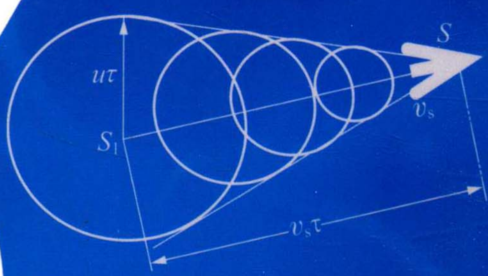
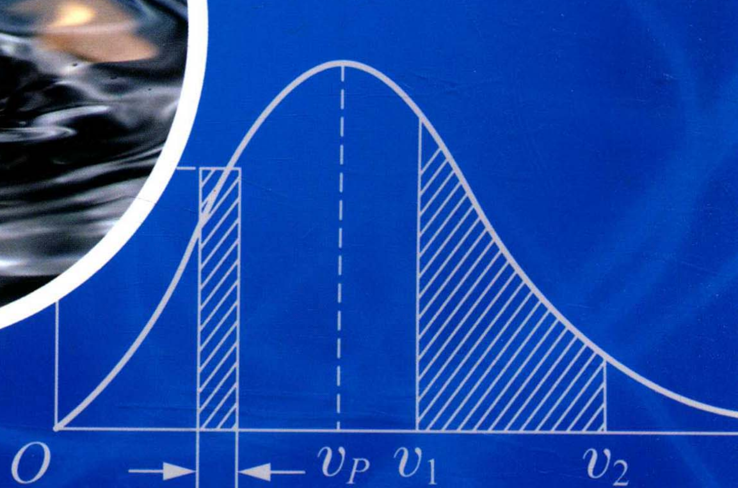
高职高专“十二五”规划教材

物理学

刘文娟　主　编





经济科学出版社

高职高专“十二五”规划教材

物理学

刘文娟　主　编
魏传豪　张媛媛　副主编

经济科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

物理学/ 刘文娟主编. —北京:经济科学出版社,2010.5
高职高专“十二五”规划教材
ISBN 978 -7 -5058 -9277 -4

Ⅰ.①物… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①物理学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.①04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 068798 号

责任编辑:王东萍
责任校对:徐领柱
技术编辑:李长建

物理学
刘文娟　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址:北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编:100142
教材编辑中心电话:88191344　发行部电话:88191540
网址:www. esp. com. cn
电子邮件:espbj3@ esp. com. cn
北京密兴印刷厂印装
787×1092　16 开　17 印张　413 千字
2010 年 5 月第 1 版　2010 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978 -7 -5058 -9277 -4　定价:29.80 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　言

《物理学》是在总结各级优秀精品课程教学经验的基础上，结合工科物理教学内容和课程体系改革的实践，以“素质为核心、能力为基础、技能为重点”的原则编写而成。全书以物理学的基本概念、定律和方法为核心，在保证物理学知识体系完整的同时，重点突出基础理论，重视物理理论在生产技术中应用知识的介绍，重视以物理学的思想和方法来分析问题、解决问题的综合能力的培养和训练。注重培养学生的综合能力、创新意识和基本技能。力求做到内容新颖、结构合理、概念清楚、实用性强、通俗易懂、前后相关课程有较好的衔接。

《物理学》共分五篇，第一篇力学；第二篇振动和波动；第三篇热学；第四篇电磁学；第五篇波动光学。各章后备有加强基础知识巩固的习题。

本书可作为高职高专各专业物理课程教材，也可作为“专升本”及学历文凭考试的教材或参考书。

本书由刘文娟担任主编，魏传豪、张媛媛担任副主编，荆莉参与了编写。

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免存在不足之处，望专家和读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

目　录

第一篇　力　学

第二篇　振动和波动

第三篇 热 学

第四篇 电 磁 学

第五篇 波动光学

第一篇 力学

第1章 质点运动学

自然界中，物质的运动形式是多种多样的，最简单而又最基本的运动是物体之间或物体各部分之间相对位置发生变化，这种运动称为机械运动。江河湖海的奔流，宇宙飞船的航行，机器的运转等，都是机械运动。力学就是研究机械运动规律的科学。在力学中，研究物体的位置随时间变化的规律称为运动学，研究物体间的相互作用及由此而引起的物体运动状态变化的规律称为动力学，本章将讨论运动学。

本章要点

1. 质点、参考系的概念；
2. 描述质点运动的物理量：位置矢量、位移矢量、速度和加速度；
3. 一般曲线运动的描述：自然坐标系下的加速度；
4. 圆周运动的角量描述：角位移、角速度和角加速度；
5. 圆周运动线量与角量的关系。

1.1 物理模型 参考系

1.1.1 质点——物理模型

物体都有大小和形状，运动方式也是多种多样的。例如，太阳系中，行星除绕自身的轴线自转外，还绕太阳公转；从枪口射出的子弹，它在空中向前飞行的同时，还绕自身的轴转动；有些双原子分子，除了分子的平动、转动外，分子内各个原子还在振动。这些事实都说明，物体的运动情况是十分复杂的。物体的大小、形状、质量也都是千差万别的。

我们看到，在描述物体的运动时，如果连同物体本身的大小和形状都考虑在内，对物体运动的描述是很困难的。但是，在有些情况下，如果物体本身的大小和形状可以忽略，对物体运

动的描述就可以得到简化。例如，一列火车在铁轨上行驶，它的发动机、传动机构及车轮的运动是很复杂的，但人们衡量火车从甲地到乙地的运动速度时，火车内部的运动被撇开不管。地球在绕太阳公转的同时又在自转，因此，地球的各部分离太阳的远近在不断变化。但是，由于地球至太阳的平均距离约为地球半径的 10^4 倍，因此，在研究地球公转时，由地球的大小而引起的地球上各部分的运动差异就可以忽略不计了。像这样，在研究的问题中，若物体的大小和形状可以忽略，那么用该物体上的一个点的运动，就可以代表整个物体的运动了。这时，我们突出物体具有质量和占有空间位置这两个要素，把它简化为一个有质量的点，称为质点。于是，对实际物体运动的描述，就转化成对质点运动的描述。

质点是经过科学抽象而形成的物理模型。把物体当做质点是有条件的、相对的，要看所研究的问题的性质。在前面的例子中，研究火车从甲地到乙地的运动速度时，可以把火车看做质点，而如果研究整列火车通过某一路标所用的时间，显然不能忽略火车的长度，这时火车就不能被看做质点。研究地球的公转，可以把地球看做质点，但在研究地球的自转时，其大小、形状就不能忽略。

在物理学中，忽略次要因素，建立理想化的“物理模型”，并将其作为研究对象，是经常采用的一种科学研究方法，在实践上和理论上都具有非常重要的意义。当我们所研究的运动物体不能视为质点时，质点的概念仍然十分有用。因为可以把物体视为由许多小体积元组成，每个体积元都小到可以按质点来处理，则整个物体可以看成是由若干质点组成的系统，即质点系。这样，以对质点运动的研究为基础，就可以研究任意物体的运动了。所以，研究质点的运动是研究物体运动的基础。

1.1.2 参考系

世界是物质的，物质是运动的，运动是物质的根本属性和存在形式。自然界中所有的物体都在不停地运动，江水奔流，车辆行驶，机器运转，人造卫星环绕地球运行等，绝对静止的物体是没有的。在观察一个物体的位置及位置的变化时，总要选取其他物体作为参考。这个被选作参考的物体称为参考系。通常所说的某物静止、某物以多大的速度运动，总是相对于一定的参考系而言的。

所选的参考系不同，对同一物体运动的描述可能是不一样的，这称之为运动描述的相对性。例如，行驶的汽车上坐在座位上的乘客，相对于汽车，乘客是静止的；相对于地面，乘客不是静止的，而是和汽车一起向前运动。又如，不刮风的时候下雨的话，站在地面上的人看到雨滴是竖直下落的；而在行驶的车中，乘客看到雨滴飞向斜后方，并不是竖直下落的。因此，讨论一个物体的运动，必须首先指明是相对于哪个参考系而言的。

在具体问题中选择参考系，一般要根据问题的性质和研究的方便性来选择。在讨论地面上物体的运动时，通常选地球作为参考系；研究地球和各行星围绕太阳的运动时，一般选择太阳为参考系。在本书中，若未作特别说明，通常都是选择地球或相对于地球静止的物体作为参考系。

选定参考系后，只能对物体的机械运动作定性的描述，要定量地说明一个质点相对于此参考系的位置，还必须在参考系中建立固定的坐标系。运动物体的位置就由它在参考系中的坐标值来描述。最常用的坐标系是直角坐标系，根据需要也可以选择其他坐标系，如极坐标系、球坐标系等。

1.2 运动的描述

描述质点的运动，就是要描述质点的空间位置随时间变化的情况，通常用位置矢量、位移、速度、加速度等物理量来描述质点的运动。

1.2.1 位置矢量 运动方程 位移

1. 位置矢量

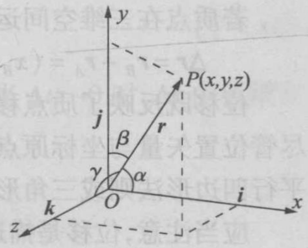


图 1-1

运动学中，为了定量地研究质点的运动，必须对质点的位置作定量的描述。为此，我们引入位置矢量的概念。首先，选好参考系，再在参考系上建立一个固定的坐标系。

如图 1-1 所示的直角坐标系中，设在时间 t 时刻有一质点位于 P 点，其位置可用位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 来表示。位置矢量简称位矢，它是一个有向线段，其始端位于坐标系的原点 O，末端则与质点 P 在 t 时刻的位置重合。从图中可以看出，位矢 $\boldsymbol{r}$ 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影（即质点的坐标）分别为 x、y 和 z。所以，质点 P 在直角坐标系中的位置，既可以用位矢 $\boldsymbol{r}$ 来表示，也可以用坐标 x、y 和 z 来表示。那么，位矢 $\boldsymbol{r}$ 亦可写成

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1-2}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦由下式确定

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|} \tag{1-3}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别是沿 x,y 和 z 三个坐标轴正方向的单位矢量，α、β、γ 分别是位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与 x、y 和 z 三个坐标轴正方向的夹角。

2. 运动方程

当质点运动时，它相对坐标原点 O 的位矢 $\boldsymbol{r}$ 是随时间而变化的。因此，$\boldsymbol{r}$ 是时间的函数，即

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

式(1-4)叫做质点的运动方程，其在直角坐标系中的分量表达式为

$$x = x(t),y = y(t),z = z(t) \tag{1-5}$$

从式(1-5)中消去参数 t 便得到了质点运动的轨迹方程，所以，它们也是轨迹的参数方程。如平面上的运动质点，运动方程为 $x = t, y = t^2$，得轨迹方程为 $y = x^2$（抛物线）。

运动学的重要任务之一就是找出各种具体运动所遵循的运动方程。

3. 位移

如图 1-2 所示的平面直角坐标系中，运动质点在 t_1 时刻到达位置 A，在 Δt 的时间间隔内沿曲线在 t_2 时刻运动到位置 B，质点相对原点 O 的位矢由 $\boldsymbol{r}_A$ 变化到 $\boldsymbol{r}_B$。显然，在时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内，位矢的长度和方向都发生了变化。我们将由起始点 A 指向终点 B 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 称

为点 A 到点 B 的位移。位移$\overrightarrow{AB}$反映了质点位矢的变化。若把$\overrightarrow{AB}$写作 $\Delta\boldsymbol{r}$,则质点从 A 点到点 B 的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A \tag{1-6}$$

亦可写成

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=(x_B-x_A)\boldsymbol{i}+(y_B-y_A)\boldsymbol{j} \tag{1-7}$$

若质点在三维空间运动,则在直角坐标系 $Oxyz$ 中,其位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=(x_B-x_A)\boldsymbol{i}+(y_B-y_A)\boldsymbol{j}+(z_B-z_A)\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

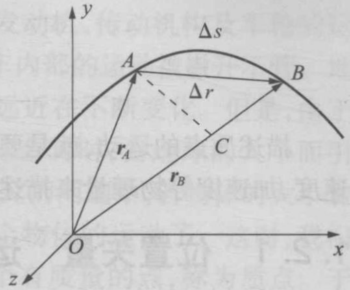


图 1-2

位移既反映了质点移动的远近,又反映了质点移动的方向。尽管位置矢量与坐标原点的选择有关,但位移与坐标原点的选择无关。位移遵从矢量相加的平行四边形法则或三角形法则。

应当注意,位移是描述质点位置变化的物理量,并非质点所经过的路程。如图 1-2 所示,路程为质点实际运动的轨迹的长度,而位移则是 $\Delta\boldsymbol{r}$ 。位移是矢量,路程是标量,而且位移的大小与路程一般不等,例如,质点沿圆周绕行一周回到起点,相应的位移等于零,而路程等于圆的周长。所以,质点的位移和路程是两个完全不同的概念。只有在 Δt 很小的极限情况下,位移的大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 才可视为与路程 AB 没有区别。

1.2.2 速度

研究质点的运动,不仅要知道质点在各个时刻的位置,而且要知道质点运动的快慢和方向,为此还应引入一个物理量来描述位置矢量随时间的变化程度,这就是速度。

设在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内,质点从 P 点运动到 Q 点(如图 1-3 所示),质点运动的快慢和方向可用质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和相应时间 Δt 的比表示,即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-9}$$

称 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 为 $(t+\Delta t)-t$ 时间间隔内质点的平均速度。平均速度是矢量,它的方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同。

平均速度可写成

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}=\bar{v}_x\boldsymbol{i}+\bar{v}_y\boldsymbol{j} \tag{1-10}$$

其中,$\bar{v}_x$ 和 $\bar{v}_y$ 是平均速度 $\bar{v}$ 在 Ox 和 Oy 轴上的分量。

通常,质点运动的平均速度随着时间间隔的不同而有所差别,所以说到平均速度时,必须指明是哪一段时间或哪一段位移内的平均速度。

平均速度只能粗略地描述质点在 Δt 时间内运动的平均快慢程度,它不仅与 t 有关,而且与 Δt 也有关。为了精确地描述质点在时刻 t 的运动快慢,令 $\Delta t\to 0$,这样平均速度就会趋近于一个确定的极限矢量,这个极限矢量称为质点在时刻 t 的瞬时速度,简称速度,用矢量 $\boldsymbol{v}$ 表示,即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

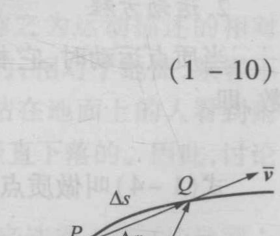


图 1-3

或
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j} \tag{1-12}$$

式中，$\boldsymbol{v}_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{v}_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$。$\boldsymbol{v}_x$、$\boldsymbol{v}_y$ 分别为 $\boldsymbol{v}$ 在 x、y 轴方向的速度分量。

$\boldsymbol{v}$ 的大小：
$$|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \tag{1-13}$$

速度是矢量，它的大小等于单位时间内发生位移的大小，方向为当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向，即轨迹曲线在 P 处的切线方向，如图 1-4 所示。

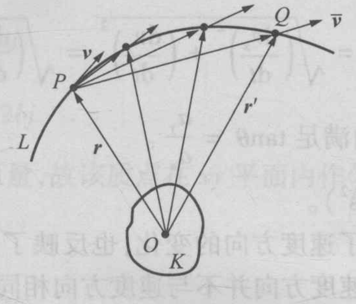


图 1-4

1.2.3 加速度

质点在运动过程中，瞬时速度的大小和方向都可能变化，为衡量速度的变化，我们将从曲线运动出发引出加速度的概念。

如图 1-5 所示，设在时刻 t，质点位于点 P，其速度为 $\boldsymbol{v}(t)$，在时刻 $t+\Delta t$，质点位于点 Q，其速度为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，则在时间间隔 Δt 内，质点的速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$，它在单位时间内的速度增量，即平均加速度为

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-14}$$

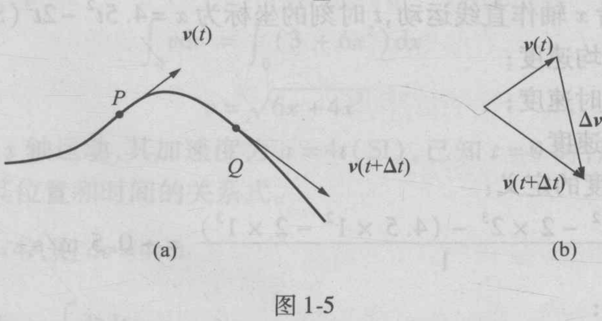


图 1-5

平均加速度与一定时间间隔相对应，其大小反映此时间间隔内速度的平均变化，其方向沿速度增量的方向。

速度在 t 时刻的瞬时变化，与 Δt 时间内质点的平均加速度近似，很明显，Δt 越小，这种近似越准确。当 $\Delta t\to 0$ 时，平均加速度的极限值叫做瞬时加速度，用 $\boldsymbol{a}$ 表示，有

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-15}$$

$\boldsymbol{a}$ 为质点在 t 时刻的瞬时加速度，简称加速度，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-16}$$

加速度等于速度对时间的一阶导数或位矢对时间的二阶导数。

在平面直角坐标系中，有

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j} \tag{1-17}$$

式中，$\boldsymbol{a}_x=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$\boldsymbol{a}_y=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$。$\boldsymbol{a}_x$、$\boldsymbol{a}_y$ 分别称为 $\boldsymbol{a}$ 在 x、y 轴上的分量。

$\boldsymbol{a}$ 的大小：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}_x^2+\boldsymbol{a}_y^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$

$\boldsymbol{a}$ 的方向：$\boldsymbol{a}$ 与 x 轴正向夹角满足 $\tan\theta=\dfrac{a_y}{a_x}$。

加速度的单位是米/秒^2（$\mathrm{m/s^2}$）。

应当注意，加速度 $\boldsymbol{a}$ 既反映了速度方向的变化，也反映了速度数值的变化。所以，质点做曲线运动时，任一时刻质点的加速度方向并不与速度方向相同，即加速度方向不沿着曲线的切线方向。在曲线运动中，加速度的方向指向曲线的凹侧。

1.2.4　质点运动学的两类问题

1. 质点运动学的第一类问题

已知质点的运动方程，求质点在任意时刻的速度和加速度。

基本解题方法：将运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 对时间求一阶导数，即 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}$，可求得速度；对时间求二阶导数，即 $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{a}$，可求得加速度。

【例 1】　一质点沿 x 轴作直线运动，t 时刻的坐标为 $x=4.5t^2-2t^3$（SI）。试求：

（1）第 2 秒内的平均速度；

（2）第 2 秒末的瞬时速度；

（3）第 3 秒末的加速度。

解：（1）由平均速度的定义：

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{4.5\times 2^2-2\times 2^3-(4.5\times 1^2-2\times 1^3)}{1}=-0.5\ \mathrm{m/s}$$

（2）由速度的定义：

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=9t-6t^2$$

$t=2\mathrm{s}$ 时，有 $v_2=9\times 2-6\times 2^2=-6\ \mathrm{m/s}$

（3）由加速度的定义：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=9-12t$$

$t=3\text{s}$ 时，有 $a=9-12\times3=-27\text{m/s}^2$

加速度为负，说明加速度的方向为 x 轴负方向。

【例 2】 一质点在平面上运动，已知质点位置矢量的表达式为 $r=at^2i+bt^2j$（其中 a、b 为非零常量），则物体作何种运动？

解：由质点的位置矢量 $r=at^2i+bt^2j$ 知，

其运动方程为：$\begin{cases}x=at^2\\y=bt^2\end{cases}$

得轨道方程为：$\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}$，$y=\dfrac{b}{a}x$

质点的速度：$v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=2ati+2btj$

质点的加速度：$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2ai+2bj$

可见，质点的加速度为非零恒量，故该质点在 xy 平面内作匀变速直线运动，其轨迹方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$。

2. 质点运动学的第二类问题

已知速度和加速度及初始条件（初始时刻质点的位置和速度），求质点的运动方程。

基本解题方法：按有关物理量的定义式，写出相关物理量的微分方程；分离变量，运用初始条件并积分，可求得相应的物理量（对有关变量的函数关系）。

【例 3】 一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标的关系为 $a=3+6x^2$（SI）。如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度。

解：设质点在任意位置 x 处的速度为 v，则

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=3+6x^2$$

分离变量，两边积分：

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_0^x(3+6x^2)\mathrm{d}x$$

得 $$v=\sqrt{6x+4x^3}$$

【例 4】 一质点沿 x 轴运动，其加速度为 $a=4t$（SI），已知 $t=0$ 时，质点位于为 $x_0=10\text{m}$ 处，初速度 $v_0=0$，试求其位置和时间的关系式。

解：由题意，$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4t$，则 $\mathrm{d}v=4t\mathrm{d}t$

等式两边积分：$\int_0^v\mathrm{d}v=\int_0^t 4t\mathrm{d}t$，

得：$v=2t^2$

又因 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2t^2$，$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t 2t^2\mathrm{d}t$

则质点位置和时间的关系式为：$x=\dfrac{2}{3}t^3+10$（SI）

【例5】 一物体悬挂在弹簧上作竖直振动,其加速度为 $a=-ky$,式中,k 为常量,y 是以平衡位置为原点所测得的坐标,假定振动物体在坐标 y_0 处的速度为 v_0,试求速度 v 与坐标 y 的函数关系式。

解:$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$

又∵ $a=-ky$

∴ $-ky=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$

$$-\int ky\mathrm{d}y=\int v\mathrm{d}v$$

$$-\frac{1}{2}ky^2=\frac{1}{2}v^2+c$$

已知 $y=y_0$,$v=v_0$,则

$$c=-\frac{1}{2}{v_0}^2-\frac{1}{2}k{y_0}^2$$

因此,速度 $\boldsymbol{v}$ 与坐标 y 的关系式为:$\boldsymbol{v}^2={v_0}^2+k({y_0}^2-y^2)$。

1.3 一般曲线运动

上一节研究的运动是具有普遍意义的,在这个基础上我们对平面曲线运动进行研究。物体运动的轨迹在一个平面上的运动,称为平面曲线运动。此时,用自然坐标系描述物体的运动更为方便。

如图1-6所示,设质点在平面内做曲线运动,在已知运动轨迹上任选一点 O 为原点,沿质点的轨迹为"坐标轴",原点至质点位置的弧长 s 作为质点的位置坐标,弧长 s 称为平面自然坐标,它确定质点的位置,并在质点所在处 A 取一单位矢量沿曲线切线且指向自然坐标增加方向的矢量 $\boldsymbol{e}_\tau$,称为切向单位矢量,另取一单位矢量,沿曲线的法向且指向曲线的凹侧的矢量 $\boldsymbol{e}_n$,称为法向单位矢量。显然,沿轨迹上各点,自然坐标轴的方位是不断变化着的。

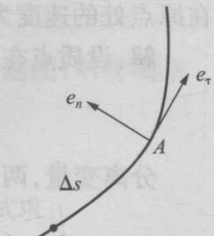


图1-6

1.3.1 自然坐标系下的加速度

在自然坐标系下,质点的运动方程为

$$s=s(t) \tag{1-18}$$

设质点在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 内所经历的路程(即弧长)为 Δs,则速度的定义式没变,即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-19}$$

质点的速度是沿着轨道的切线方向的,因此,在 t 时刻,质点速度可写成

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_\tau$$

由加速度的定义式可得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau}{\mathrm{d}t} \tag{1-20}$$

1. 切向加速度

式(1-20)中，第一项是由质点运动速度大小变化引起的，方向与 $\boldsymbol{e}_\tau$ 共线，称该项为切向加速度，记为

$$\boldsymbol{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}e_\tau = a_\tau \boldsymbol{e}_\tau \tag{1-21}$$

式(1-21)中，

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1-22}$$

式(1-22)中，a_τ 为加速度 a 的切向分量。

结论：切向加速度分量等于速度对时间的一阶导数。

2. 法向加速度

式(1-20)中，第二项是由质点运动方向改变引起的。

设 t 时刻质点位于点 A，切向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\tau$，$t+\Delta t$ 时刻位于点 B，切向单位矢量为 $\boldsymbol{e}'_\tau$，当 $\Delta t \to 0$ 时，$\Delta \boldsymbol{e}_\tau$ 垂直于 $\boldsymbol{e}_\tau$，即沿 $\boldsymbol{e}_n$ 方向，如图 1-7 所示。

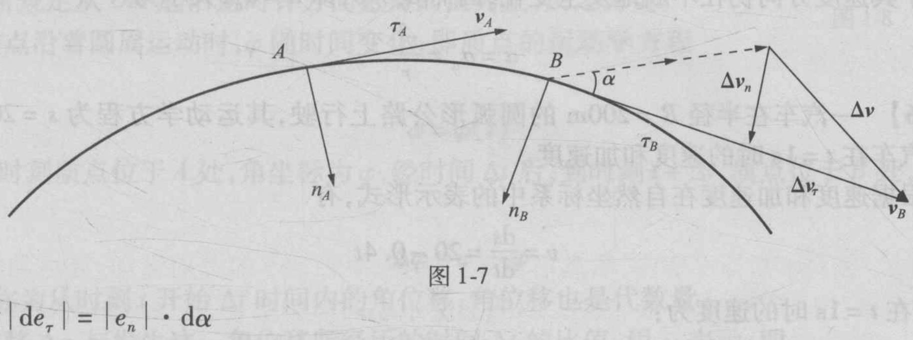


图 1-7

因为 $|\mathrm{d}e_\tau| = |e_n| \cdot \mathrm{d}\alpha$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}e_\tau}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}e_n = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \cdot \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}e_n = \dfrac{v\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}e_n$

式(1-20)中第二项为：

$$\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}e_\tau}{\mathrm{d}t} = v \cdot \frac{v\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{e}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

该项为矢量，其方向沿半径指向圆心，称为法向加速度，记为

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1-23}$$

大小为

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{1-24}$$

式(1-24)中，a_n 是加速度的法向分量。

结论：法向加速度分量等于速度平方除以曲率半径。

3. 总加速度

总加速度为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = a_\tau \boldsymbol{e}_\tau + a_n \boldsymbol{e}_n = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1-25}$$

大小为：

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \tag{1-26}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向可用 $\boldsymbol{a}$ 的方向与此时此质点速度 v 的方向所成夹角 φ 来表示，即

$$\varphi=\arctan\frac{a_n}{a_\tau} \tag{1-27}$$

讨论：圆周运动的加速度是怎样的？

圆周运动是曲率半径为恒量的曲线运动，是曲线运动的特例。圆周运动的曲率半径为 R，因此，圆周运动的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau+\frac{v^2}{r}\boldsymbol{e}_n$$

其中法向加速度 a_n 的方向指向圆心，称为向心加速度。

质点做匀速圆周运动时，其速率 v 不随时间 t 发生变化，则加速度的切向分量为 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$。但由于其速度方向仍在不断地发生变化，因而 $a_n\neq0$，即 $a=a_n$，大小为

$$a=a_n=\frac{v^2}{r} \tag{1-28}$$

【例6】 一汽车在半径 $R=200\text{m}$ 的圆弧形公路上行驶，其运动学方程为 $s=20t-0.2t^2$（SI），求汽车在 $t=1\text{s}$ 时的速度和加速度。

解：根据速度和加速度在自然坐标系中的表示形式，有

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20-0.4t$$

汽车在 $t=1\text{s}$ 时的速度为：

$$v=19.6\ \text{m/s}$$

由加速度的计算公式：

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(20-0.4t)^2}{R}$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-0.4$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{(-0.4)^2+\left[\frac{(20-0.4t)^2}{R}\right]^2}$$

汽车在 $t=1\text{s}$ 时的加速度为：

$$a=\sqrt{(-0.4)^2+\left[\frac{(20-0.4\times1)^2}{200}\right]^2}=1.96\ \text{m/s}^2$$

【例7】 由楼窗口以水平初速度 v_0 射出一发子弹，取枪口为原点，沿 v_0 方向为 x 轴，竖直向下为 y 轴，并取发射时 t 为0，试求：

（1）子弹在任一时刻 t 的位置坐标及轨迹方程；

（2）子弹在 t 时刻的速度、切向加速度和法向加速度。

解：（1）$x=v_0t$，$y=\frac{1}{2}gt^2$