

DONGLIXUE
JI GONGCHENG YINGYONG

动力学及工程应用

任述光 吴明亮 谢方平 孙松林 编著 ©



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

动力学及工程应用

任述光 吴明亮 谢方平 孙松林 编著

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书主要介绍了质点(系)相对非惯性参考系的动力学问题、变质量质点系的动力学问题、刚体定点转动的动力学问题、碰撞问题、两自由度振动问题等,这些问题是工程技术中经常遇到的专题,而以牛顿力学为主要内容的理论力学教材很少涉及。此外,介绍了构成分析力学基础的达朗贝尔原理、虚位移原理、动力学普遍方程与拉格朗日方程,以便读者掌握求解复杂约束质点系动力学问题的新方法。本书取材广泛、内容新颖,既阐明基本概念,又注重理论在工程中的应用。

本书可作为研究生学习动力学课程的教材,也可作为高等教育自学参考书,还可供从事机械类专业研究设计的广大工程技术人员参考。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

动力学及工程应用/任述光等编著. —北京:北京理工大学出版社, 2016.9

ISBN 978-7-5682-3220-3

I. ①动… II. ①任… III. ①动力学 IV. ①O313

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第243510号

出版发行/北京理工大学出版社有限责任公司

社 址/北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编/100081

电 话/(010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址/<http://www.bitpress.com.cn>

经 销/全国各地新华书店

印 刷/北京泽宇印刷有限公司

开 本/710毫米×1000毫米 1/16

印 张/10.25

字 数/220千字

版 次/2016年9月第1版 2016年9月第1次印刷

定 价/48.00元

责任编辑/李秀梅

文案编辑/杜春英

责任校对/周瑞红

责任印制/马振武

图书出现印装质量问题,请拨打售后服务热线,本社负责调换

前 言

动力学的基本定理,如质点运动微分方程、质心运动定理、动量定理、动量矩定理、动能定理及相应的守恒定律是牛顿力学的重要组成部分。工程实际中,可能还会遇到质点(系)相对非惯性系的动力学问题、变质量质点系的动力学问题、刚体定点转动的动力学问题、碰撞问题、两自由度振动问题等,而这些问题在一般的以牛顿力学为主要内容的理论力学教材中很少涉及。

实际力学体系除受到促使其运动状态改变的主动动力,往往还存在很多限制其运动的约束条件,体现这些约束条件的约束力都要作为未知数出现在运动微分方程中,使未知量增加,给解算带来许多麻烦;而在牛顿力学基础上发展起来的分析力学着眼于功和能,在一定条件下,常常可以不考虑约束反作用力。如在理想条件下,用虚位移原理解决力学体系的平衡问题可撇开众多的未知约束力,直接得出平衡条件,比用牛顿力学中刚体受力的平衡方程方便得多;由于虚功的概念、广义坐标的引入,利用达朗贝尔-虚位移原理解决力学体系的动力学问题,也可撇开约束力得解,比用牛顿方程及由此推出的动量定理、动量矩定理方便;从拉格朗日函数可直接写出力学体系的运动方程——拉格朗日方程,具有明显的优点,拉格朗日方程正是分析力学的基础。

基于上述原因,作者编著了《动力学及工程应用》,目的在于帮助读者掌握理论力学教材中没有涉及的一些动力学问题求解的基本理论;同时,简单介绍分析力学入门的基础理论——拉格朗日方程,以便读者掌握复杂非自由质点系动力学问题求解的另一种更简洁方法。

本书可作为研究生学习动力学课程的教材,也可作为高等教育自学参考书,还可供从事机械类专业研究设计的广大工程技术人员参考。

本书编写得到“湖南农业大学研究生教材建设项目”资助,感谢湖南农业大学研究生院对本书出版的帮助。感谢本书的编辑和北京理工大学出版社工作人员的辛勤劳动。

由于作者水平有限,加上时间仓促,书中难免有疏漏和不足之处,热忱希望各位同行专家和读者提出宝贵意见。

作 者

2016 年于长沙

目 录

第 1 章 达朗贝尔原理	1
1.1 惯性力 质点的达朗贝尔原理	1
1.2 质点系的达朗贝尔原理	4
1.3 刚体惯性力系的简化	5
1.3.1 平移刚体惯性力系的简化	5
1.3.2 定轴转动刚体惯性力系的简化	6
1.3.3 平面运动刚体惯性力系的简化	7
1.4 定轴转动刚体的轴承约束力	10
习题一	15
第 2 章 虚位移原理	19
2.1 约束及其分类	19
2.1.1 几何约束和运动约束	19
2.1.2 定常约束和非定常约束	22
2.1.3 完整约束与非完整约束	22
2.1.4 双侧约束与单侧约束	23
2.2 广义坐标及自由度	24
2.2.1 广义坐标	24
2.2.2 坐标变分	24
2.2.3 广义坐标表示的非完整约束方程	26
2.2.4 自由度	27
2.3 虚功原理	28
2.3.1 虚位移与虚功	28
2.3.2 虚位移原理	30
2.4 用广义力表示的质点系的平衡条件	36
2.4.1 广义坐标表示的虚功方程	36
2.4.2 广义力的计算	37
2.4.3 保守系统的平衡条件	38
习题二	41
第 3 章 动力学普遍方程和拉格朗日方程	45
3.1 动力学普遍方程	45
3.2 拉格朗日方程	46

3.2.1	第二类拉格朗日方程	47
3.2.2	保守系统的拉格朗日函数	49
3.2.3	第二类拉格朗日方程应用举例	49
3.3	拉格朗日方程的初积分	53
3.3.1	能量积分	53
3.3.2	循环积分	54
习题三		56
第4章	碰撞理论及其应用	59
4.1	碰撞过程的特点与简化	59
4.1.1	碰撞力的概念	59
4.1.2	碰撞过程的基本假设	60
4.2	碰撞过程的基本定理	60
4.2.1	碰撞过程的动量定理 (冲量定理)	61
4.2.2	碰撞过程的动量矩定理 (冲量矩定理)	61
4.3	材料对碰撞的影响 恢复因数	62
4.4	两物体的对心碰撞	63
4.4.1	两球的对心正碰撞	63
4.4.2	两球的对心斜碰撞	68
4.5	碰撞对定轴转动及平面运动刚体的作用	71
4.5.1	碰撞对定轴转动刚体的作用 撞击中心	71
4.5.2	碰撞对平面运动刚体的作用	73
习题四		74
第5章	非惯性系及变质量质点系动力学问题	78
5.1	非惯性系质点动力学问题	78
5.1.1	运动参照系	78
5.1.2	非惯性参照系动力学	87
5.2	变质量质点系的运动	93
习题五		97
第6章	刚体的定点运动及陀螺近似理论	100
6.1	角位移与角速度	100
6.2	陀螺近似理论	107
6.2.1	陀螺的稳定性与进动性	107
6.2.2	赖柴 (Resal) 定理	109
6.2.3	陀螺运动的某些特性	109
6.3	陀螺近似理论的工程应用	111
习题六		112

第7章 机械振动基础	115
7.1 机械振动简介	115
7.2 无阻尼系统的自由振动	117
7.3 阻尼系统的自由振动	119
7.4 谐扰力作用下阻尼系统的强迫振动	121
习题七	129
第8章 两自由度系统的振动	130
8.1 概述	130
8.2 两自由度系统的自由振动	131
8.2.1 系统的运动微分方程	131
8.2.2 固有频率和主振型	131
8.2.3 系统对初始条件的响应	134
8.2.4 振动特性的讨论	135
8.2.5 主振型的正交性	137
8.3 两自由度系统的受迫振动	141
8.3.1 系统的运动微分方程	141
8.3.2 振动特性的讨论	142
8.3.3 动力减振器	145
习题八	153
参考文献	156

第 1 章 达朗贝尔原理

理论力学中以牛顿定律为基础研究质点和质点系的动力学问题，给出了求解质点和质点系动力学问题的基本定理。对于非自由质点系的动力学问题，利用牛顿定律导出的基本定理求解会略显烦冗。本书首先介绍研究非自由质点系动力学问题的另一种方法——达朗贝尔原理，它是用静力学平衡的观点解决动力学问题，又称为动静法。它在解决已知运动求约束力方面显得特别方便，因此在工程中得到广泛的应用，它和虚位移原理结合，可以推导出动力学普遍方程，成为分析力学的基础。

1.1 惯性力 质点的达朗贝尔原理

设非自由质点的质量为 m ，加速度为 a ，作用在质点上的主动力为 F ，约束力为 F_N ，如图 1-1 所示。根据牛顿第二定律，有

$$ma = F + F_N$$

将上式移项写为

$$F + F_N - ma = 0 \quad (1-1)$$

引入符号

$$F_I = -ma \quad (1-2)$$

式 (1-1) 成为

$$F + F_N + F_I = 0 \quad (1-3)$$

其中， F_I 具有力的量纲，称为质点的惯性力，它是加在质点上的一个虚拟力，它的大小等于质点的质量与加速度的乘积，方向与质点的加速度方向相反。式 (1-3) 形式上是一个汇交力系的平衡方程，它表示作用在质点上的主动力、约束力和虚加的惯性力在形式上构成平衡力系，称为质点的达朗贝尔原理。此原理是法国科学家达朗贝尔于 1743 年提出的。

在质点上虚加惯性力，利用达朗贝尔原理，将动力学问题转化成静力学平衡问题进行求解的方法称为动静法。应当指出：

(1) 达朗贝尔原理并没有改变动力学问题的性质。因为质点受到力的作用实际上并不是真正处于平衡状态，而是假想加在质点上的惯性力与作用在质点上的主动力、约束力在形式上构成平衡力系。

(2) 惯性力是一种虚拟力，但它是使质点改变运动状态的施力物体的反作

用力。

例如，系在绳子一端质量为 m 的小球，用手拉住绳的另一端使小球在水平面内以速度 v 做匀速圆周运动，如图 1-2 所示。小球受到绳子的拉力 F 而改变运动状态，产生法向加速度 a_n ，即 $F = ma_n$ 。小球对绳子的反作用力 $F' = -F = -ma_n$ ，这是由于小球具有惯性，力图保持其原有的运动状态，而对绳子施加的反作用力。

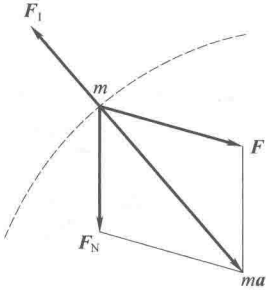


图 1-1

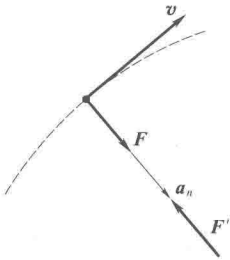


图 1-2

(3) 质点的加速度不仅可以由一个力引起，而且可以由同时作用在质点上的几个力共同引起，因此惯性力可以是对多个施力物体的反作用力。

例如图 1-3 所示圆锥摆，小球在摆线拉力 F_T 和重力 mg 作用下做匀速圆周运动，有

$$F_T + mg = ma$$

此时的惯性力为

$$F_I = -ma = -F_T - mg = F'_T + (-mg)$$

式中， F'_T 和 $-mg$ 分别为摆线和地球所受到小球的反作用力。由于它们不作用在同一物体上，当然没有合力，但它们构成了小球的惯性力系。

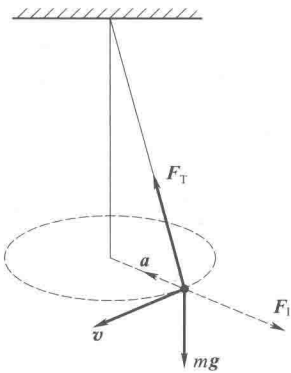


图 1-3

对于运动的质点来说，惯性力是虚设的，质点并没有处于平衡状态，惯性力隐含着质点加速度的信息。这里所谓的“形式上的平衡力系”，是指式 (1-3) 在数学形式上与平衡力系的平衡方程相似，这样就可以用静力学的平衡理论及方法来求解动力学的问题。达朗贝尔原理人为地引进惯性力就是将动力学问题当作静力学问题来处理，使“动”与“静”相通，这是人类认识理论上的一个飞跃。

惯性力在直角坐标轴上的投影为

$$\begin{cases} F_{lx} = -ma_x = -m \frac{d^2x}{dt^2} \\ F_{ly} = -ma_y = -m \frac{d^2y}{dt^2} \\ F_{lz} = -ma_z = -m \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases} \quad (1-4)$$

惯性力在自然坐标轴上的投影为

$$\begin{cases} F_{lr} = -ma_r = -m \frac{dv}{dt} \\ F_{ln} = -ma_n = -m \frac{v^2}{\rho} \\ F_{lb} = -ma_b = 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

还应指出, 式(1-3)是矢量式, 在具体应用时, 可以把它投影以后用其投影形式表示。其投影方程类似于汇交力系平衡方程的投影形式。在利用质点的达朗贝尔原理解题时, 需要首先根据已知条件和待解量选取研究对象, 分析受力, 并作受力图; 然后分析它的运动, 从而确定惯性力, 并把它虚加在质点上; 最后, 就可以利用质点的达朗贝尔原理列方程求解。下面举例说明。

例 1-1 有一圆锥摆, 如图 1-4 所示, 重力 $P = 9.8 \text{ N}$ 的小球系于长 $l = 30 \text{ cm}$ 的绳上, 绳的另一端系在固定点 O , 并与铅直线成 $\varphi = 60^\circ$ 。已知小球在水平面内做匀速圆周运动, 试求小球的速度和绳子的拉力。

解: 以小球为研究对象, 受有重力 P 、绳子的拉力 F_T 以及在小球上虚拟的惯性力, 如图 1-4 所示。由于小球在水平面内做匀速圆周运动, 其惯性力只有法向惯性力 F_l^n , 即

$$F_l^n = \frac{P}{g} a_n = \frac{P}{g} \frac{v^2}{l \sin \varphi}$$

方向与法向加速度相反。

由质点的达朗贝尔原理得

$$F_T + P + F_l^n = 0$$

将上式向自然坐标轴上投影, 得下面的平衡方程:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_n &= 0, & F_T \sin \varphi - F_l^n &= 0 \\ \sum_{i=1}^n F_b &= 0, & F_T \cos \varphi - P &= 0 \end{aligned}$$

解得

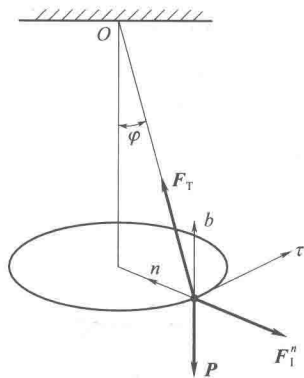


图 1-4

$$F_T = \frac{P}{\cos \varphi} = 19.6 \text{ N}, \quad v = \sqrt{\frac{Fgl \sin^2 \varphi}{P}} = 2.1 \text{ m/s}$$

1.2 质点系的达朗贝尔原理

设质点系由 n 个质点组成, 其中第 i 个质点的质量为 m_i , 加速度为 a_i , 作用于该质点的力有主动力 F_i 、约束力 F_{Ni} 和惯性力 $F_{li} = -m_i a_i$, 由质点的达朗贝尔原理, 对于第 i 个质点有

$$F_i + F_{Ni} + F_{li} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-6)$$

式 (1-6) 表明: 质点系中的每一个质点在主动 F_i 、约束力 F_{Ni} 、惯性力 F_{li} 作用下, 在形式上处于平衡。

若将作用在质点系上的力按外力和内力分, 设第 i 个质点上的外力为 F_i^e 、内力为 F_i^i , 式 (1-6) 为

$$F_i^e + F_i^i + F_{li} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-7)$$

式 (1-7) 表明: 质点系中的每一个质点在外力 F_i^e 、内力 F_i^i 、惯性力 F_{li} 作用下, 在形式上处于平衡。对于整个质点系而言, 外力 F_i^e 、内力 F_i^i 、惯性力 F_{li} ($i = 1, 2, \dots, n$) 在形式上构成空间平衡力系, 由静力学平衡理论知, 空间任意力系平衡的必要与充分条件是力系的主矢和对任一点的主矩均为零。即

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_i^e + \sum_{i=1}^n F_i^i + \sum_{i=1}^n F_{li} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_O(F_i^e) + \sum_{i=1}^n M_O(F_i^i) + \sum_{i=1}^n M_O(F_{li}) = 0 \end{cases} \quad (1-8)$$

由于内力是成对出现的, 内力的主矢 $\sum_{i=1}^n F_i^i = 0$, 内力的主矩 $\sum_{i=1}^n M_O(F_i^i) = 0$, 则式 (1-8) 为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_i^e + \sum_{i=1}^n F_{li} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_O(F_i^e) + \sum_{i=1}^n M_O(F_{li}) = 0 \end{cases} \quad (1-9)$$

即质点系的达朗贝尔原理: 作用在质点系上的所有外力与虚加在质点系上的惯性力在形式上构成平衡力系。

式 (1-9) 在直角坐标轴上的投影形式:

(1) 空间力系

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix}^e + \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy}^e + \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iz}^e + \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_x(F_i^e) + \sum_{i=1}^n M_x(F_{li}) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_y(F_i^e) + \sum_{i=1}^n M_y(F_{li}) = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_z(F_i^e) + \sum_{i=1}^n M_z(F_{li}) = 0 \end{array} \right. \quad (1-10)$$

(2) 平面力系

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix}^e + \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy}^e + \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_o(F_i^e) + \sum_{i=1}^n M_o(F_{li}) = 0 \end{array} \right. \quad (1-11)$$

1.3 刚体惯性力系的简化

在应用动静法解决非自由质点系的动力学问题时,需要在每个质点上虚加惯性力,当质点较多,特别是质点数目为无限多时,非常不方便。因此需要对虚加惯性力系进行简化,以便求解。下面分析刚体做平移运动、绕定轴转动和刚体做平面运动时惯性力系的简化。

1.3.1 平移刚体惯性力系的简化

当刚体做平移运动时,由于同一瞬时刚体上各点的加速度相等,则各点的加速度都用质心 C 的加速度表示,即 $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_C$,如图 1-5 所示。将惯性力加在每个质点上,组成平行的惯性力系,且均与质心 C 的加速度方向相反,惯性力系向任一点 O 简化,得惯性力系主矢

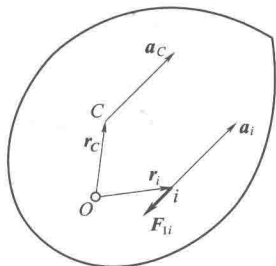


图 1-5

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}'_{IR} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{li} = \sum_{i=1}^n (-m_i \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n (-m_i \mathbf{a}_C) \\
 &= \left[\sum_{i=1}^n (-m_i) \right] \mathbf{a}_C = -m \mathbf{a}_C
 \end{aligned} \quad (1-12)$$

式中, m 为刚体总质量。

惯性力系的主矩

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{IO} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{li} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (-m_i \mathbf{a}_i) \\
 &= - \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{a}_C = -m \mathbf{r}_C \times \mathbf{a}_C
 \end{aligned} \quad (1-13)$$

式中, $\mathbf{r}_C$ 为质心 C 到简化中心 O 的矢径。若取质心 C 为简化中心, $\mathbf{r}_C = 0$, 则惯性力系的主矩为

$$\mathbf{M}_{IO} = 0$$

当简化中心不在质心 C 处时, 其主矩 $\mathbf{M}_{IO} \neq 0$ 。

结论: 刚体做平移运动时, 惯性力系简化为通过质心的一个合力, 其大小等于刚体的质量和加速度的乘积, 方向与加速度方向相反。

1.3.2 定轴转动刚体惯性力系的简化

这里只限于刚体具有质量对称平面且转轴垂直于此对称平面的特殊情形。

当刚体做定轴转动时, 先将刚体上的惯性力简化在质量对称平面上, 构成平面力系, 再将平面力系向转轴与对称平面的交点 O 简化。轴心 O 为简化中心, 如图 1-6 所示, 惯性力系的主矢为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}'_{IR} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{li} = \sum_{i=1}^n -m_i \mathbf{a}_i = -\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \right) \\
 &= -\frac{d}{dt} (m \mathbf{v}_C) = -m \mathbf{a}_C
 \end{aligned} \quad (1-14)$$

式中, $\mathbf{a}_C$ 为刚体质心加速度。

惯性力系的主矩为

$$\mathbf{M}_{IO} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{li}^r) = - \left(\sum_{i=1}^n m_i \alpha r_i \cdot r_i \right) = -\alpha \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = -J_O \alpha \quad (1-15)$$

式中, J_O 为刚体对垂直于质量对称平面转轴的转动惯量, α 为刚体转动的角加速度。

结论: 具有质量对称平面且转轴垂直于此对称平面的定轴转动刚体的惯性力系, 向转轴简化为一个力和一个力偶。此力的大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积, 方向与质心加速度方向相反, 作用线通过转轴; 此力偶矩的大小等于刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积, 转向与角加速度转向相反。

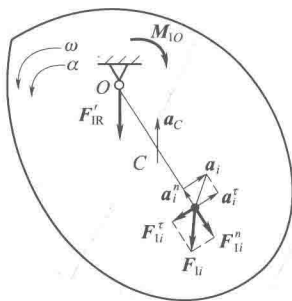


图 1-6

当转轴通过质心时, 质心的加速度 $a_C = 0$, $F'_{IR} = 0$, 则惯性力系简化为质心上的一个力矩。即

$$M_{I0} = -J_0\alpha \quad (1-16)$$

1.3.3 平面运动刚体惯性力系的简化

设刚体具有质量对称平面, 且刚体上的各点在对称平面保持平行的平面内运动。此时刚体上的惯性力可简化在此对称平面内的平面力系中。由平面运动的特点, 取质心 C 为基点, 如图 1-7 所示, 质心的加速度为 a_C , 绕质心 C 转动的角速度为 ω , 角加速度为 α , 惯性力系的主矢为

$$F'_{IR} = -m a_C \quad (1-17)$$

惯性力系的主矩为

$$M_{IC} = -J_C\alpha \quad (1-18)$$

式中, J_C 为刚体对过质心且垂直于质量对称平面的轴的转动惯量。

具有质量对称平面的刚体, 在平行于此平面运动时, 刚体的惯性力系简化为在此平面内的一个力和一个力偶。此力大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积, 方向与质心加速度方向相反, 作用线通过质心; 此力偶矩的大小等于刚体对通过质心且垂直于质量对称平面的轴的转动惯量与角加速度的乘积, 转向与角加速度转向相反。

例 1-2 均质圆柱体 A 的质量为 m , 在外缘上绕有一细绳, 绳的一端 B 固定不动, 如图 1-8 (a) 所示, 圆柱体无初速度地自由下降, 试求圆柱体质心的加速度和绳的拉力。

解: 对圆柱体 A 进行受力分析, 作用在其上的力有圆柱体的重力 mg 、绳的拉力 F_T 、作用在圆柱质心的虚拟惯性力 F_I 和力矩 M_{IA} , 即

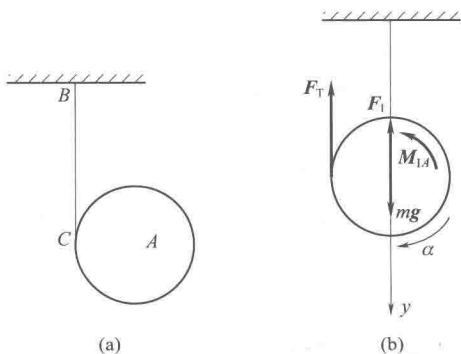


图 1-8

$$\begin{cases} F_I = ma_A = mR\alpha \\ M_{IA} = J_A\alpha = \frac{1}{2}mR^2\alpha \end{cases} \quad (1)$$

其方向如图 1-8 (b) 所示。

列平衡方程为

$$\sum_{i=1}^n M_C = 0, \quad M_{IA} - mgR + F_I R = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n F_y = 0, \quad mg - F_T - F_I = 0 \quad (3)$$

式 (1) 代入式 (2) 和式 (3), 并联立求解, 得圆柱体的角加速度和绳的拉力为

$$\alpha = \frac{2g}{3R}$$

$$F_T = \frac{1}{3}mg$$

圆柱体质心的加速度为

$$a_A = R\alpha = \frac{2}{3}g$$

例 1-3 如图 1-9 (a) 所示, 均质圆盘的质量为 m_1 , 由水平绳拉着沿水平面做纯滚动, 绳的另一端跨过定滑轮 B 并系一重物 A , 重物的质量为 m_2 。绳和定滑轮 B 的质量不计, 试求重物下降的加速度、圆盘质心的加速度以及作用在圆盘上绳的拉力。

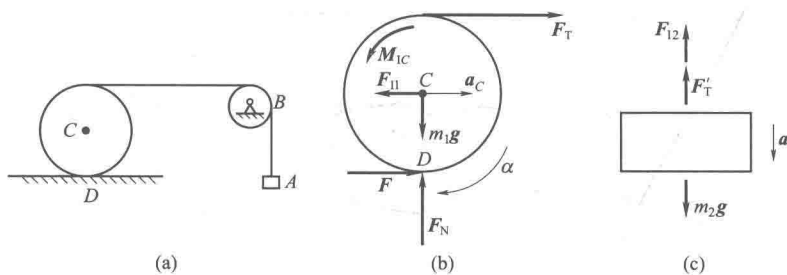


图 1-9

解: 以圆盘为研究对象, 作用在圆盘上的力有重力 m_1g 、绳的拉力 F_T 、法向约束力 F_N 、摩擦力 F 、虚拟惯性力 F_{II} 和 M_{IC} 。虚拟惯性力 F_{II} 和 M_{IC} 为

$$F_{II} = m_1 a_C = \frac{1}{2}m_1 a_A$$

$$M_{IC} = J_2\alpha = \frac{1}{2}m_1 r^2 \frac{a_C}{r} = \frac{1}{2}m_1 r \frac{a_A}{2} = \frac{1}{4}m_1 r a_A$$

其方向如图 1-9 (b) 所示, r 为圆盘的半径。

列平衡方程为

$$\sum_{i=1}^n M_D = 0, \quad M_{IC} + F_{11}r - F_T = 0 \quad (1)$$

再以重物 A 为研究对象, 作用在重物 A 上的力有重力 m_2g 、绳的拉力 F'_T 、虚拟惯性力 F_{12} 。虚拟惯性力为

$$F_{12} = m_2 a_A$$

其方向如图 1-9 (c) 所示。

列平衡方程为

$$\sum_{i=1}^n F_y = 0, \quad m_2 g - F'_T - F_{12} = 0 \quad (2)$$

式 (1) 和式 (2) 联立, 并注意 $F_T = F'_T$, 解得重物下降的加速度为

$$a_A = \frac{8m_2}{3m_1 + 8m_2}g$$

圆盘质心的加速度为

$$a_C = \frac{1}{2}a_A = \frac{4m_2}{3m_1 + 8m_2}g$$

作用在圆盘上绳的拉力为

$$F_T = \frac{m_1 m_2}{3m_1 + 8m_2}g$$

例 1-4 均质直杆 AB 的重力为 P , 杆长为 l , A 为球铰链, B 端自由, 以匀角速度 ω 绕铅垂轴 Az 转动, 如图 1-10 (a) 所示。试求杆 AB 与铅垂轴的夹角以及铰链 A 处的约束力。

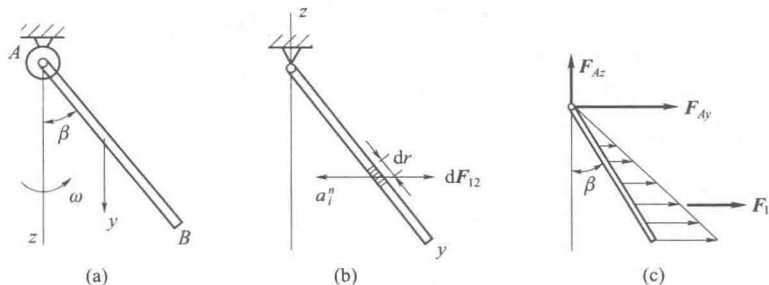


图 1-10

解: 首先计算惯性力。

如图 1-10 (b) 所示, 将杆分割成微段 dr , 且距 A 为 r , 则 dr 段上的惯性力为

$$dF_1^n = dma_i^n = (\rho dr) r \sin \beta \omega^2 = \frac{P}{gl} r \sin \beta \omega^2 dr \quad (1)$$

其中, $\rho = \frac{P}{gl}$, 为杆的线密度。

惯性力为平面系同向平行力系, 可简化为合力。对式 (1) 积分, 得惯性力系的

合力

$$F_1^n = \int_0^l \frac{P}{gl} r \sin \beta \omega^2 dr = \frac{P}{2g} l \sin \beta \omega^2 \quad (2)$$

确定惯性力系合力的作用线位置, 由合力矩定理

$$M_A(F_1^n) = \sum_{i=1}^n M_A(F_{li}^n)$$

得

$$F_1^n x \cos \varphi = \int_0^l \frac{P}{gl} r \sin \beta \omega^2 r \cos \varphi dr$$

其中, x 为惯性力系的合力到 A 的距离。

解得

$$F_1^n x \cos \varphi = \frac{P}{3g} l^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

将式 (2) 代入得

$$x = \frac{2}{3} l \quad (3)$$

由式 (1) 和式 (3) 知, 此惯性力为线性分布载荷, 其合力为载荷图的面积, 合力的作用线通过载荷图的形心。

其次求杆 AB 与铅垂轴的夹角以及铰链 A 处的约束力。

对杆 AB 进行受力分析, 如图 1-10 (c) 所示, 在杆所在的铅垂平面内, 杆受重力 P , 铰链 A 处的约束力为 F_{Ay} 、 F_{Az} , 虚拟惯性力为 F_1^n 。列平衡方程为

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0, F_1^n \frac{2}{3} l \cos \beta - P \frac{1}{2} l \sin \beta = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n F_y = 0, F_1^n + F_{Ay} = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n F_z = 0, F_{Az} - P = 0 \quad (6)$$

将惯性力式 (2) 代入式 (4)、式 (5)、式 (6) 得

$$F_{Ay} = -F_1^n = -\frac{P}{2g} l \sin \beta \omega^2$$

$$F_{Az} = P$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{3g}{2l\omega^2}$$

1.4 定轴转动刚体的轴承约束力

在日常生活和工程实际中, 如果忽略其本身的变形, 有大量绕定轴转动的刚体 (电动机、柴油机、电风扇、车床主轴等), 通常将这些机械的转动部件