,这说明 x_n 与 a 可以接近到任何程度,然而,尽管它是任意的,一旦给出,就可暂时看成是固定不变的,以便用它来求 N. 再者,ε 既然可选任

意正数,那么 2ε,3ε 或 ε^2 也是任何正数,因此,定义中不等式右边的 ε 可用 2ε,3ε 或 ε^2 来代替.

(2) N 的相应性:一般来说,N 随 ε 的减小而变大,所以将 N 写成 $N(\varepsilon)$ 来强调 N 是依赖于 ε 的,但这种写法并不是说 N 是由 ε 唯一确定的,因此相对于任意 ε,若 $N=100$ 时满足要求,则 $N=101,102,\cdots$ 更能满足要求,其实 N 等于多少没关系,主要是它的存在性,只要存在一个 N,则大于 N 的任何一个正整数都能满足要求.

(3) 定义中的"当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立"这句话意思是凡下标大于 N 的所有 x_n 满足 $|x_n-a|<\varepsilon$,从几何上讲就是凡下标大于 N 的所有 x_n 都落在 a 的 ε 邻域内,而在这个邻域外,至多有 N 项,或者说收敛于 a 的数列 $\{x_n\}$ 在 a 的任何邻域内含有 $\{x_n\}$ 的几乎全体的项. 因而改变或增加或去掉数列有限项,不会改变数列的收敛或发散性.

(4) 极限定义未给出求极限的方法,只能验证某数是它的极限.

2. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 是本节的难点,而在说明 N 的存在性,通常采用放大的方法.

3. 数列的有界性说明若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 为有界数列,反之不成立,例如 $\{(-1)^n\}$ 有界但不收敛.

4. $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 均收敛于相同的极限.

三、典型例题·方法与技巧

例 1 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

证: $\forall\varepsilon>0$,因

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

故要使 $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$,只需 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$,故 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

例 2 判断数列 $x_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$ 是否收敛.

解: 对于数列有如下结论:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow \text{任意子列}\{x_{n_k}\}\text{均收敛于}a$$

故若有两个子列的极限存在但不相等,则 $\{x_n\}$ 必发散,由此结论可知,

取 $n = 4k+1$，则子列

$$x_{4k+1} = \cos\frac{4k+1}{2}\pi = 0 \to 0$$

取 $n = 4k+2$，则子列

$$x_{4k+2} = \cos\frac{4k+2}{2}\pi = -1 \to -1$$

因 $0 \neq -1$，故数列 $x_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ 发散.

第 3 节　函数的极限

一、本节知识结构图

- 函数的极限
  - 函数极限的定义
    - 自变量趋于有限值
    - 自变量趋于无穷
  - 函数极限的性质
    - 存在唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
  - 函数极限与数列极限的关系

图 1-4　第 3 节知识结构图

二、重点内容概述

1. 理解函数极限的定义并会应用定义验证某个有限数列在自变量某种趋势下的极限，若把数列 $\{x_n\}$ 看成是自变量 n 的函数，即 $x_n = f(n)$，则数列极限就是一种特殊函数的极限，因而函数极限的证明方法与数列极限类似.

2. 函数极限有如下两个结论：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

以上两个结论可用来求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，同时也可用来判定 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在.

3. 函数极限有如下性质，与数列极限的性质相对应，又略有不同. 下面以对自变量的其中一种趋近方式加以说明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(1) 存在唯一性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限唯一；

(2) 局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $\exists\,\delta > 0$，当 $x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x)$ 有界

（数列的有界性是 $\forall n \in \mathbf{N}$，有 x_n 有界）；

(3) 局部保号性：若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 的极限为 A，且 $A > 0$ $(A < 0)$，则 $\exists \delta > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，$f(x) > 0 (< 0)$.

三、典型例题、方法与技巧

例 1 用 ε-δ 语言证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$.

证：$\forall \varepsilon > 0$，当 $|x-1| < \dfrac{1}{8}$，即 $\dfrac{7}{8} < x < \dfrac{9}{8}$ 时，

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right| < \frac{8}{7}|x-1|$$

故要使 $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon$，只需 $\dfrac{8}{7}|x-1| < \varepsilon$，即 $|x-1| < \dfrac{7}{8}\varepsilon$，故

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \min\left\{\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\varepsilon\right\} > 0$$

当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon$，即

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

例 2 证明函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ 当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

证：由于

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1$$

$-1 \neq 1$，则 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

第 4 节　无穷大与无穷小

一、本节知识结构图

$$\text{无穷小与无穷大}\begin{cases} \text{无穷小}\begin{cases} \text{无穷小的定义} \\ \text{无穷小的性质} \end{cases} \\ \text{无穷大}\begin{cases} \text{无穷大的定义} \\ \text{无穷大的性质} \end{cases} \end{cases}$$

图 1-5　第 4 节知识结构图