电子科技大学研究生系列教材建设项目

数学物理
方程学习指导教程

李明奇　杨　春◎主编

Shuxue Wuli
Fangcheng Xuexi Zhidao Jiaocheng

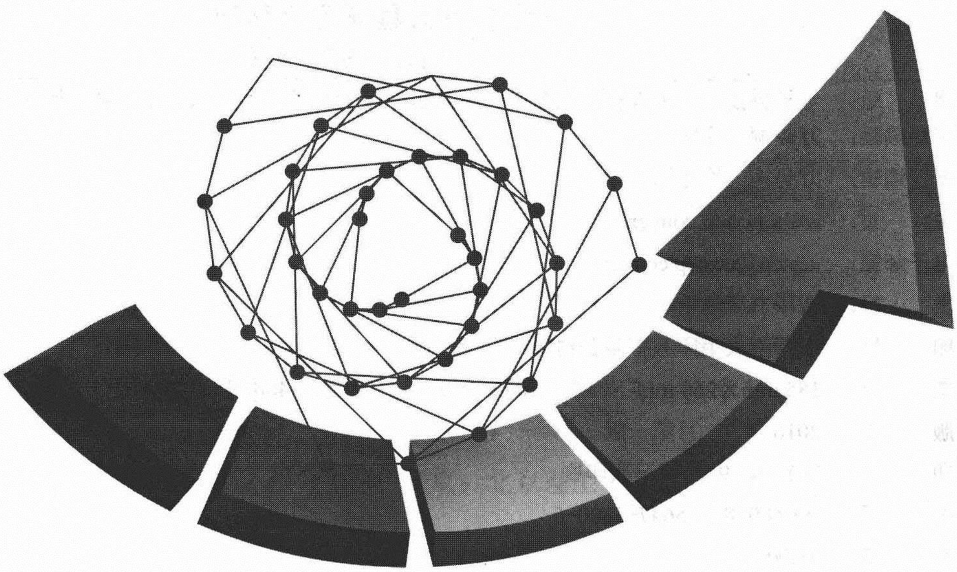
电子科技大学出版社

电子科　　建设项目

数学物理方程学习指导教程

李明奇　杨　春◎主编

Shuxue Wuli
Fangcheng Xuexi Zhidao Jiaocheng



UESTCP 电子科技大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程学习指导教程 / 李明奇，杨春主编.
--成都：电子科技大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-5647-3800-6

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… ②杨… Ⅲ. ①数学物理方程
Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 168771 号

数学物理方程学习指导教程

李明奇，杨春 主编

出　　版： 电子科技大学出版社（成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编：610051）
策划编辑： 万晓桐　徐守铭
责任编辑： 万晓桐　徐守铭
主　　页： www.uestcp.com.cn
电子邮箱： uestcp@uestcp.com.cn
发　　行： 新华书店经销
印　　刷： 成都市火炬印务有限公司
成品尺寸： 185 mm×260 mm　　**印张** 19.25　　**字数**　480 千字
版　　次： 2016 年 9 月第一版
印　　次： 2016 年 9 月第一次印刷
书　　号： ISBN 978-7-5647-3800-6
定　　价： 48.00 元

前　言

数学物理方程是工程数学中的重要内容，许多专业都会开设这门课程. 本学习指导教程结合编者在电子科技大学出版社出版的教材《数学物理方程》，总结了数学物理方程的一些基本概念、定解问题的经典解法、两类特殊函数及其在数学物理中的应用. 经典解法包括，分离变量法、行波法、积分变换法、Green 函数法、保角变换法等. 特殊函数包括，Bessel 函数、Legendre 多项式.

不论是数学物理方程，还是特殊函数，其数学物理内容都是极其丰富的. 学习指导教程通过大量的例题分析和习题解答在内容和方法上对教材进行了补充和扩展. 通过学习指导既能加强求解数学物理方程的基本方法训练，又能在专业上加强联系，为后继专业课和工程应用提供指导.

附录中，提供的八套模拟题，比较全面地覆盖了全书内容. 所附参考答案，推导翔实，介绍了各种方法的具体应用. 模拟题为学习本课程的同学提供了自我检测的途径.

本书的第一章、第二章、第三章、第四章由杨春副教授编写. 第五章、第六章、第七章、第八章由李明奇副教授编写. 第九章与附录由黄晋教授编写. 全书由李明奇统稿. 在编写和出版过程中还得到了电子科技大学研究生院的大力支持. 由于编者水平有限，恳请读者给予批评、指正.

编　者

2016 年 9 月

目 录

第1章 三类典型方程定解问题的建立

1.1 基本内容

一、三类方程定解问题建立需要用到的物理学定律

（一）几个典型力学定律

1．牛顿第二定律

物体的加速度a跟物体所受的合外力F成正比，跟物体的质量m成反比，加速度的方向跟合外力的方向相同. 其数学表达式为

$$F = ma$$

其中，力F的单位是牛顿（N），质量m的单位是千克（kg），加速度a的单位是米/秒^2（$\mathrm{m/s^2}$）.

2．转动定律

一个可绕固定转轴转动的刚体，其转动的角加速度ε的量值与刚体受到的合外力矩M的量值成正比，而与它的转动惯量I成反比. 如果力矩M的单位是牛顿·米（N·m），转动惯量I的单位是千克·米^2（$\mathrm{kg\cdot m^2}$），角加速度ε的单位是弧度/米^2（$\mathrm{rad/s^2}$），那么转动定律的数学表达式为

$$M = I\varepsilon .$$

3．虎克定律

（1） 在弹性限度内，弹簧的弹性力的大小与弹簧伸长量成正比，方向与弹簧伸长方向相反，其数学表达式为

$$F = -kx$$

其中，k是弹性系数.

（2） 弹性体的应力（协强）P与弹性体的相对伸长（伸长率）成正比，其数学表达式为

$$P = Yu_x$$

其中，Y是杨氏弹性模量；u_x是相对伸长.

（二）几个典型热力学定律与扩散定律

1．傅里叶实验定律（热传导定律）

当物体内部存在温差时，物体内部会产生热量流动. 在$\mathrm{d}t$时间里，沿着热流方向

流过面积微元 dS 的热流量为

$$dQ = -ku_n dSdt$$

其中，k 称为热传导系数，它与物体材料有关；u_n 为温度函数 $u(M,\ t)$ 沿着热流方向 n 的方向导数，式中的负号表示热量由高温向低温流动.

定义热流密度 q 为

$$q = \frac{dQ}{dSdt} = -ku_n.$$

2. 牛顿冷却定律

设 u_0 是周围介质的温度，$u\big|_S$ 为物体表面温度. 物体冷却时，单位时间内流过单位面积放出的热量与物体和外界温差（$u\big|_S - u_0$）成正比，即冷却时热流密度为

$$q = k(u\big|_S - u_0)$$

其中，k 是比例系数.

3. 热量守恒定律

物体内部温度升高所吸收的热量 $Q_{吸}$，等于流入物体内部的净热量 $Q_{净}$ 与物体内部热源产生的热量 $Q_{源}$ 之和，即

$$Q_{吸} = Q_{净} + Q_{源}.$$

4. 扩散定律

当物体内部粒子浓度分布不均匀时，物体内部会产生粒子流动. 在 dt 时间里，沿着粒子流动方向流过面积微元 dS 的粒子流质量 dm 为

$$dm = -ku_n dSdt$$

其中，k 称为扩散系数，它与物体材料有关；u_n 为浓度函数 $u(M,\ t)$ 沿着粒子流方向 n 的方向导数，式中的负号表示粒子由高浓度处向低浓度处流动.

定义粒子流密度 q 为

$$q = \frac{dM}{dSdt} = -ku_n.$$

（二）几个典型的电磁学定律

1. 库仑定律

（1）放置于坐标原点的电量为 e 的点电荷在空间点 M 处所产生的电场的电势 u 为

$$u = \frac{e}{4\pi\varepsilon r}$$

其中，ε 为介电质的介电常数；r 是 M 到原点的距离.

（2） 带有电荷密度为 e 的无限长导线在离导线距离为 r 处产生的电势为

$$u = \frac{e}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{1}{r}$$

其中，ε 为介电质的介电常数.

2. 高斯定律

在静电场中，通过任意一个闭合曲面的电通量，等于这个闭曲面所包围的自由电荷的电量的 $\frac{1}{\varepsilon}$ 倍，即

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon}\iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

其中，ε 为介电质的介电常数；ρ 为电荷体密度.

3. 焦耳—楞次定律

电流通过电阻为 R 的导体时产生的热量与通过导体的电流强度 I 的平方，导体电阻 R，通电时间 t 均成正比，即

$$Q = I^2 Rt .$$

4. 基尔霍夫定律

（1） 第一定律

汇合在节点的电流代数和为零，即

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0 .$$

（2） 第二定律

沿着任一闭合回路的电势增量的代数和为零，即

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum \xi_k .$$

5. 法拉第电磁感应定律

不论任何原因使通过回路面积的磁通量发生变化时，回路中产生的的感应电动势与磁通量对时间的变化率的负值成正比，即

$$\xi = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中，N 为感应回路中串联线圈的匝数.

由该定律知道，当闭合回路（或线圈）中的电流发生变化而引起自身回路的磁通量改变而产生的自感电动势为

$$\xi = -L\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

其中，L 为自感系数.

二、三类典型方程建立方法

（一） 波动方程、热传导方程的建立方法

波动方程与热传导方程的建立可采用微元法，这也是建立微分方程常常采用的方

法. 具体过程如下：

1. 明确物理过程与研究对象（待研究的物理量）；

2. 建立坐标系，恰当选取待分析的微元并进行微元分析；

分析微元与相邻部分之间的相互作用，并用物理定律和算式表达微元与邻近部分的相互作用.

3. 利用数学方法整理、化简算式.

（二）静电场的电位方程建立

设空间有一分布电荷，其体密度为 $\rho(x, y, z)$，$\boldsymbol{E}$ 表示电场强度，$u(x, y, z)$ 表示电位，在国际单位制下，静电场满足下面条件.

1. 静电场的发散性：$\nabla\cdot(\varepsilon \boldsymbol{E})=\rho$；

2. 静电场的无旋性：$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$；

3. 静电场存在场势函数：$\boldsymbol{E}=-\nabla u$.

这里 ε 是介电常数. 将条件 3 代入条件 1 中，可得

$$\Delta u=-\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

三、定解条件

具体物理系统所处物理状况除受一般物理规律支配外，还受系统所处的“环境”和系统的“历史状况”的影响. 系统所处的“环境”状况称为边界条件；系统的“历史：状况称为初值条件.

（一）三类边界条件

1. 第一类边界条件

$$u\big|_S=f(M, t);$$

2. 第二类边界条件

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=f(M, t);$$

3. 第三类边界条件

$$\left[\alpha+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right]\bigg|_S=f(M, t).$$

如果 $f(M, t)\equiv 0$，上面三类边界条件分别称为第一类、第二类、第三类齐次边界条件.

（二）衔接条件

由不同材料组成的系统，反映两个不同介质交界处的物理状况的条件称为衔接条件. 当物理系统涉及几种介质时，必须写出恰当的衔接条件.

（三）周期性条件、有界性条件与无穷远条件

1．周期性条件

在极坐标、柱面坐标和球坐标系的经度坐标中，实际物理量常满足周期性条件，即

（1）在极坐标中：$u(r,\ \theta+2\pi)=u(r,\ \theta)$；

（2）在柱面坐标中：$u(r,\ \theta+2\pi,\ z)=u(r,\ \theta,\ z)$；

（3）在球坐标中：$u(r,\ \theta,\ \varphi+2\pi)=u(r,\ \theta,\ \varphi)$.

2．有界性条件

在没有源处，物理量一般有界. 常考虑物理量在坐标原点处有界. 例如，在静电场中，电势在原点（无电荷）有界；在温度场中，中心温度有界等.

3．无穷远条件

反映物理量在无穷远处的状况的条件称为无穷远条件.

（四）初始条件

初始条件是系统在 t=0 时的状态. 初始条件的个数等于微分方程的阶数.

四、定解问题

所谓定解问题，是指反映一个具体物理过程的数学表达式，它包括描述该问题的微分方程（泛定方程）和定解条件.

1. 三种类型的定解问题

（1）初值问题：由泛定方程和初始条件构成的定解问题；

（2）边值问题：由泛定方程和边界条件构成的定解问题；

（3）混合问题：由房顶方程，边界条件和初始条件构成的定解问题.

2. 建立定解问题的方法

（1）根据问题背景写出物理方程（泛定方程）；

（2）如果有边界条件，要根据物理背景写出边界条件，即考虑描述物理量在边界上状况的三类边界条件和衔接条件. 必要时，还要考虑周期条件、有界性条件、无穷远条件等；

（3）考虑初始条件：如果物理问题涉及时间变量，则需写出初始条件. 如果方程中对时间的导数为 n 阶，则需要 n 个初始条件表达式.

1.2 问题解答

问题 1 什么叫数学物理方程？典型的数学物理方程分为哪几类?它们对应的典型物理背景分别是什么?

答：数学物理方程主要涉及一些典型的、具有物理学背景的、反映物理量时空关系或空间关系的偏微分方程.

典型的数学物理方程包括波动方程、热传导（或扩散）方程以及稳态场方程.

波动方程对应的典型物理背景是振动问题，热传导方程对应的典型物理背景是热传导或粒子扩散问题，稳态场方程对应的典型物理背景是静电场问题.

问题 2　什么叫边界条件？如何书写边界条件？一个边界需要几个边界条件来描述？

答：（1）物理过程边界状况的数学表达式称为边界条件.

（2）书写边界条件的步骤是：明确环境影响通过的所有边界；分析边界所处的物理状况；利用物理规律写出待求物理量在边界上的表达式.

（3）不管是何种类型的边界条件，类似于初始条件的情况，变量 x 的二阶偏微分方程要求两个边界条件（一端点一个），而 x 的四阶偏微分方程要求四个边界条件（一端点两个）.

问题 3　建立数理方程要经历哪几个步骤？用数理方程研究物理问题需要经历哪几个步骤？

答：(1) 建立数理方程一般要经历三个步骤：①明确物理过程与研究对象（待研究物理量）；②取出恰当微元，分析微元和相邻部分的相互作用，根据物理定律用算式表达这种作用；③化简、整理算式.

(2) 用数理方程研究物理问题一般需要经历三个步骤：①导出定解问题（包括方程和定解条件）；②求定解问题；③对求出的解进行讨论（适定性）并做出适当的物理解释.

问题 4　什么叫衔接条件？如何给出衔接条件？举例说明.

答：（1）由不同介质组成的系统，物理量在介质交界处的状况的数学表达式，称为衔接条件.

（2）在两种不同介质交界处需要给出两个衔接条件.

（3）如由两种不同材料连接而成的杆的纵向振动问题，在连接点 $x=x_0$ 处，其位移和应力均相等，因此两个衔接条件为

$$\begin{cases} u_1\Big|_{x=x_0} = u_2\Big|_{x=x_0} \\ E_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=x_0} = E_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=x_0} \end{cases}$$

其中，E_1, E_2 分别为两种介质的杨氏弹性模量；u_1, u_2 分别是两种介质中的振动位移函数，即待求物理量.

问题 5　怎样理解无初始条件定解问题？怎样理解无边界条件定解问题？怎样用微元法来建立边界条件表达式？

答：（1）对于一个定解问题来说，物理量在一定时间内变化可能受到初始时刻状况的影响，但是，经历一定时间后，初始影响可能会衰减为零，于是，物理量不再与初始状况相关，我们继续研究它时，就可忽略初始条件，而定解问题就被认为是无初始条件定解问题. 当然，稳态场问题（静电场，稳定浓度分布，稳定温度分布，无旋稳恒电流场，无旋稳恒流动）根本就与时间无关，自然也就成为无初始条件定解问题.

（2）当我们研究一个物理量时，边界的影响还远远没有到来，此时，我们可以认为定解问题为无边界定解问题.

（3）如果用微元法来建立边界条件表达式，最关键的一点是恰当取出一个包含边界在内的微元，通过微元分析法，建立起微元满足的数学等式，最后对微元线度取极限即可.

1.3 典型例题分析

例 1 导出两端固定的细弦线的有阻尼微小横振动方程.

分析 研究对象是弦线上的点的位移随时空变化规律；由于是细弦线，所以，弦线的重力可以忽略；由于考虑阻尼，所以可设单位弦线所受阻力 bu_t（b 为常数，$u(x,t)$ 为振动位移）.

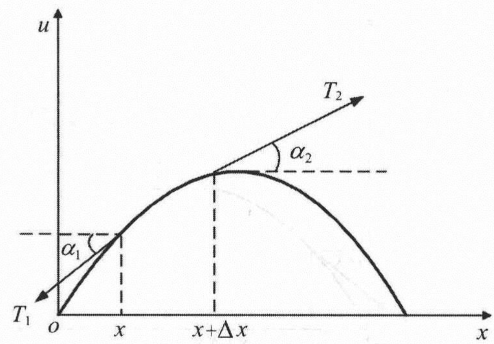


图 1.1

解：如图 1.1 所示，取弦线微元 $[x, x+\Delta x]$

（1）微元弦线所受水平合力为

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1\ ;$$

微元弦线所受铅直合力为

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 - bu_t(x+\eta\Delta x,\ t)\Delta x\ .$$

其中，T_1，T_2 为弦线 Δx 段两端所受张力，$0<\eta\leqslant 1$.

（2）由于弦线作横向振动，因此，由牛顿运动定律得到

$$\begin{cases} T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0 \\ T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 - bu_t(x+\eta\Delta x,\ t)\Delta x = \rho u_{tt}(x+\eta\Delta x,\ t)\Delta x \end{cases}.$$

（3）由于是微小振动，α_1, α_2接近于0，所以，由等价无穷小近似以及导数的几何意义有

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = u_x(x,\ t),\ \ \sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = u_x(x+\Delta x,\ t),\ \text{且}\cos\alpha_1 \approx \cos\alpha_2 \approx 1.$$

因此，（2）中的方程化为

$$\begin{cases} T_2 = T_1 = T \\ T_2u_x(x+\Delta x,\ t) - T_1u_x(x,\ t) - bu_t(x+\eta\Delta x,\ t)\Delta x = \rho u_{tt}(x+\eta\Delta x,\ t)\Delta x \end{cases}$$

进一步得到：$Tu_{xx}(x+\theta\Delta x,\ t)\Delta x - bu_t(x+\eta\Delta x,\ t)\Delta x = \rho u_{tt}(x+\eta\Delta x,\ t)\Delta x$

令$a^2 = \dfrac{T}{\rho}$, $c = \dfrac{b}{\rho}$，则当$\Delta x \to 0$时有

$$u_{tt} + cu_t = a^2u_{xx}.$$

注：如果不是微小振动，就不能导出上面的方程.

例2　一长为l的匀质柔软轻绳，其一端固定在竖直轴上，绳子以角速度ω转动，试导出此绳相对于水平线的横振动方程.

分析　轻绳在围绕竖直轴以角速度ω转动过程中，弦线相对于水平轴作横振动，因此，振动的平衡位置是水平轴，弦线上点的位移可设置为$u(x,\ t)$.

解：取弦线微元$[x,\ x+\Delta x]$，在时刻t时，弦线微元状态如图1.2所示.

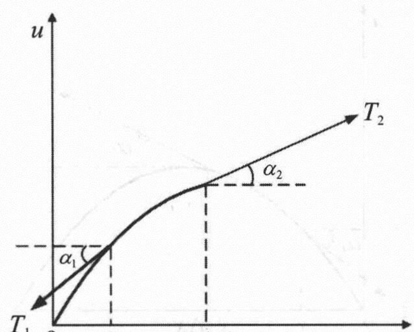


图 1.2

通过微元分析法，我们可以得到微元横振动的方程为

$$T(x+\mathrm{d}x)u_x(x+\mathrm{d}x,\ t) - T(x)u_x(x,\ t) = u_{tt}\rho\mathrm{d}x \tag{1}$$

又绳子以ω角速度围绕竖直轴旋转，其上任意一点x处所受到的张力$T(x)$由从x到l的一段绳上的惯性离心力所提供，即

$$T(x) = \int_x^l \omega^2 x\rho\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2 - x^2) \tag{2}$$

将式（2）代入式（1）并整理得到

$$u_{tt}-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}[(l^2-x^2)u_x]=0.$$

例 3 细杆受到某种外界扰动而产生纵向振动. 以$u(x,t)$表示杆上位于x的点在时刻t偏离平衡位置的位移. 假设振动过程中所发生的张力服从虎克定律. 求证$u(x,t)$满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(Y\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

其中，$\rho(x)$为杆的线密度函数；Y为杆的杨氏弹性模量.

分析 细杆在受到外界扰动时，杆的伸缩引起杆上各点偏离平衡位置，即相同截面上点的位移$u(x,t)$发生改变.

证明：设杆的截面积为A，杆的一端为x轴坐标原点. 取杆微元$[x,x+\mathrm{d}x]$（如图 1.3 所示）.

根据牛顿第二定律，微元满足的运动方程为

$$T(x+\mathrm{d}x,t)-T(x,t)=\rho(x)A\mathrm{d}xu_{tt} \tag{1}$$

根据弹性体虎克定律，式（1）变为

$$AY\left[u_x(x+\mathrm{d}x,t)-u_x(x,t)\right]=\rho(x)A\mathrm{d}xu_{tt} \tag{2}$$

将式（2）化简得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(Y\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

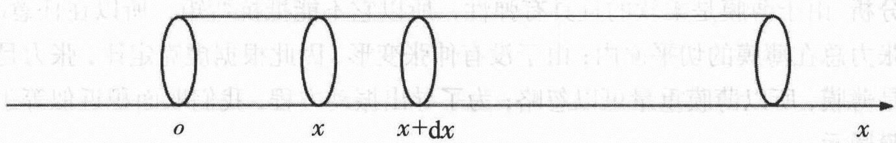


图 1.3

例 4 求证：匀质圆锥杆的纵振动方程为

$$u_{tt}=\frac{a^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial u}{\partial x})$$

其中，$a^2=\dfrac{Y}{\rho}$；Y为杨氏弹性模量；ρ为椎体的体密度.

分析 为方便推导，可假设圆锥杆高为h. 显然，同一截面上的点的振动位移相同，因此以圆锥杆的轴线为x轴，锥点为坐标原点，采用微元分析法导出其振动方程.

证明：如图 1.4 所示，取杆微元$[x,x+\mathrm{d}x]$.

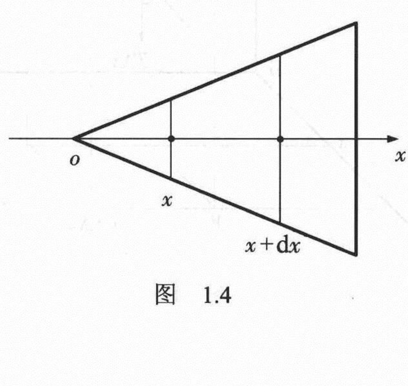


图 1.4

微元在振动过程中受到两个张力作用，因此由牛顿第二定律得

$$T_2 - T_1 = \rho S(x)\mathrm{d}x u_{tt} \tag{1}$$

由弹性体的虎克定律得

$$T_2 = YS(x+\mathrm{d}x)u_x(x+\mathrm{d}x,t) \tag{2}$$

$$T_1 = YS(x)u_x(x,t) \tag{3}$$

所以得微元体的振动方程为

$$YS(x+\mathrm{d}x)u_x(x+\mathrm{d}x,t)_2 - YS(x)u_x(x,t) = \rho S(x)\mathrm{d}x u_{tt} \tag{4}$$

化简式（4）得

$$\rho S(x)\mathrm{d}x u_{tt} = Y\frac{\partial}{\partial x}(S(x)u_x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

由简单的几何方法求得

$$S(x) = \pi\left(\frac{x}{h}\right)^2 \tag{6}$$

将式（6）代入式（5）化简整理得

$$u_{tt} = \frac{a^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

例 5　导出柔软的具有弹性的无伸张变形的薄膜横振动方程.

分析　由于薄膜是柔软的且具有弹性，所以它不能抵抗弯矩，所以在任意时刻，它的张力总在薄膜的切平面内；由于没有伸张变形，因此根据虎克定律，张力是常数；由于是薄膜，所以薄膜重量可以忽略；为了导出振动方程，我们取面积近似等于 $\Delta x\Delta y$ 的薄膜微元.

解：如图 1.5 所示，我们取位于 $[x, x+\Delta x]$，$[y, y+\Delta y]$ 区域内的薄膜微元. 设 T 表示单位长度上受到的张力，则作用在微元薄膜上各边沿上的张力分别是 $T\Delta x$, $T\Delta y$.

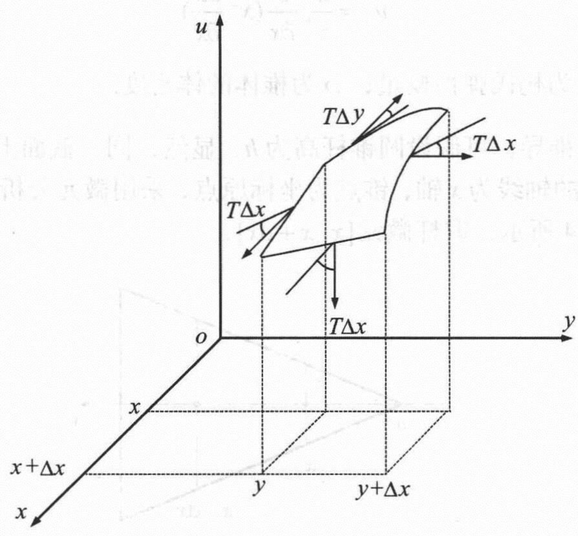


图　1.5

（1）作用在微元薄膜上的竖直方向的合力为

$$T\Delta x\sin\beta - T\Delta x\sin\alpha + T\Delta y\sin\delta - T\Delta y\sin\gamma .$$

由于振动微小，所以上式可变为

$$T\Delta x(\tan\beta - \tan\alpha) + T\Delta y(\tan\delta - \tan\gamma) .$$

（2）根据牛顿第二定律得微元满足的运动方程为

$$T\Delta x(\tan\beta - \tan\alpha) + T\Delta y(\tan\delta - \tan\gamma) = \rho\Delta x\Delta y u_{tt} \quad （1）$$

其中，ρ 为单位薄膜质量.

由导数几何意义：$\tan\alpha \approx u_y(x_1, y)$，$\tan\beta \approx u_y(x_2, y+\Delta y)$，$\tan\delta \approx u_x(x, y_1)$，$\tan\gamma \approx u_x(x+\Delta x, y_2)$，其中 x_1, x_2 是 x 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间的值，y_1, y_2 是 y 在 y 与 $y+\Delta y$ 之间的值. 将这些值代入式（1）得

$$T\Delta x\left[u_y(x_2, y+\Delta y) - u_y(x_1, y)\right] + T\Delta y\left[u_x(x+\Delta x, y_2) - u_x(x, y_1)\right] = \rho\Delta x\Delta y u_{tt} .$$

将上式两端同时除以 $\rho\Delta x\Delta y$ 得

$$\frac{T}{\rho}\left[\frac{u_y(x_2, y+\Delta y) - u_y(x_1, y)}{\Delta y} + \frac{\left[u_x(x+\Delta x, y_2) - u_x(x, y_1)\right]}{\Delta x}\right] = u_{tt}$$

化简即得到

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) = c^2\Delta u ,$$

其中，$c^2 = \dfrac{T}{\rho}$；Δ 为拉普拉斯算子.

注：上式称为二维自由振动波动方程，三维自由振动波动方程为

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = c^2\Delta u .$$

例 6 匀质导线电阻率为 r，通有均匀分布的直流电，电流密度为 j，试推导导线内的热传导方程.

分析 该例研究的是导线内温度随时空的变化规律. 由于电流 I 要在导体内产生热量，因此，该问题属于有热源的热传导问题，可以采用微元分析法建立热传导方程.

解：如图 1.6 所示，以导线的一端作为坐标原点，导线轴作为 x 轴. 取导线微元 $[x, x+\mathrm{d}x]$.

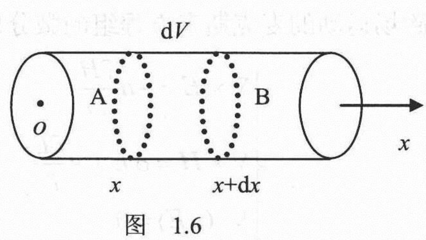


图 1.6

设导线截面积为 S. 由傅里叶实验定律，在 $\mathrm{d}t$ 时间里从 A 通过左边截面流入微元 $\mathrm{d}V$ 的热量为 $-ku_x(x, t)S\mathrm{d}t$，而在 $\mathrm{d}t$ 时间里从微元 $\mathrm{d}V$ 通过微元右边截面流出微元的热