



普通高等教育“十三五”规划教材

工科数学精品丛书

丛书主编 蔡光兴 李子强

# 线性代数 (第四版)

蔡光兴 李逢高 主编



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

工科数学精品丛书

丛书主编 蔡光兴 李子强

# 线性代数

(第四版)

蔡光兴 李逢高 主编

科学出版社

北京

# 版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

## 内 容 简 介

本书根据《高等工科院校线性代数课程教学基本要求》,并结合 21 世纪线性代数课程教学内容与课程体系改革发展要求编写而成. 全书分三篇:第一篇是基础篇,主要介绍了线性代数教学基本内容;第二篇是应用篇,结合线性代数四个知识面通过生动的实例介绍了它们在经济、工程技术等方面的应用;第三篇是实验篇,简要介绍 MATLAB 软件及其在线性代数中的应用. 本书在第一、三两篇每章后配有习题与自测题,书末附有习题参考答案.

本书内容充实、体系新颖、选例灵活,可作为高等院校工科、理科和经济管理专业的教材,也可作为信息与计算科学专业的教材,对报考硕士研究生的学生以及广大教师与科技人员,也具有较高参考价值.

### 图书在版编目(CIP)数据

线性代数/蔡光兴,李逢高主编. —4 版. —北京:科学出版社,2016. 6

(工科数学精品丛书)

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-049277-7

I. ①线… II. ①蔡… ②李… III. ①线性代数—高等学校—教材  
IV. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 150016 号

责任编辑:王雨舸 / 责任校对:董艳辉

责任印制:彭超 / 封面设计:蓝正

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

开本: B5(720×1000)

2016 年 6 月第 四 版 印张: 19

2016 年 6 月第一次印刷 字数: 380 000

定价: 42. 80 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

## “工科数学精品丛书”序

工科学生毕业多年后时常感言,数学知识很多似乎没有派上用处,但数学训练、数学思想和精神,却无时无刻不在发挥着积极的作用,成为取得成功的最重要因素之一。

数学是一门高度抽象的学科,但是它非人类精神纯粹自由创造和想象,而是源于自然和工程问题.系统传授数学知识当然是工科数学教学的基本任务与责任,同时,掌握了数学的思想方法和精神实质,就可以由不多的几个公式演绎出千变万化的生动结论,显示出无穷无尽的威力.工科数学创新教学,增强数学应用背景的讲授,拓宽学生的知识面,使其了解数学学科在科学研究领域的重要性,为学生打开数学应用的窗口等,能培养学生的创新意识与精神,提高数学思维与素养,真正达到工科数学教学的目的。

工科数学精品教材的编写与成熟,在开放的视野与背景下,得到认同,自然成为纸质教材与数字出版的精品,从而得到广泛认可和使用。

在学会、领导和专家的关怀和指导下,本区域若干所全军重点、一本和省重点高校,其工科数学教材,在科学出版社出版和再版.十余年以来,教学和教材理念从素质教育,到分类分层教学改革,到数学思想、方法与创新教育,历经各校几届领导和责任教授的共同努力,逐渐成熟,成为具有较高质量的核心精品。

教材转型与数字出版方兴未艾,大趋势赫然在前,教材又重新经历新的考验。“工科数学精品丛书”正是按此理念和要求,直面开放的视野与背景,将改革与创新的成果汇集起来,重新审视和操作,精益求精,以赢得内容先机,修订版和新编教材均是如此。

修订和新编的核心理念,一是体现数学思维,将数学思想和方法(如数学建模)融入教材体系、内容及其应用;二是深化改革与创新,面向开放和数字出版的大平台,赢得内容先机,营造精品。

“工科数学精品丛书”为工科数学课程教材,包括:高等数学、线性代数、概率论与数理统计、数学建模、数学实验、复变函数与积分变换、数值分析、数学物理方程、离散数学、模糊数学、运筹学等.上述各课程大多为全军级、海军级优质课程和省部级精品课程,对应教材为相应的一、二级获奖教材。

丛书注重质量,讲究适用和教学实践性,体系相对完整与系统,加强应用性,按

照先进、改革与创新等编写原则和基本要求安排教材框架、结构和内容。

丛书具有明确的指导思想：

(1) 遵循高等学校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂。

(2) 注重教学创新，加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性。增强数学应用背景的介绍，拓宽学生的知识面，了解数学学科在科学研究领域的重要性，为学生打开数学与应用的窗口，培养学生的创新意识与精神，提高数学思维与素养，真正达到工科数学教学的目的。

(3) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将 Mathematic, MATLAB, SAS, SPS 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力。

(4) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便。

(5) 大部分教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础。

(6) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样。部分章后配有自测题，书末提供解题思路或参考答案。

丛书中部分图书为科学出版社普通高等教育“十三五”规划教材。

“工科数学精品丛书”编委会

2016年1月

## 第四版前言

《线性代数》自 2002 年出版以来,深受广大师生欢迎.在使用过程中,广大师生向我们提出了许多宝贵意见和建议,在此深表感谢.

这次再版,保持了第二、三版的科学合理的体系结构.教材内容仍分为三个部分,第一部分为基础篇,保持国内现有线性代数体系结构,内容简洁严谨;第二部分为应用篇,主要讲述线性代数在计算机、经济、生物等方面的应用;第三部分为实验篇,主要讲述如何应用 MATLAB 数学软件求解线性代数.修订过程中遵循新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》,同时反映国内外线性代数课程改革的学科建设最新成果,体现创新教学理念,有利于提高学生的综合素质和创新能力.这次修订主要对基础篇完善了部分知识点,更换和补充了部分例题.

本版修订工作由蔡光兴教授、李逢高教授和李家雄副教授完成.

编者水平有限,书中疏漏和不足之处在所难免,敬请广大读者指正.

编者

2016 年 5 月

## 第二版前言

21 世纪,随着科学技术的迅速发展和计算机技术的广泛应用,线性代数这门学科在数学、物理、工程技术、电子信息、生命科学、经济管理等领域有着越来越广泛的应用.因此,线性代数作为大学数学教育中的一门基础学科,对于培养新世纪的创新人才与建设人才起着重要的作用.如何掌握好线性代数课程的基本理论知识,熟练掌握其方法,并能灵活地运用到实际中去,是线性代数教学中的主要任务.本书第二版是在第一版的基础上,根据多年的教学改革实践,按照教育部精品教材建设精神,进行全面修订而成的.

第一篇是基础篇.其基本内容是根据高等工科大学“线性代数课程教学基本要求”编写的.该篇与国内目前通用的线性代数教材整体结构基本相同,但也作了一些特色处理,如突出了初等变换的初等矩阵表示法、矩阵的特征值与特征向量的概念及求法、线性方程组解的结构;深入浅出地分析了线性相关、线性无关、矩阵的秩等难点.该篇做到了内容精炼、结构严谨、循序渐进、推理简明,是教学中的必修内容.

第二篇是应用篇.本篇是编者在线性代数教学实践及指导学生参加全国大学生数学建模竞赛培训中收集、参阅大量国内外资料,根据线性代数知识体系撰写的,很有特色.该篇分四章,包括矩阵和线性方程组的应用,矩阵相似对角化的应用,向量空间与内积的应用,实二次型理论的应用.该篇可作为学生在学习相应内容时关于线性代数应用的补充读物,也可作为教师在教学中灵活选用的内容,本篇对培养学生的应用与创新能力有很大的帮助,同时也培养学生学习线性代数的兴趣.

第三篇是实验篇.主要介绍数学软件 MATLAB 及其在线性代数中的应用,本篇对培养学生运用软件与线性代数知识解决实际问题能力起着抛砖引玉的作用.本篇供学生自学用或有条件的院校在数学实验教学中选用.

本书由蔡光兴、李逢高主编,陈水林、郑列副主编.各章编写人员如下:陈水林(第一章),李逢高(第二章),蔡光兴(第三、四、五、八、九、十、十一章),郑列(第六、七章),朱永松(第十二、十三章),此外,张凯凡、耿亮、费锡仙、方瑛、许松林、张水坤、李家雄、胡二琴、章曙雯、黄毅、杨策平、方次军、蔡振锋、常涛、朱莹、贺方超、蒋慧峰、曾莹、曾宇、陈华对部分章节内容进行了修改和整理,最后由李逢高统稿、蔡光兴定稿.

由于编者水平有限,加上时间仓促,本书不妥之处在所难免,恳请广大读者提出批评、建议,以便再版时予以修订.

编者

2007 年 5 月

# 目 录

## 基 础 篇

第一章 行列式	3
第一节 排列	3
第二节 $n$ 阶行列式的概念	5
第三节 行列式的主要性质	11
第四节 行列式按行(列)展开	16
第五节 克拉默法则	23
第六节 拉普拉斯定理、行列式的乘法规则	26
习题	30
自测题	34
第二章 矩阵	37
第一节 矩阵的概念	37
第二节 矩阵的运算	40
第三节 逆矩阵	45
第四节 分块矩阵	47
习题	51
自测题	53
第三章 消元法与初等变换	55
第一节 消元法与线性方程组的初等变换	55
第二节 矩阵的初等变换	56
第三节 初等矩阵	59
第四节 初等变换法求逆阵	62
第五节 消元法求解线性方程组	64
习题	68
自测题	72
第四章 向量与矩阵的秩	75
第一节 向量的概念	75
第二节 向量空间	77
第三节 向量组的线性相关性	78



第四节	向量组等价 .....	83
第五节	极大无关组 .....	84
第六节	矩阵的秩 .....	86
习题	.....	91
自测题	.....	96
<b>第五章</b>	<b>线性方程组</b> .....	99
第一节	线性方程组的建立与表示形式 .....	99
第二节	齐次线性方程组的解空间与基础解系 .....	100
第三节	非齐次线性方程组解的结构 .....	106
第四节	线性方程组求解举例 .....	109
习题	.....	112
自测题	.....	116
<b>第六章</b>	<b>特征值与特征向量</b> .....	119
第一节	矩阵的特征值与特征向量 .....	119
第二节	相似矩阵和矩阵的对角化 .....	124
第三节	正交矩阵的概念与性质 .....	128
第四节	实对称矩阵正交对角化 .....	133
习题	.....	136
自测题	.....	138
<b>第七章</b>	<b>二次型</b> .....	140
第一节	实二次型概念与标准形 .....	140
第二节	化实二次型为标准形 .....	143
第三节	实二次型的正惯性指数 .....	149
第四节	正定二次型 .....	151
习题	.....	157
自测题	.....	159

## 应 用 篇

<b>第八章</b>	<b>矩阵和线性方程组的应用</b> .....	163
第一节	日常矩阵运算 .....	163
第二节	投入产出数学模型 .....	170
第三节	线性规划数学模型 .....	175
第四节	通信和交通网络问题 .....	178
第五节	状态离散和时间离散的马尔可夫过程模型 .....	180

第九章 矩阵相似对角化的应用	184
第一节 生物遗传问题	184
第二节 莱斯利种群模型	190
第三节 常系数线性齐次微分(差分)方程组的解	194
第十章 向量空间与内积的应用	200
第一节 Dürer 魔方	200
第二节 布尔向量空间及应用	204
第三节 矩阵空间	206
第四节 内积及应用	209
第十一章 实二次型理论的应用	213
第一节 二次曲线方程的化简	213
第二节 二次曲面方程的化简	215
第三节 求函数的最值应用	219

## 实 验 篇

第十二章 MATLAB 入门	223
第一节 MATLAB 概述	223
第二节 MATLAB 的变量与函数	226
第三节 MATLAB 图形功能	232
第四节 MATLAB 程序设计	245
第五节 MATLAB 的符号运算	255
第十三章 用 MATLAB 求解线性代数基本问题	261
第一节 矩阵的输入与运算	261
第二节 MATLAB 在矩阵和线性方程组中的应用	265
第三节 MATLAB 在特征值、特征向量、二次型中的应用	270
第四节 投入产出分析与最优化	273
习题参考答案	277

# 基 础 篇



# 第一章 行列式

行列式是为了求解线性方程组而引入的,它是研究线性代数的一个重要工具.近代以来,它又被广泛运用到物理、工程技术等多个领域.本章从解二元二式与三元三式方程组入手,引进了二阶与三阶行列式的概念,并用排列的奇偶性把行列式的概念推广到  $n$  阶,同时讨论了行列式的基本性质,并介绍了  $n$  阶行列式的计算方法与一些技巧.

## 第一节 排列

在定义  $n$  阶行列式前,先来讨论一下排列的性质.

$n$  个数码  $1, 2, \dots, n$  的一个排列指的是由这  $n$  个数码组成的一个有序数组.例如,2341 是一个 4 个数码的排列,31524 是一个 5 个数码的排列. $n$  个数码的不同排列共有  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$  个.事实上,在作  $n$  个数码的一个排列时,第 1 个位置的数码可以取这  $n$  个数码中的任何一个,所以有  $n$  种可能;当这一个位置取定以后,第 2 个位置的数码只能在剩下的  $n-1$  个数码中选取,所以只有  $n-1$  种可能.因此第 1 个位置和第 2 个位置的数码一共有  $n(n-1)$  种不同的选法.同样,如果第 1 个、第 2 个位置的数码都已取定,那么第 3 个位置的数码只能在剩下的  $n-2$  个数码中选取.因此,前三个位置的数码一共有  $n(n-1)(n-2)$  种不同的选法.依此类推,一共可以得到  $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$  个不同的排列.

例如,1,2,3 这 3 个数码的全体不同的排列一共有  $3! = 6$  个,它们是

$$123, 132, 231, 213, 312, 321$$

注意,在上面 3 个数码的排列里,除了 123 的数码是按自然顺序排列的以外,其余的排列中,都有较大的数码排在较小的数码前面的情况.例如,在排列 132 里,3 比 2 大,但 3 排在 2 的前面;在 321 里,2 排在 1 的前面,3 排在 1 和 2 的前面.一般地,在一个排列里,如果某一个较大的数码排在某一个较小的数码前面,就说这两个数码构成一个逆序.例如,排列 132 有一个逆序;321 有三个逆序.在一个排列里出现的逆序总数称为这个排列的逆序数.

例如,1432 这个 4 个数码的排列中,43、42、32 是逆序,1432 的逆序数就是 3;而 2431 排列的逆序数为 4.

逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.例如,1432 为奇排列,2431 为偶排列.

对任意一个排列,可以按照以下方法来计算它的逆序数:设任给排列为  $P_1 P_2 \cdots P_n$ , 其中  $P_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 为自然数,考虑  $P_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 如果比  $P_i$  大的且排在  $P_i$  前面的元素有  $t_i$  个,就说  $P_i$  这个元素的逆序数是  $t_i$ ,全体元素的逆序数之和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i$$

即为这个排列的逆序数.

**例 1** 求排列 45321 的逆序数.

**解** 在排列 45321 中,4 排在首位,逆序数为 0;在 5 之前比 5 大的数没有,逆序数也为 0;3 的前面比 3 大的数有 4 和 5,故逆序数为 2;2 的前面比 2 大的数有 4,5,3,故其逆序数为 3;1 的前面比 1 大的数有 4,5,3,2,故逆序数为 4. 于是,排列的逆序数为

$$t = 0 + 0 + 2 + 3 + 4 = 9$$

为叙述方便,以后一般排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的逆序数记为  $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ . 如例 1 中有

$$\tau(45321) = 9$$

**定义 1** 把一个排列中某两个数字  $i$  与  $j$  交换一下位置,而其余的数字不动,就得到另一个同阶的新排列,对排列施行的这样一个交换称为一个对换,并用符号  $(i, j)$  来表示.

例如,经过  $(1, 2)$  对换,排列 2431 就变成了 1432,排列 2134 就成了 1234. 又如,对排列 31542 陆续施行一系列对换,可以得出排列 12345: 先把 5 换到第 5 个位置,即施行对换  $(5, 2)$  得 31245;4 已在第 4 个位置,不必动它;施行对换  $(3, 2)$  得 21345;最后再施行对换  $(2, 1)$ ,就得 12345.

上面由排列 31542 得出排列 12345 的方法显然具有一般性,即任一排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  通过一系列对换都能得到排列 1234 $\cdots$  $n$ , 并且有:

**定理 1** 任意两个  $n$  阶排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  和  $j_1 j_2 \cdots j_n$  总可以通过一系列对换互变.

**证** 由上面讨论已知,通过一系列对换可以由  $i_1 i_2 \cdots i_n$  得到 12 $\cdots$  $n$ , 由  $j_1 j_2 \cdots j_n$  得出 12 $\cdots$  $n$ , 按照相反次序施行  $j_1 j_2 \cdots j_n$  变到 12 $\cdots$  $n$  的变换,就可以得出由 12 $\cdots$  $n$  变到  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的变换,这样可以实现由  $i_1 i_2 \cdots i_n$  变到 12 $\cdots$  $n$ , 再由 12 $\cdots$  $n$  变到  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的变换.

**定理 2** 对换改变排列的奇偶性.

**证** 先证明相邻对换的情形,即对换的两个数在排列中是相邻的情形. 排列

$$\begin{array}{c} \overline{A} \quad \overline{B} \\ \cdots j k \cdots \end{array} \quad (1.1)$$

经过  $(j, k)$  对换变成

$$\begin{array}{c} \overline{A} \quad \overline{B} \\ \cdots k j \cdots \end{array} \quad (1.2)$$

其中  $A$  与  $B$  都代表若干个数码. 显然,在排列(1.1)中,如  $j, k$  与其他的数构成逆

序,则在排列(1.2)中仍然构成逆序;如不构成逆序,则在排列(1.2)中也不构成逆序;不同的只是 $j, k$ 的次序.如果原来 $j, k$ 组成逆序,那么经过对换,逆序数就减少一个;如果原来 $j, k$ 不组成逆序,那么经过对换,逆序数就增加一个.不论增加1还是减少1,排列的逆序数的奇偶性总是变了.因此,在这种情形下,定理成立.

再看一般情形,设排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \quad (1.3)$$

经过 $(j, k)$ 对换,排列(1.3)变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \quad (1.4)$$

易知,这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现.从(1.3)出发,把 $k$ 与 $i_s$ 对换,再与 $i_{s-1}$ 对换,如此继续下去,把 $k$ 一位一位地向左移动.经过 $s+1$ 次相邻位置的对换,排列(1.3)就变成

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots \quad (1.5)$$

从(1.5)出发,再把 $j$ 一位一位地向右对换,经过 $s$ 次相邻位置的对换,排列(1.5)就变成了排列(1.4).因此, $(j, k)$ 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现. $2s+1$ 是奇数,相邻位置的对换改变排列的奇偶性,显然,奇数次这样的对换的最终结果还是改变奇偶性.

由以上定理,可得下列结果:

**定理3** 当 $n \geq 2$ 时, $n$ 个数字的奇排列与偶排列的个数相等,各为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

**证** 设 $n$ 个数字的奇排列共有 $p$ 个,而偶排列共有 $q$ 个,对这 $p$ 个奇排列施行同一个对换 $(i, j)$ ,那么由定理2,得到 $p$ 个偶排列,由于对这 $p$ 个偶排列施行对换 $(i, j)$ ,又可以得到原来的 $p$ 个奇排列,所以这 $p$ 个偶排列各不相等,但一共只有 $q$ 个偶排列,所 $p \leq q$ .同理可得 $q \leq p$ ,所以 $p = q$ .

## 第二节 $n$ 阶行列式的概念

行列式起源于解 $n$ 元 $n$ 式方程组.我们知道,最简单、最基本的方程组是二元二式方程组,它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

在中学学解方程组时,我们利用加减消元法解之(当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时),可得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{cases}$$

但此公式不容易记忆,因此也就不便于应用.针对这一缺点,Sarrus 创造性地引入记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad - bc \quad (1.6)$$

从而使上述公式变为容易记忆的形式

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

在引入的上述记号中,横排称为行,竖排称为列,因为共有 2 行 2 列,所以称为二阶行列式.

二阶行列式的定义本身也给出了它的计算方法

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

从左上角到右下角的对角线称为主对角线,沿主对角线上的二元素之积取正号.从右上角到左下角的对角线称为次对角线,沿次对角线上的二元素之积取负号.这种计算方法称为二阶行列式的对角线法则.

在解一般形式的三元三式方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时,暂把前两个方程中的  $x_1$  视为常数,利用二元二次方程组求解公式求出  $x_2$  与  $x_3$  后,再代入第三个方程求得  $x_1$  为

$$\frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - a_{13} a_{22} b_3 - a_{12} b_2 a_{33} - b_1 a_{23} a_{32}}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

用同样的方法可求得  $x_2$  与  $x_3$ .

与解二元一次二式方程组时遇到的问题一样,上述公式既不便于记忆也不便于应用.为此,我们也像引入二阶行列式那样引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

(1.7)



从而把解三元一次三式方程组的一般公式变为便于记忆的形式

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

以  $D_1, D_2, D_3$  和  $D$  分别代替  $x_1, x_2, x_3$  的分子和  $x_1$  的分母, 则上式可简记为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

依此类推, 有理由猜测解未知数更多的方程组时也有类似的结论, 可以定义出更高阶的行列式, 但随着阶数的增加, 这样的做法计算量过大, 显然是不可取的. 因此我们考虑通过对二阶、三阶行列式的特点进行归纳来猜测  $n$  阶行列式的一般规律. 让我们研究一下三阶行列式的规律. 由(1.7)式易见三阶行列式有下列几个特点:

(1) 三阶行列式是  $3!$  个项的代数和.

(2) 它的每项都是行列式中三个元素的乘积, 这三个元素恰好是每行每列各一个.

(3) 每项都带有确定的符号, 且其符号满足下列规律:

若把一般项记为  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$  的形式, 即行下标排成 123, 则  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$  的符号为  $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}$ .

这样(1.7)式就可写成下列形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

同样(1.6)式也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

由此给出一般  $n$  阶行列式的定义:

**定义 2** 由  $n^2$  个数(实或复数)排成一个  $n$  行  $n$  列的表, 并在两边各画一条竖线记号