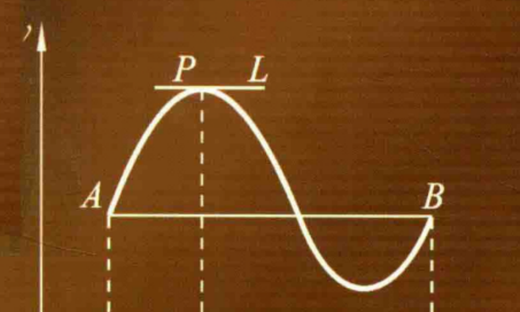
普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

大学数学（文科）（第2版）

华中科技大学数学与统计学院
魏　宏　毕志伟



華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育"十二五"规划教材
普通高等院校数学精品教材

大学数学(文科)

(第2版)

魏　宏　毕志伟

华中科技大学出版社
中国·武汉

前　言

本书作为大学文科类学科的数学课程教材，适合于大学本科或专科中的经济、法律、哲学、历史、新闻、外语、中文、建筑学、艺术设计等专业的学生使用。

长期以来，大学数学课程的设置主要是根据后续课程的需要来确定的。例如，给理工科学生开设高等数学和工程数学课程，给农林医药类专业、经济与管理类专业的学生开设微积分、线性代数、概率与统计等数学课程，而人文类专业的学生则基本不开设数学类课程。

近二十年来，随着大学教育理念的发展，国内教育界强调文科和理科相互交流和借鉴的呼声愈来愈高，让理科学生了解基本的人文知识和精神，文科学生懂得基本的理科知识和思维方法便逐步成为共识。于是，对理科学生开设人文类课程或讲座，对文科类学生开设理科类课程和科学讲座便纳入大学的教学计划之中。而数学课程由于其与自然科学的特殊关系，便是一个向文科学生传递自然科学思维方法的最适当的平台。

大学数学课程对于文科类学生的作用和重要性，目前较普遍的共识至少有两点。第一，传授文科类专业所需的必要数学知识。首先，随着计算机的普遍使用，数量化处理已经广泛地渗透到当今的许多人文社会类学科，数学方法已成为文科类各专业的基本研究方法；其次，没有适当的数学知识，就很难准确理解像风险、回报、增长放缓、机率大小等这些日益大众化的数学语言。第二，有利于提升学生的文化素养和科学精神。一方面，数学课程中所介绍的人物和事件，能使我们增加对人类思想和智慧文明的发展过程的了解；另一方面，数学语言的规范性和简洁性，公理化方法和演绎论证，对于人文学科的学习也具有重要价值。

数学知识对我们来说并不陌生。从扳着指头数数开始，到背诵乘法表，解一元二次方程，证明三角形的相似，在坐标系中研究抛物线的方程等等。应该说，小学和中学的数学教育已经为我们建立了扎实的初等数学基础，那么在大学数学课程里，再学习什么样的数学？参照已有的同类教材的做法，本教材选择了微积分学、微分方程、线性代数作为教学内容。计划课时为 88 学时，一学期讲完。如果在教学过程中，结合各专业的特点，安排学生撰写课程论文并作为评定课程成绩的一部分，则可能会取得更好的效果。

数学文化是人类文化中非常重要的一部分。数学既是一门推理严谨、计算准确

的分析与计算的科学,也是一门洞察宇宙万物的共性规则的哲学方法,更是一门人类智慧的文化思想艺术。如同汽车、飞机提高了人类的移动和运载能力,互联网扩大了人类的交流能力,软件提高了人类对信息的处理能力,而数学则能帮助我们洞察事物在数量层面上的构成模式。相信数学素质的提高可以帮助我们更好地应对未来。

为了方便学生的学习,本版增加了两个附录。一个是解题方法归纳,一个是部分习题的解答要点。习题解答虽然对于学生的学习有所帮助,但是对于使用教材上的习题来作为平时作业的任课教师来说,可能会带来不便。为此,我们建议教师使用配套设计的平时作业练习册。需要电子版的话,请联系作者(电子邮箱是 bzw1065@mail. hust. edu. cn)。

感谢王汉蓉、刘国钧老师对本书第一版的编写给出的许多指导意见。感谢周军、岑利群、韩淑霞等任课老师为本书的完善所给出的宝贵建议。

作　者

2011 年 5 月

目　　录

第 1 章　函数与极限 …… (1)

1.1　函数概念及其基本性质 …… (1)

1.1.1　常量与变量 …… (1)

1.1.2　函数的定义 …… (2)

1.1.3　几个常用函数 …… (6)

1.1.4　函数的几何性质 …… (8)

习题 1.1 …… (10)

1.2　函数的运算 …… (11)

1.2.1　四则运算 …… (11)

1.2.2　复合运算 …… (12)

1.2.3　反函数 …… (12)

1.2.4　初等函数 …… (13)

习题 1.2 …… (14)

1.3　变量的极限 …… (15)

1.3.1　数列的极限 …… (16)

1.3.2　函数的极限 …… (19)

1.3.3　极限的计算 …… (21)

1.3.4　无穷小量与无穷大量 …… (23)

习题 1.3 …… (25)

1.4　函数的连续性 …… (26)

1.4.1　连续的定义 …… (26)

1.4.2　闭区间上的连续函数 …… (28)

习题 1.4 …… (32)

第 2 章　微分学 …… (33)

2.1　导数的概念 …… (33)

2.1.1　切线问题的历史回顾 …… (33)

2.1.2　切线的定义 …… (35)

2.1.3　瞬时速度 …… (36)

2.1.4　导数的概念 …… (37)

2.1.5　可导与连续 …… (38)

习题 2.1 …… (39)
2.2 导数的计算…… (39)
2.2.1 基本初等函数的导数…… (40)
2.2.2 四则运算法则…… (40)
2.2.3 复合函数的导数…… (41)
2.2.4 隐函数和参变量函数的导数…… (43)
2.2.5 高阶导数…… (45)
习题 2.2 …… (46)
2.3 微分…… (47)
2.3.1 微分的定义…… (47)
2.3.2 微分的计算…… (49)
2.3.3 微分与近似计算…… (50)
习题 2.3 …… (50)
2.4 导数的应用…… (51)
2.4.1 微分中值定理…… (51)
2.4.2 洛必达法则 …… (54)
2.4.3 函数的单调性与凸性…… (56)
2.4.4 最值问题举例…… (58)
习题 2.4 …… (61)
第 3 章 积分学 …… (63)
3.1 定积分概念与性质…… (63)
3.1.1 定积分概念…… (63)
3.1.2 定积分的性质…… (67)
习题 3.1 …… (70)
3.2 牛顿-莱布尼兹公式 …… (70)
3.2.1 原函数与变上限积分…… (71)
3.2.2 微积分学基本定理…… (72)
习题 3.2 …… (73)
3.3 不定积分…… (74)
3.3.1 不定积分及其性质…… (74)
3.3.2 积分法则与积分公式…… (75)
3.3.3 积分法…… (77)
习题 3.3 …… (82)
3.4 定积分计算…… (84)
3.4.1 定积分的换元法…… (84)

3.4.2　定积分的分部积分法 …… (86)
习题 3.4 …… (87)
3.5　广义积分 …… (87)
3.5.1　无穷限积分 …… (88)
3.5.2　无界函数的积分 …… (89)
习题 3.5 …… (91)
3.6　定积分的应用 …… (92)
3.6.1　定积分的几何应用 …… (92)
3.6.2　定积分的物理应用 …… (96)
习题 3.6 …… (98)
第 4 章　常微分方程初步 …… (99)
4.1　基本概念 …… (99)
4.1.1　引例 …… (99)
4.1.2　微分方程及其类型 …… (100)
习题 4.1 …… (101)
4.2　一阶微分方程 …… (101)
4.2.1　变量可分离的方程 …… (102)
4.2.2　线性微分方程 …… (103)
4.2.3　可降阶的二阶微分方程 …… (105)
习题 4.2 …… (106)
4.3　二阶线性微分方程 …… (107)
4.3.1　二阶线性微分方程解的结构 …… (107)
4.3.2　二阶常系数线性微分方程 …… (109)
4.3.3　微分方程的应用 …… (112)
习题 4.3 …… (115)
第 5 章　线性代数初步 …… (116)
5.1　行列式与线性方程组 …… (117)
5.1.1　行列式的概念 …… (117)
5.1.2　行列式的性质 …… (122)
5.1.3　克莱姆法则 …… (124)
习题 5.1 …… (126)
5.2　矩阵 …… (127)
5.2.1　矩阵的概念 …… (127)
5.2.2　矩阵的运算 …… (130)
5.2.3　逆矩阵法求解线性方程组 …… (134)

习题 5.2 …………………………………………………………………… (136)
5.3 线性方程组 ……………………………………………………………… (137)
5.3.1 矩阵的秩 …………………………………………………………… (138)
5.3.2 非齐次线性方程组的解 ………………………………………… (140)
5.3.3 齐次线性方程组的解 …………………………………………… (143)
习题 5.3 …………………………………………………………………… (145)
附录 1 解题方法归纳 …………………………………………………… (147)
附录 2 部分习题解答要点 ……………………………………………… (160)
参考文献 ………………………………………………………………… (175)

第 1 章　函数与极限

1.1　函数概念及其基本性质

函数概念的形成历经了不同时期数学家的不断发展及完善过程.函数(function)一词,最初见于德国数学家、微积分创始人之一的莱布尼兹在 1692 年的著作之中.而今所用的记号 $f(x)$ 则是瑞士数学家欧拉(Euler)在 1724 年首次使用的.但最初的使用中,人们对函数概念的定义并不太在意,表述不够清楚,是德国数学家黎曼(Rieman)给出了其准确定义.如今,函数概念已经进一步推广到更大的范畴,以满足应用的需要.

1.1.1　常量与变量

在我们的日常生活、生产经营、学习和研究中,要关注的问题虽然多种多样,但是都可以归结到事物的质和量这两个方面.例如,对一位即将去外地上大学的学生来说,他当前要关心的问题有:带多少生活费、带哪些书本和行李、同行的伙伴有谁、旅途所路过的城市、花费的时间和路程等等.对一位正在对其员工进行考评的企业的人事经理来说,他要操心的则可能是,员工的工作业绩、工作态度、团队意识、业务能力、职业操守和创新精神等等.

在人们考虑的这样的问题中,有一些直接涉及到数字,表现着事物的量的属性,例如,学费、路程、业绩等;还有一些没有涉及到数字,表现的是事物的质的属性,例如,工作态度、团队意识.但是,为了应用上的便利,人事经理可以用打分或投票这种数字化的方法来描写员工在这些方面的差异.事实上,随着计算机技术的日益发展,许多质的属性都可以用数量来表达.例如,颜色、声音、指纹等都可以按照一定的方法表现为一组数据.在许多时候,与个性十足的你对应着只不过是一组身份证编码!人类正走向数字化的时代,数量方法与我们的生活息息相关,影响重大.

事物存在于一定的时间与空间范畴之中.当我们在一定的时空范畴中考察一个事物的数量特征时,可以根据其数量是否变化而将它们分为两类:常量与变量.

例如,当我们乘火车行进在去某大学所在地的这一段旅途之际,就读大学的地点,知名度应当没有改变,而学校里的迎新工作进度、已到校的新生人数、火车与家乡的距离则正在改变.

我们将某一过程中保持不变的量称做相对于该过程的常量，简称**常量**，而将发生变化的量称做相对于该过程的变量，简称**变量**. 由于变化是绝对的，不变是相对的，故有时也说常量是变量的特殊情形.

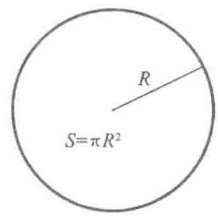


图 1.1.1

要强调的是，在描述变量时，应当指明变量所对应的考察过程，否则便很难理解其含义.

例 1　如图 1.1.1 所示，在圆的面积计算公式 $S=\pi R^2$ 中，一共有四个量：S、R、π、2. 当我们将此公式用于计算各种半径的圆的面积的过程中，半径 R 与面积值都是变量，π 与 2 则是常量.

应当说明的是，同一个量可能因为考察过程的不同而具有不同的属性.

例 2　考察学生食堂中的人数 x. 在食堂开始营业前的一个小时当中，只有厨工们在劳作，x 是常量；而在开始营业后的一个小时当中，随着进餐者的来去，x 便是变量.

研究变量的意义在于：人们对于所关心的事物，总是想了解描述此事物的某几个关键量的属性，这些量是常量还是变量？如果是变量，那么它的变化范围是多大？变化方式如何？变化趋势怎样等等.

为了回答这些问题，人们从描写变量之间的关系入手，导致了函数概念的出现. 而对于变量的变化特性的研究，便引导出变量的极限的概念. 函数与极限是本章的两个重要概念.

通常，将变量 x 的可能取值范围称为变量的**变化范围**.

例如，在例 1 中，S 与 R 的变化范围是全体正实数 $(0,+\infty)$. 而在例 2 中，x 的变化范围则是有限数集 $\{1,2,\cdots,m\}$（m 是该食堂的最大容量）. 本教材中所考虑的变量均取实数值.

通常，当变量的变化范围由一个或几个区间构成时，称之为**连续型变量**；当变量的变化范围为有穷数集或可数无穷数集（与自然数的个数一样多）时，称之为**离散型变量**.

1.1.2　函数的定义

假定 x 与 y 是我们在某个考察过程中的变量，它们的变化方式可能是毫无关系（例如你的业余爱好与太阳的西落东升），也可能存在相互联系（例如你的收入与支出，你的用电量与缴纳的电费）. 从哲学的意义上讲，变量之间的联系是永恒的、普遍的. 当今世界经济的国际化，传媒方式的普及化，使我们感觉到似乎每个事物都是相互关联，相互影响的，只是关联的方式不同，影响的程度不一罢了. 亚洲金融危机、巴以冲突、“9 · 11”恐怖袭击，可以说这些事件都不是孤立的，是事物内在联系的一种集中反映.

在日常的实际活动中，人们在面临错综复杂、瞬息万变的事件或问题时，仅靠经验、感觉是无法作出合理而科学的决策的. 人们需要弄清事件或问题中的关键的变量之间的相互关系及影响程度. 而这便导致函数概念的引入. 可以简单地说，研究事物的内在

规律便是研究用来描写变量之间的关系的函数，对函数特性的深入而全面的研究，有助于我们准确地把握事物的本质，理清问题的头绪，正确地面对及处理日常学习与工作中所遇到的各种问题.

在初等数学中，我们见过许多使用数学运算和数学公式定义的初等函数，例如，以下公式

$$y=kx+b,\quad y=x^2,\quad y=\sin x,\quad y=\cos x,$$
$$y=2^x,\quad y=\lg x,\quad y=\arctan x,\quad \cdots \qquad ①$$

刻画了自变量 x 与因变量 y 的依从关系. 通常称以这种方式定义的 x 与 y 的关系为解析形式的函数. 而函数的较一般描述则如下所述.

定义 1　设 x,y 是两个变量，X 是 x 的变化范围. Y 是 y 的一个变化范围，f 是一个对应法则. 若对每个 X 中的 x 值，依据对应法则 f，Y 中有确定的并且唯一的一个 y 值与之对应，则称对应法则 f 是从 x 到 y 的一个**函数**. 记作

$$y=f(x),\quad x\in X \quad 或 \quad f:x\to y,\quad x\in X.$$

并称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，X 是 f 的**定义域**，$f(x)$是 f 在 x 处的**函数值**，当 x 在 X 中变动时，函数值 $f(x)$的全体(是 Y 的一个子集)

$$G=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$$

称做函数 f 的**值域**.

关于这个定义，我们必须作几点重要说明：

(1) 与初等数学中称因变量 y 是函数的说法不同，定义中称对应规则 f 是函数，这一方式表明，函数的本质是变量之间的对应关系.

(2) 在定义 1 中，并未规定对应规则 f 必须是用数学公式来表现的，尽管这是最常用的形式. 依据定义，描写一个对应规则的方式不限于这一种形式，还可以采用曲线、表格，甚至文字等各种方式表示.

例如，图 1.1.2 中的心电图表示了一位受检者的心电情况，是电流信号随着时间变量 t 的一个函数. 尽管我们也可以构造出该曲线的一个近似的数学公式，但是从应用角度看，医生并不需要函数的解析形式，直接对曲线的形状进行分析，就能得到所需要的病情信息.

图 1.1.2

又例如下面的一份期末考试卷面成绩 8 折表

x(卷面成绩)	50	51	52	…	90	…	100
$y=0.8x$	40	40.8	41.6	…	72	…	80

表示了由卷面成绩 x 到折算成绩 y 的函数关系. 有意思的是，尽管 x 与 y 之间有简单的解析公式 $y=0.8x$，但从应用的便利性来看，教师们还是愿意直接使用表格得出学生

的折算成绩而不愿每次都作乘法.

(3) 在定义 1 中,对规则 f 的一个基本要求是,它必须能以确定的方式指定**唯一的**一个 y 值与 x 值对应. 这种可操作性与唯一性是十分重要的,是数学的严密性和精确性的一个重要体现. 例如,以下几种文字描述的对应规则便不符合函数定义中的这一要求:

(a)有少许白头发的男士可以免费领取一瓶染发水;

(b)任给实数 x,$f(x)$是满足 $y^2=x$ 的实根 y.

在(a)中,少许白头发这一限定无法实际操作,显然,仅有 1 根白发或满头全白的男士不可以领取染发水,但有 100 根,1000 根白发者可以吗? 由于这个描述使得对象无法区分,因此,其定义域不明确.

在(b)中,如果给定的 $x=1$,则符合所论规则的 $f(x)$值既可以是 1,也可以是 -1,于是,函数值 $f(1)$不唯一;并且若取 $x=-1$,则由于方程 $y^2=-1$ 没有实根,按照此规则,居然找不到函数值与 $x=-1$ 相对应.

因此,一个对应规则及一个使该规则成立的定义域便构成了函数概念的两个基本要素. 两个函数相同的充分必要条件便是这两个基本要素完全一样,即:定义域相同并且自变量取相同的值时所对应的因变量之值也完全相同. 鉴于此,人们有时也把函数中的因变量省去不写,而将函数 $y=f(x)$简记成

$$f(x), \quad x\in X .$$

例 3 指明以下两对函数中哪一对是相同的.

(1) $f(x)=\ln x^2, x>0$, $\quad g(y)=2\ln y, y>0$;

(2) $f(x)=\ln x^2, x\neq 0$, $\quad g(x)=2\ln x, x>0$.

解 (1)中两个函数所用的字母虽然不同,但定义域相同,都是正实数,并且在自变量取相同的值时函数值也一样,如 $x=2, y=2$ 时 ,有 $f(2)=\ln 2^2=2\ln 2=g(2)$. 可见对应规则也一致,故两函数相同. 由此可知,使用什么记号表示自变量及用什么形式表示对应规则是无关紧要的,关键是函数的定义域与对应规则最终相同.

(2)中两个函数的定义域不一样,故两函数不相同.

1. 函数的图形

自从笛卡尔等人发明了直角坐标系等解析几何方法之后,人们便将变量 x 与 y 的函数关系用平面直角坐标系 Oxy 中的点来表示. 于是,函数 $y=f(x)(x\in X)$的图形(图 1.1.3)就定义为 Oxy 平面中的点集

$$G_f=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in X\}.$$

虽然有时候,G_f 并不是一条通常意义上的曲线(比如它是断开的几个线段或一些点的集合),但仍称之为曲线,简称为曲线 $y=f(x)$.

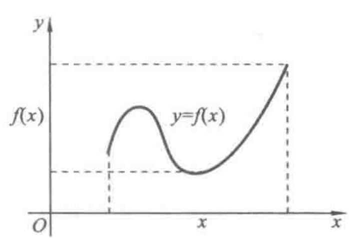


图 1.1.3

就像心电图的例子一样，曲线 $y=f(x)$ 以直观的方式给出了函数的整体分布及 x 与 y 的动态关系，这对于理解函数性质或探索可能结果十分有益. 在本教材中，我们将常常画出函数的图形以便于理解问题的几何意义.

2. 自然定义域

当函数 $y=f(x)$ 表现的是某个实际问题时，它的定义域便完全由此问题中 x 的实际意义来确定. 例如圆的面积公式

$$S=\pi R^2$$

中，自变量 R 的定义域是正实数集 $(0,+\infty)$. 但是人们在数学处理过程中，为了更好地表现函数关系本质，往往去掉了函数问题中变量所依存的背景空间（这就叫抽象!），而仅将函数作为变量之间的一种纯粹的对应法则来研究. 这种情况下，人们对于以数学公式形式写出的函数，将其定义域规定为使得公式有意义的所有 x 的取值范围，并称之为自然定义域. 例如对函数（注意，不考虑几何背景）

$$S=\pi R^2$$

来说，其定义域便是全体实数 $(-\infty,+\infty)$，因为 R 取负数时，还是可以从公式中求出确定的量 πR^2 与 R 对应.

例 4　求函数 $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域.

解　对分数 $\dfrac{u}{v}$ 来说，运算规则要求分母不为零，故应当有 $x\neq 0$，$x-1\neq 0$，于是定义域为三个区间 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 的并集.

例 5　求函数 $y=\lg(1-x)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域.

解　由初等数学知，对数的真数 $1-x$ 必须为正数，开平方根的数 x 必须非负，再结合分母不能为零，便可以写出约束自变量的条件为

$$1-x>0 \quad 及 \quad x\geqslant 0 \quad 和 \quad x\neq 0,$$

联立求解便得到所求定义域为 $0<x<1$.

例 6　求函数 $y=\arcsin(\mathrm{e}^x-1)$ 的定义域.

解　由初等数学知，反正弦函数的定义域是 $[-1,1]$，故应当有

$$-1\leqslant \mathrm{e}^x-1\leqslant 1 \quad 或 \quad 0\leqslant \mathrm{e}^x\leqslant 2,$$

于是，$-\infty<x\leqslant \ln 2$ 为所求定义域.

例 7（分段函数）　某客运公司规定的行李收费规则为：每位乘客可免费携带至多 20 kg 的行李，超过 20 kg 者，对超出部分按 2 元/kg 的价格加收运费，如图 1.1.4 所示. 于是行李的重量 w 与乘客为行李所支付的费用 p 之间的函数关系可写成以下形式

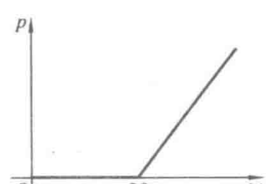


图 1.1.4

$$p=\begin{cases}0, & 0\leqslant w\leqslant 20,\\ 2(w-20), & w>20.\end{cases}$$

通常称这种形式的函数为分段函数,其对应法则由几个分规则构成.每个分规则不重叠,各自适合于自变量的某一段变化范围.在商业活动中存在着许多分段函数,如电话计费采用分时计价;量贩店购物采用按量定价,同样的商品在不同地区之间实行价格歧视策略等等.

1.1.3 几个常用函数

以下我们通过实际问题来引入一些常用的函数,并介绍这些函数的代数特征与几何图形,以期对它们有较全面的理解.

例 8(比例函数) 如果每千克大米的单价是 3.6 元,则购买 x 千克大米所须支付的价钱 y 便与 x 成比例关系,比例系数是单价 $p=3.6$,故 x 与 y 的函数关系(图1.1.5)为

$$y=f(x)=px.$$

其代数特征是:y 与 x 的比(即价格)保持为常数.

例 9(反比例函数) 在一个电流为 I,电阻为 R,电压为 V 的电路上,若电压 V 是常数 V_0,则 I 与 R 的关系是反比例关系(图 1.1.6):

$$I=f(R)=\frac{V_0}{R}.$$

其代数特征是:自变量 R 与因变量的乘积保持为常数;或者说,电流 I 与电阻 R 的倒数成比例.

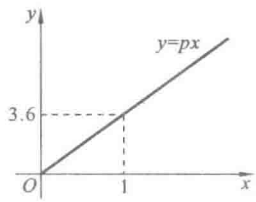


图 1.1.5

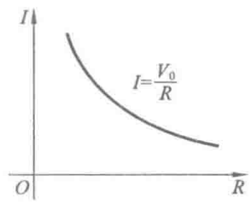


图 1.1.6

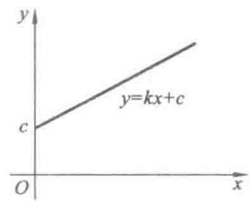


图 1.1.7

例 10(线性函数) 一个理发店的经营成本 y 由固定成本及可变成本两部分构成.固定成本 c 由店面租金、理发员的基本工资构成,无论是否有人来理发,这个费用都得开支;可变成本则是顾客来了之后,由耗材、电费、理发员的提成工资等构成,通常这是与顾客人数 x 成比例的,设为 kx,则经营成本 y 便是 x 的线性函数(图 1.1.7):

$$y=kx+c.$$

它的一个重要性质为,无论目前顾客人数是多少,每增加一位顾客人数所带来的经营成本的增加是相同的,即

$$y(x+1)-y(x)=k.$$

对这一现象的本质化的理解则是：y 的增加量与 x 的增加量之比是常数，即

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}=k.$$

例 11（指数函数） 某一地区的人口统计数据如下表：

t/年	1980	1981	1982	1983	1984	1985
y（人口）/百万	67.38	69.13	70.93	72.77	74.66	76.60
人口改变量/百万		1.75	1.80	1.84	1.89	1.94

从中看出，随着时间 t 的增大，人口总数不断增加，并且每年的改变量也呈逐年上升趋势. 我们想知道，总人口数 y 与时间 t 成立什么函数关系？为此，若以 1980 年总人口数为基准，则可以发现一个规律

$$\frac{1981\text{ 年人口数}}{1980\text{ 年人口数}}=\frac{69.13}{67.38}=1.026,$$

$$\frac{1982\text{ 年人口数}}{1980\text{ 年人口数}}=\frac{70.93}{67.38}=(1.026)^2.$$

于是我们推测 1980 年后的第 t 年时，总人口数 $y(t)$ 为

$$y(t)=1980\text{ 年人口数}\times(1.026)^t.$$

这是一个指数函数. 通常记作

$$y=ka^t.$$

其代数特征为：相同间隔（相邻 1 年或相邻 Δt 年）年份的总人口数之比是常数

$$\frac{y(t+\Delta t)}{y(t)}=\frac{y(s+\Delta t)}{y(s)}.$$

对依从指数函数 $y=ka^t(k>0)$ 变化的函数，当 $0<a<1$ 时，y 关于时间变量 t 递减，当 $a>1$ 时，y 关于 t 递增. 设 $t=0$ 时，y 的值为 y_0，而 $t=T$ 时 y 的值为 $y_0/2$（或 $2y_0$），则称 T 为变量 y 的**半衰期（或倍增期）**（图 1.1.8、图 1.1.9）. 指数函数在增长和衰减问题中有较广泛的应用.

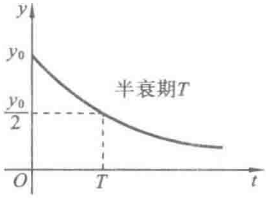


图 1.1.8

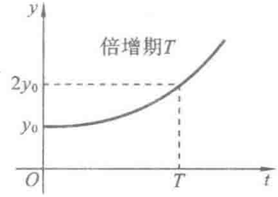


图 1.1.9

例 12 一段用粘土制成的发动机排气管可用来吸收废气中的污染物. 设废气在进入管道之前的污染物含量 y 的初始量是 y_0，且 1 m 长的排气管可使污染物减少 20%，

问使得变量 y 衰减到初始量的一半所需要的排气管长是多少?若要将污染物减少到初始量的 1/16,应使用多长的排气管?

解 设 x 表示排气管长度,则依题意有

$$y(0)=y_0,\quad y(1)=0.8y_0,\quad y(2)=0.8^2y_0,$$

故推测

$$y(x)=y_0(0.8)^x.$$

求解方程

$$y_0/2=y_0(0.8)^x,$$

得

$$x=\left(\ln\frac{1}{2}/\ln 0.8\right)\text{ m}\approx 3.1\text{ m}.$$

可见使用 3.1 m 长的管子可使污染量减少一半,为$\frac{1}{2}y_0$;再使用 3.1 m 长的管子,又可使污染量减少一半,为$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y_0\right)=\frac{1}{4}y_0$. 由此推得,4 个 3.1 m(即 12.4 m)的排污管可以使污染量减少到$\frac{1}{16}y_0$.

1.1.4 函数的几何性质

在以变量为研究对象的数学领域中,第一个里程碑是解析几何的发明. 法国数学家笛卡尔(R. Descartes,1596—1650 年)在 1637 年发表了著名的哲学著作《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》,该书有三个附录:《几何学》、《屈光学》和《气象学》. 解析几何就包含在《几何学》这篇附录当中,而解析几何方法则是本课程的一个重要基础.

在研究函数的代数性质的过程中,始终保持对其几何图形的理解是十分重要的. 以下四个关于函数的几何性质的内容便是依据对曲线形态的直观印象入手,使用代数语言来准确描述的.

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的区间,且有

$$f(-x)=f(x)\,(\text{或 } f(-x)=-f(x)),\ x\in D,$$

则称 $f(x)$ 是偶函数(或奇函数).

从几何上看(图 1.1.10),奇函数的曲线 $y=f(x)$ 关于原点对称,偶函数的曲线 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称.

例 13 直接依定义可以验证以下函数是奇函数

$$y=x,\quad y=x^3,\quad y=\sin x,\quad y=x\cos x,\quad y=\tan x.$$

而以下函数则是偶函数

$$y=1,\quad y=x^2,\quad y=\cos x,\quad y=x\sin x,\quad y=|x|.$$

在绘制奇(偶)函数的图形时,我们可以先画出函数在正半轴$(0,+\infty)$上的图形,然后对称地复制出另一半的图形.

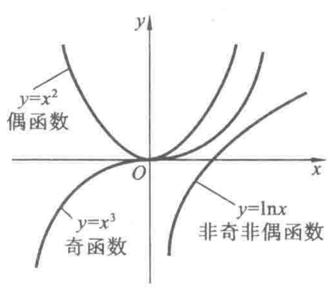


图 1.1.10

应当说明的是，存在既非奇函数，也非偶函数的函数. 例如指数函数 $y=e^x$ 及对数函数 $y=\ln x$.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 于区间 D 上有定义. 并且对任何 D 中的两个数 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，便成立

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加(或单调减少)；

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 D 上严格单调增加(或严格单调减少).

从几何上看，单调增加(或单调减少)的函数 $y=f(x)$ 的曲线是沿着 x 轴的正向逐渐上升(或下降)的(图 1.1.11).

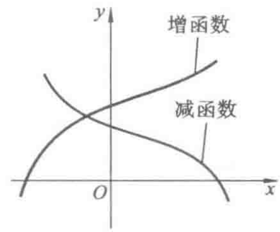


图 1.1.11

依据定义知，严格单调增加(或严格单调减少)的函数也是单调增加(或单调减少)函数. 通常将这四类函数统称为单调函数，而称相应的区间 D 为单调区间.

例 14　函数 $y=x^2$ 在其定义区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数. 但它在区间 $(-\infty,0)$ 上是严格单调减少函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格单调增加函数(图 1.1.10).

3. 函数的周期性

设有正常数 T，使得对每个 $x\in D$ 成立 $x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是**周期函数**，T 是 $f(x)$ 的一个周期. 如果函数有最小正周期 T_0，则称 T_0 为 $f(x)$ 的基本周期.

从几何上看，周期函数的曲线是由一个基本周期区间 $[0,T_0]$ 上的图形经**平移复制而来的**(图 1.1.12).

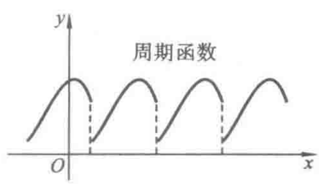


图 1.1.12

例 15　$y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 是以 2π 为基本周期的. 而 $y=|\sin x|$，$y=\cos^2 x$，则是以 π 为基本周期的.

周期函数的应用十分广泛. 它可以用来表示诸如四季的更替，行星的运动，生命的延续等周而复始的客观现象.

4. 函数的有界性

设有常数 $M>0$，使得对每个 $x\in D$，成立

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M\quad 或\quad |f(x)|\leqslant M.$$

则说 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，或说 $f(x)$ 在 D 上有界. 当 $f(x)$ 不是 D 上的有界函数时，说 $f(x)$ 是 D 上的无界函数或 $f(x)$ 在 D 上无界.

从几何上看，有界函数的曲线 $y=f(x)$ 位于两条水平直线 $y=-M$ 及 $y=M$ 之间(图 1.1.13).

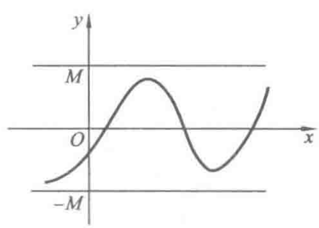


图 1.1.13