高等数理统计

习题解答

《参数统计教程》题解

Solution For Advanced Mathematical Statistics

韦博成　周影辉 ◎ 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等数理统计习题解答

《参数统计教程》题解

韦博成　周影辉　**编著**

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内 容 提 要

本书为研究生课程“高等数理统计”的教学参考书，共计汇编了500多道习题的详尽解答和讨论，内容充实、有特色。题解共分八章，包罗了高等数理统计的主要内容，其中包括：常见的统计分布；充分统计量和信息函数；点估计的基本理论和方法；假设检验的理论、方法及其应用；区间估计及其应用；Bayes统计推断的基本概念和方法等. 本书也可作为经济金融、生物医学、管理科学、工程技术等专业人员学习“数理统计”课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数理统计习题解答 / 韦博成，周影辉编著. —南京：东南大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5641-6490-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①韦… ②周… Ⅲ.①数理统计-高等学校-题解 Ⅳ.①O212—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第098795号

高等数理统计习题解答

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 江建中
社 址 南京市四牌楼2号
邮 编 210096

经 销 全国各地新华书店
印 刷 南京京新印刷厂
开 本 700 mm×1000 mm 1/16
印 张 20.75
字 数 317千字
版 次 2016年8月第1版
印 次 2016年8月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5641-6490-4
定 价 42.00元

前　言

本书为统计学研究生的必修课“高等数理统计”的教学参考书，共计汇编了500多道习题，每题都配有详尽的解答，不少题解之后还附有讨论．本书习题主要取自我们在高等教育出版社出版的统计学研究生教材《参数统计教程》（简称《教程》），可作为该书的配套教学参考书．但是，习题的来源并不影响本书的通用性，本书的习题、题解以及讨论，都是紧密结合研究生“数理统计”课程教学大纲的全部内容而设置的，对研读“数理统计”的读者，都有参考价值．同时，本书也可作为经济金融、生物医学、管理科学、工程技术等专业研究生“数理统计”课程的教学参考书，也可供相关专业的大学生、研究生、教师、科技人员和统计工作者参考．为了便于读者阅读和参考，今把本书的有关情况和特点介绍如下．

第一，全书共分8章和1个附录．由于统计学基础知识的训练十分重要，本书把相应的习题列为1、2两章，分别设置了各种常用分布的相关问题，以及充分统计量与样本信息的相关问题；这两章分别有习题38题和28题（若以小题计，则合计超过100题）．“参数估计”是数理统计最重要、最核心的内容之一，因此本书习题分为3章，分别对“点估计的基本方法”、“最优同变估计”以及“点估计的性质”配备了较多的习题，第3—5章共有106题（若以小题计，则超过180题）．“假设检验”是数理统计的另一核心内容，本章即第6章习题最多，共有54题，而且有较多的应用题．第7章“区间估计”与“假设检验”有密切关系，有36题，其中不少是应用题．特别，由于Bayes统计已经成为当代最有发展前途的统计方法之一，本书特别单列第8章为“Bayes统计基础”，并配备较多的习题，较为系统和详尽地反映了Bayes统计的理论、方法及其应用；本章共有48题．附录列出了常用统计分布表、正态总体的假设检验表、常用共轭先验分布表、常用英语缩写注释以及常用定理与公式摘要，以方便读者查阅．

第二，本书定位为“中等水平、便于阅读、内容充实、有一定特色”的教学参考书，大部分习题都是中等水平的，主要目的是帮助读者进一步巩固和加深理解统计学的基本概念、基本原理和基本方法；少部分较难的习题（标有 * 号）可作为补充和提高，亦可强化概念与方法．本书习题以基本理论题为主，但也配备了一些应用题（第6—8章）．本书的习题、题解及讨论，材料比较全面丰富，足以使读者得到充分的基本训练，对于巩固和提高“高等数理统计”的知识以及加深对统计学的理解有

一定促进作用.

第三,我们在不少题解之后加了若干"注",指出该题的其他解法、进一步推广应用或说明该题的统计意义,以加深对相关的基本概念、基本原理和基本方法的理解.这也是我们这本习题解答的重要组成部分和特色之一.

感谢国家自然科学基金(71301099)对于本项目的支持.也感谢东南大学出版社的关心、帮助与支持,特别要感谢江建中社长和编辑部夏莉莉老师的精心策划与安排,他们对本书的立项、审定、编辑与出版都倾注了大量心血,特此表示衷心的感谢!陆建博士也为本题解做过不少工作,对他表示衷心的感谢!

由于作者水平有限,难免有不妥与谬误之处,恳请同行专家和广大读者提出批评和建议,以便我们进一步修订改正之用.

韦博成　周影辉
2015 年 11 月

目　　录

第一章　统计分布基础

1. 设 x_p 为 $F(x)$ 的 p 分位数,它定义为 $x_p \triangleq \inf\{x:F(x) \geqslant p\}$. 证明:

(1) $F(x') < p$ 的充要条件为 $x' < x_p$;$F(x') \geqslant p$ 的充要条件为 $x' \geqslant x_p$. 是否有"$F(x') > p$ 的充要条件为 $x' > x_p$"?

(2) $F(x_p - 0) \leqslant p \leqslant F(x_p)$;若 x_p 为 $F(x)$ 的连续点,则 $F(x_p) = p$;

(3) 若 $F(x'-0) > p$,则 $x' > x_p$.

证明　(1) 首先证明:$F(x') < p$ 的充要条件为 $x' < x_p$. 用反证法. 假设 $x' < x_p$ 而 $F(x') \geqslant p$,则由分位数的定义可知 $x' \geqslant x_p$,这与 $x' < x_p$ 相矛盾,所以由 $x' < x_p$ 可得 $F(x') < p$;反之,若 $F(x') < p$ 而 $x' \geqslant x_p$,则由分布函数的单调性可知 $F(x') \geqslant F(x_p) \geqslant p$,这与 $F(x') < p$ 相矛盾,所以由 $F(x') < p$ 可得 $x' < x_p$.

其次证明:$F(x') \geqslant p$ 的充要条件为 $x' \geqslant x_p$. 若 $x' \geqslant x_p$,则由分布函数的单调性知 $F(x') \geqslant F(x_p) \geqslant p$;反之,若 $F(x') \geqslant p$,则由分位点的定义可知 $x' \geqslant x_p$.

最后说明"$F(x') > p$ 的充要条件为 $x' > x_p$"这一命题的充分性和必要性都是不正确的. 例如对于离散型的二项分布 $X \sim b(n,\theta)$,令 $p = P\{X \leqslant i\}$,其中 $0 < i < n$,i 为整数,则 $x_p = i$. 一方面,对任意的 $x_p = i < x' < i+1$,显然有 $F(x') = p$,这表明命题的充分性不成立. 另一方面,对任意满足 $P\{X \leqslant i-1\} < p_1 < p$ 的 p_1,显然有 $F(x_p) > p_1$,而且 x_p 也是 p_1 分位数;即 $x_p = x_{p_1}$,这表明命题的必要性不成立.

(2) 由(1) 可知,$x' < x_p$,则 $F(x') < p$,令 $x' \to x_p - 0$,则有 $F(x_p - 0) \leqslant p$,所以 $F(x_p - 0) \leqslant p \leqslant F(x_p)$. 若 x_p 为 $F(x)$ 的连续点,则由上式可得 $F(x_p) = p$.

(3) 用反证法. 若 $F(x'-0) > p$,而 $x' \leqslant x_p$,则由分布函数的单调性及(2) 可知 $F(x'-0) \leqslant F(x_p - 0) \leqslant p$,这与 $F(x'-0) > p$ 相矛盾. 所以若 $F(x'-0) > p$,则必有 $x' > x_p$. ■

2. 设随机变量 X 和 Y 的分位数分别为 x_p 和 y_p,证明:

(1) 若 X 服从 Pascal 分布 $PA(\theta,r)$,Y 服从负二项分布 $NB(\theta,r)$,则 $x_p = y_p + r$;

(2) 若 X 服从 Γ 分布 $\Gamma(1/\sigma,k)$,则 $x_p = (\sigma/2)\chi^2(2k,p)$;其中 $\chi^2(2k,p)$ 表示自由度为 $2k$ 的卡方分布的 p 分位数;

(3) 若 X 服从极值分布 $EV(\alpha,\lambda)$,则 $x_p = (1/\alpha)(\log\lambda - \log\log p^{-1})$;

(4) 对于 F 分布:$F(n,m;\alpha) = [F(m,n;1-\alpha)]^{-1}$.

证明 (1) 由Pascal分布和负二项分布的关系知 $X-r=Y$，设随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为 $F(x)$ 和 $G(y)$，则有 $G(y)=F(y+r)$. 由分位数的定义可得

$$\begin{aligned} y_p &= \inf\{y:G(y)\geqslant p\}=\inf\{y:F(y+r)\geqslant p\} \\ &= \inf\{x-r:F(x)\geqslant p\}=\inf\{x:F(x)\geqslant p\}-r \\ &= x_p-r. \end{aligned}$$

以上第二等式做了变换 $y+r=x$.

(2) 由 $X\sim\Gamma\left(\frac{1}{\sigma},k\right)$ 可知 $Y=(2/\sigma)X\sim\chi^2(2k)$. 仍记为 $X\sim F(x)$，$Y\sim G(y)$，则有 $G(y)=F\left(\frac{\sigma}{2}y\right)$. 又由分位数的定义可得

$$\begin{aligned} \chi^2(2k,p) &= y_p=\inf\{y:G(y)\geqslant p\}=\inf\left\{y:F\left(\frac{\sigma}{2}y\right)\geqslant p\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{2}{\sigma}x:F(x)\geqslant p\right\}=\frac{2}{\sigma}\inf\{x:F(x)\geqslant p\} \\ &= \frac{2}{\sigma}x_p. \end{aligned}$$

以上第二等式做了变换 $(\sigma/2)y=x$，因此有 $x_p=(\sigma/2)\chi^2(2k,p)$. ■

注 更一般地，我们有：若 $Y=\sigma X+\mu$，则 $y_p=\sigma x_p+\mu$；其中 $\sigma>0,\mu\in\mathbf{R}$；$y_p$ 和 x_p 分别是 Y 和 X 的 p 分位数. 事实上，仍记 $X\sim F(x)$，$Y\sim G(y)$，则有 $G(y)=F\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$. 又由分位数的定义可得

$$\begin{aligned} y_p &= \inf\{y:G(y)\geqslant p\}=\inf\left\{y:F\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\geqslant p\right\} \\ &= \inf\{\sigma x+\mu:F(x)\geqslant p\}=\sigma\inf\{x:F(x)\geqslant p\}+\mu \\ &= \sigma x_p+\mu. \end{aligned}$$

(3) 因为极值分布 $EV(\alpha,\lambda)$ 的分布函数 $F(x)=\exp\{-\lambda e^{-\alpha x}\}$ 连续，所以 x_p 满足方程 $F(x_p)=\exp\{-\lambda e^{-\alpha x_p}\}=p$，由该式反解可得 $\lambda e^{-\alpha x_p}=-\log p$，因而其 p 分位数为 $x_p=\frac{1}{\alpha}(\log\lambda-\log\log p^{-1})$.

(4) 设 $X\sim F(n,m)$，则 $Y=X^{-1}\sim F(m,n)$. 记 $x_\alpha=F(n,m;\alpha)$，$y_\beta=F(m,n;\beta)$，由于 F 分布的分布函数连续，所以有

$$\begin{aligned} P\{X\leqslant x_\alpha\}=\alpha &\Leftrightarrow P\{X^{-1}\geqslant x_\alpha^{-1}\}=\alpha \\ &\Leftrightarrow 1-P\{X^{-1}\leqslant x_\alpha^{-1}\}=\alpha \\ &\Leftrightarrow P\{X^{-1}\leqslant x_\alpha^{-1}\}=1-\alpha \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x_{\alpha}^{-1} = y_{1-\alpha}$$
$$\Leftrightarrow F(n,m;\alpha) = [F(m,n;1-\alpha)]^{-1}.$$ ■

3.* 设 α 分位函数定义为

$$\rho_{\alpha}(t) = (\alpha - I\{t<0\})t = |t|[\alpha I\{t>0\} + (1-\alpha)I\{t<0\}],$$
$$0<\alpha<1, t\in \mathbf{R}.$$

其中 $I\{t<0\}$ 为示性函数. 对于一个集合 A,示性函数 $I_A(x) \triangleq I\{A\}$ 定义为 $I_A(x) = 1, x\in A; I_A(x) = 0, x \overline{\in} A$.

(1) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x;\alpha,\theta) = \alpha(1-\alpha)\exp\{-\rho_{\alpha}(x-\theta)\}$,证明:$X$ 的 α 分位数为 θ;

(2) 设 Y 为连续型随机变量,$g(\mu) = E[\rho_{\alpha}(Y-\mu)]$ 关于一切 μ 存在,则当 $\mu = y_{\alpha}$ 时 $g(\mu)$ 达到最小值,其中 y_{α} 为 Y 的 α 分位数.

证明　(1) 随机变量 X 的密度函数为

$$f(x;\alpha,\theta) = \begin{cases} \alpha(1-\alpha)\exp\{-(1-\alpha)(\theta-x)\} & x\leqslant\theta, \\ \alpha(1-\alpha)\exp\{-\alpha(x-\theta)\} & x>\theta, \end{cases}$$

由此易得其分布函数为

$$F(x;\alpha,\theta) = \begin{cases} \alpha\exp\{-(1-\alpha)(\theta-x)\} & x\leqslant\theta, \\ 1-(1-\alpha)\exp\{-\alpha(x-\theta)\} & x>\theta. \end{cases}$$

显然,当且仅当 $x=\theta$ 时 $F(x;\alpha,\theta) = \alpha$,所以 X 的 α 分位数为 θ.

(2) 设 Y 的密度函数为 $f(y)$,则

$$\begin{aligned} g(\mu) = E[\rho_{\alpha}(Y-\mu)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\rho_{\alpha}(y-\mu)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mu}^{\infty}\alpha(y-\mu)f(y)\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\mu}(1-\alpha)(\mu-y)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \alpha\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu)f(y)\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{\mu}(y-\mu)f(y)\mathrm{d}y \\ &= \alpha EY - \alpha\mu - \int_{-\infty}^{\mu}(y-\mu)f(y)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

对 $g(\mu)$ 求导得 $g'(\mu) = -\alpha + \int_{-\infty}^{\mu}f(y)\mathrm{d}y$,令 $g'(\mu) = 0$ 解得 $\alpha = \int_{-\infty}^{\mu}f(y)\mathrm{d}y = F(\mu)$,从而 $\mu = y_{\alpha}$. 由于 $g''(\mu) = f(\mu) > 0$,所以 $g(\mu)$ 在 $\mu = y_{\alpha}$ 时达到最小值.

注　若 $\alpha = 1/2$,则 $g(\mu) = (1/2)E|Y-\mu|$,μ 等于中位数 $y_{1/2}$ 时达到最小值. ■

4. 设 $T(X)$ 为随机变量 X 的可测函数,$E[T(X)-\theta]^2$ 在 $\theta\in[a,b]$ 上存在,记

$S(x)=T(x)$,若 $a\leqslant T(x)\leqslant b$;$S(x)=a$,若 $T(x)<a$;$S(x)=b$,若 $T(x)>b$,证明:$E[S(X)-\theta]^2\leqslant E[T(X)-\theta]^2$.

证明 设 $T(X)$ 的分布函数为 $F_T(t)$,由于

$$S(x)=\begin{cases}a & T(x)<a,\\ T(X) & a\leqslant T(x)\leqslant b,\\ b & T(x)>b,\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}E[S(X)-\theta]^2&=\int_{-\infty}^{a}(a-\theta)^2\mathrm{d}F_T(t)+\int_a^b(t-\theta)^2\mathrm{d}F_T(t)+\int_b^{+\infty}(b-\theta)^2\mathrm{d}F_T(t)\\&\leqslant\int_{-\infty}^{a}(t-\theta)^2\mathrm{d}F_T(t)+\int_a^b(t-\theta)^2\mathrm{d}F_T(t)+\int_b^{+\infty}(t-\theta)^2\mathrm{d}F_T(t)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(t-\theta)^2\mathrm{d}F_T(t)=E[T(X)-\theta]^2.\end{aligned}$$

■

5. 称随机变量 X 的分布关于某一点 ξ_0 对称,若其密度函数 $f(x)$ 满足 $f(\xi_0+x)=f(\xi_0-x)$. 证明:

(1) X 的分布关于 ξ_0 对称的充要条件为 $X-\xi_0$ 的分布关于原点对称;X 的分布关于原点对称的充要条件为 X 与 $-X$ 同分布;

(2) 若 X 的分布关于 ξ_0 对称,则 $EX=\xi_0$,$E(X-\xi_0)^{2k-1}=0$,其中 k 为正整数;

(3) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $i.i.d.$ 样本,X_1 服从某一对称分布;则其样本均值 $\overline{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 与样本方差 $S^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 不相关,即 $\mathrm{Cov}(\overline{X},S^2)=0$.

证明 (1) 设 $Y=X-\xi_0$ 的密度函数为 $g(y)$,则有 $g(y)=f(y+\xi_0)$. 因此 $Y=X-\xi_0$ 的分布关于原点对称的充要条件 $g(y)=g(-y)$ 等价于 $f(y+\xi_0)=f(-y+\xi_0)$,而该式就是 X 的分布关于 ξ_0 对称的充要条件. 其次再证 X 的分布关于原点对称的充要条件为 X 与 $-X$ 同分布. 设 $Y=-X$ 的密度函数为 $g(y)$,则有 $g(y)=f(-y)$. 由于 X 的分布关于原点对称的充要条件为 $f(x)=f(-x)$,这等价于 $f(-y)=f(y)$,也等价于 $Y=-X$ 的密度函数为 $g(y)=f(y)$,即 $Y=-X$ 与 X 同分布.

(2) 注意,若 X 的分布关于 ξ_0 对称,则密度函数 $f(\xi_0+x)$ 为偶函数,因此有

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}(t+\xi_0)f(t+\xi_0)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}tf(t+\xi_0)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}\xi_0f(t+\xi_0)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中第 2 个等号用到了变换 $x=t+\xi_0$. 因为 $f(\xi_0+x)$ 为偶函数,所以 $tf(t+\xi_0)$ 是

奇函数,从而

$$EX=0+\int_{-\infty}^{\infty}\xi_0 f(t+\xi_0)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\xi_0 f(x)\mathrm{d}x=\xi_0.$$

同理,若令 $t=x-\xi_0$,则有

$$E(X-\xi_0)^{2k-1}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\xi_0)^{2k-1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}t^{2k-1}f(t+\xi_0)\mathrm{d}t.$$

又因为 $t^{2k-1}f(t+\xi_0)$ 是奇函数,所以 $E(X-\xi_0)^{2k-1}=0$.

(3) 不妨设 X_1 的密度函数为 $f(x_1)$,则由对称性可知 $f(\xi_0+x_1)=f(\xi_0-x_1)$,由(1) 易得 $E(\overline{X})=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}EX_i=\xi_0$,记 $s^2(x)=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$,则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\overline{X},S^2)&=E[(\overline{X}-\xi_0)(S^2-ES^2)]\\&=\int_{\mathbf{R}^n}(\overline{x}-\xi_0)[s^2(x)-ES^2]f(x_1),\cdots,f(x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.\end{aligned}$$

今做变换 $x_i=t_i+\xi_0,i=1,2,\cdots,n$,则有 $\overline{x}-\xi_0=\overline{t},s^2(x)=s^2(t)$,因此

$$\mathrm{Cov}(\overline{X},S^2)=\int_{\mathbf{R}^n}\overline{t}[s^2(t)-ES^2]f(t_1+\xi_0),\cdots,f(t_n+\xi_0)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n.$$

由定义可知 $s^2(-t)=s^2(t)$,因此$[s^2(t)-ES^2]$ 为 t 的偶函数,显然 $\overline{t}$ 为奇函数,因而以上被积函数是奇函数,所以 $\mathrm{Cov}(\overline{X},S^2)=0$. ■

6. 随机变量 X 的特征函数 $\varphi(t)$ 或 $\varphi_X(t)$ 定义为 $\varphi(t)\triangleq E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})$;$\log\varphi(t)$ 的 Taylor 展开式的系数称为累积量,若

$$\log\varphi(t)=\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r\frac{(\mathrm{i}t)^r}{r!},$$

则系数$\mathcal{K}_r$ 称为 r 阶累积量或半不变量. 证明:

(1) 若 X,Y 独立,则有$\mathcal{K}_r(X+Y)=\mathcal{K}_r(X)+\mathcal{K}_r(Y)$;

(2) $\mathcal{K}_r(X+C)=\mathcal{K}_r(X),(r>1)$.

证明　(1) 由于X与Y独立,所以 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$,因此有 $\log\varphi_{X+Y}(t)=\log\varphi_X(t)+\log\varphi_Y(t)$,即

$$\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r(X+Y)\frac{(\mathrm{i}t)^r}{r!}=\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r(X)\frac{(\mathrm{i}t)^r}{r!}+\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r(Y)\frac{(\mathrm{i}t)^r}{r!}.$$

所以$\mathcal{K}_r(X+Y)=\mathcal{K}_r(X)+\mathcal{K}_r(Y),r=1,2,\cdots$.

(2) 因为 $\varphi_{X+C}(t)=\varphi_X(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ct}$,所以 $\log\varphi_{X+C}(t)=\log\varphi_X(t)+\mathrm{i}Ct$,即

$$\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r(X+C)\frac{(\mathrm{i}t)^r}{r!}=\sum_{r=2}^{\infty}\mathcal{K}_r(X)\frac{(\mathrm{i}t)^r}{r!}+(C+\mathcal{K}_1(X))\mathrm{i}t.$$

所以$\mathcal{K}_r(X+C)=\mathcal{K}_r(X),r>1;\mathcal{K}_1(X+C)=\mathcal{K}_1(X)+C.$ ■

7. 设 ξ 为连续型正值随机变量,其分布函数为 $F(t)$,$F'(t)=f(t)$,记 $h(t)=f(t)/[1-F(t)]$,通常称 $h(t)$ 为危险率函数. 证明:

(1) $h(t)$ 表示 ξ 大于 t,但不超过 $t+\Delta t$ 的相对概率,或危险率:

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<\xi\leqslant t+\Delta t\mid \xi>t\}}{\Delta t};$$

(2) 危险率函数 $h(t)$ 与密度函数 $f(t)$ 有以下一一对应的关系:

$$f(t)=h(t)\mathrm{e}^{-H(t)};\qquad H(t)=\int_0^t h(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1)

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<\xi\leqslant t+\Delta t\mid \xi>t\}}{\Delta t}\\ &=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t(1-F(t))}\\ &=\frac{F'(t)}{1-F(t)}=\frac{f(t)}{1-F(t)}=h(t).\end{aligned}$$

(2) 对 $h(t)=f(t)/(1-F(t))$ 积分得

$$H(t)=\int_0^t h(u)\mathrm{d}u=\int_0^t\frac{-\mathrm{d}(1-F(u))}{1-F(u)}=-\log(1-F(t)).$$

所以 $\log(1-F(t))=-H(t)$,$1-F(t)=\mathrm{e}^{-H(t)}$,两边求导得 $-f(t)=\mathrm{e}^{-H(t)}(-H'(t))$,即 $f(t)=h(t)\mathrm{e}^{-H(t)}$. ■

8. 设随机变量 X 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$,并已知事件 $\{X=0\}$ 不可能发生,求此时 X 的分布(截尾 Poisson 分布)及其期望和方差.

解 由于 $X>0$,所以对任意的正整数 k,有

$$\begin{aligned}P\{X=k\mid X>0\}&=\frac{P\{X=k,X>0\}}{P\{X>0\}}=\frac{P\{X=k\}}{P\{X>0\}}\\ &=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}=\frac{\lambda^k}{k!(\mathrm{e}^{\lambda}-1)},\end{aligned}$$

$$E(X\mid X>0)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!(1-\mathrm{e}^{-\lambda})}=\frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \cdot e^{\lambda} = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}},$$

$$\mathrm{Var}(X \mid X>0) = E(X^2 \mid X>0) - [E(X \mid X>0)]^2.$$

而

$$\begin{aligned} E(X^2 \mid X>0) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!(1-e^{-\lambda})} = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\lambda^{k+1}}{k!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot \lambda^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} (\lambda^2+\lambda) \cdot e^{\lambda} = \frac{\lambda^2+\lambda}{1-e^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Var}(X \mid X>0) = \lambda[1-(1+\lambda)e^{-\lambda}]/(1-e^{-\lambda})^2$. ■

9. (1) 设 T 的期望和方差分别为 1 和 τ，$(N \mid T=t)$ 服从 Poisson 分布 $P(\lambda t)$，求 N 的期望与方差；

(2) 设 N 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，$(X \mid N=n)$ 服从二项分布 $B(n,\theta)$，证明 X 服从 Poisson 分布 $P(\lambda\theta)$.

(1) **解**

$$\begin{aligned} E(N) &= E_T\{E(N \mid T)\} = E_T(\lambda T) = \lambda \\ \mathrm{Var}(N) &= E_T\{\mathrm{Var}(N \mid T)\} + \mathrm{Var}_T\{E(N \mid T)\} \\ &= E_T(\lambda T) + \mathrm{Var}_T(\lambda T) \\ &= \lambda + \lambda^2 \tau. \end{aligned}$$

(2) **证明**　X 的特征函数为

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E(e^{iXt}) = E_N\{E(e^{i(X|N)t})\} = E_N\{[(1-\theta)+\theta e^{it}]^N\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(1-\theta)+\theta e^{it}]^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= e^{\lambda[(1-\theta)+\theta e^{it}]} e^{-\lambda} = e^{\lambda\theta(e^{it}-1)}, \end{aligned}$$

这与 Poisson 分布 $P(\lambda\theta)$ 的特征函数相同，由唯一性知 $X \sim P(\lambda\theta)$. ■

10. 设 T 服从 Γ 分布 $\Gamma(\lambda,\nu)$，$(X \mid T=t)$ 服从 Poisson 分布 $P(t)$. 证明 X 服从负二项分布 $NB(\theta,\nu)$，其中 $\theta=\lambda/(1+\lambda)$；而 $(T \mid X=x)$ 服从 Γ 分布 $\Gamma(\lambda+1, x+\nu)$（提示：用特征函数证明 $X \sim NB(\theta,\nu)$）.

证明　X 的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi_X(s) &= E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}Xs}) = E_T\{E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(X|T)s})\} = E_T\{\mathrm{e}^{T(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-1)}\} \\ &= \int_0^{\infty}\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\mathrm{e}^{-\lambda t}\cdot t^{\nu-1}\cdot e^{t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}-1)}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\mathrm{e}^{-(\lambda+1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})t}\cdot t^{\nu-1}\mathrm{d}t \\ &= \lambda^\nu/(\lambda+1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}s})^\nu = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^\nu\cdot\left(1-\frac{1}{1+\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}\right)^{-\nu} \\ &= \theta^\nu[1-(1-\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}]^{-\nu}.\end{aligned}$$

这与负二项分布 $NB(\theta,\nu)$ 的特征函数相同,因此由唯一性可知 $X\sim NB(\theta,\nu)$,其中 $\theta=\lambda/(1+\lambda)$.

另外,由于 (T,X) 的联合分布密度函数为

$$\begin{aligned}p(t,x) &= p(t)p(x\mid t) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{\nu-1}\cdot\mathrm{e}^{-t}\frac{t^x}{x!} \\ &= \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)x!}\mathrm{e}^{-(\lambda+1)t}t^{\nu+x-1}.\end{aligned}$$

所以 $(T\mid X=x)$ 的密度函数为

$$\begin{aligned}p(t\mid x) &= p(t,x)/p(x) \\ &= \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)x!}\mathrm{e}^{-(\lambda+1)t}t^{\nu+x-1}\cdot\left[\binom{\nu+x-1}{x}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^\nu\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^x\right]^{-1} \\ &= \frac{(1+\lambda)^{\nu+x}}{\Gamma(\nu+x)}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)t}t^{\nu+x-1}.\end{aligned}$$

这是 Γ 分布 $\Gamma(\lambda+1,\nu+x)$ 的密度函数,所以 $(T\mid X=x)$ 服从 Γ 分布 $\Gamma(\lambda+1,\nu+x)$. ■

11.* 不完全 β 函数定义为:

$$I_\xi(p,q)\triangleq\beta^{-1}(p,q)\int_0^\xi x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x.$$

其中 $\beta(p,q)$ 为 β 函数:$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\beta(q,p)$. 设 X 服从二项分布,$P(X=i)=b(i\mid n,\theta)$. 证明其分布函数 $F(i)=P(X\leqslant i)$ 与不完全 β 函数有以下关系:

$$\sum_{j=i}^{n}b(j\mid n,\theta) = I_\theta(i,n-i+1),$$
$$F(i) = 1-I_\theta(i+1,n-i) = I_{1-\theta}(n-i,i+1).$$

(提示:对第一式,令左端 $=f_1(\theta)$,右端 $=f_2(\theta)$,$f(\theta)=f_1(\theta)-f_2(\theta)$,易得 $f'(\theta)=0$,从而 $f(\theta)=0$;第 12,13 题的证明类似).

证明　令 $f_1(\theta)=\sum_{j=i}^{n}b(j\mid n,\theta)$，$f_2(\theta)=I_\theta(i,n-i+1)$，$f(\theta)=f_1(\theta)-f_2(\theta)$，则

$$f(\theta)=\sum_{j=i}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}\theta^j(1-\theta)^{n-j}-\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\int_0^\theta x^{i-1}(1-x)^{n-i}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\sum_{j=i}^{n}\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\theta^{j-1}(1-\theta)^{n-j}-\\&\quad\sum_{j=i}^{n-1}\frac{n!}{j!(n-j-1)!}\theta^{j}(1-\theta)^{n-j-1}-\\&\quad\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\theta^{i-1}(1-\theta)^{n-i}\\&=\sum_{j=i+1}^{n}\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\theta^{j-1}(1-\theta)^{n-j}-\\&\quad\sum_{k=i+1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\theta^{k-1}(1-\theta)^{n-k}\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $f(\theta)\equiv c$，c 为常数. 又因为 $f(0)=0$，且 $f(\theta)$ 在 $\theta=0$ 处连续，所以 $f(\theta)=0$，即 $\sum_{j=i}^{n}b(j\mid n,\theta)=I_\theta(i,n-i+1)$.

另外，由于

$$\begin{aligned}F(i)&=\sum_{j=1}^{i}b(j\mid n,\theta)=1-\sum_{j=i+1}^{n}b(j\mid n,\theta)\\&=1-I_\theta(i+1,n-i),\end{aligned}$$

为计算 $I_\theta(i+1,n-i)$，做变换 $x=1-y$，则有

$$\begin{aligned}I_\theta(i+1,n-i)&=\frac{1}{\beta(i+1,n-i)}\int_0^\theta x^i(1-x)^{n-i-1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\beta(i+1,n-i)}\int_1^{1-\theta}(1-y)^iy^{n-i-1}(-\mathrm{d}y)\\&=\frac{1}{\beta(i+1,n-i)}\left[\int_0^1y^{n-i-1}(1-y)^i\mathrm{d}y-\int_0^{1-\theta}y^{n-i-1}(1-y)^i\mathrm{d}y\right]\\&=1-\frac{1}{\beta(n-i,i+1)}\int_0^{1-\theta}y^{n-i-1}(1-y)^i\mathrm{d}y\\&=1-I_{1-\theta}(n-i,i+1).\end{aligned}$$

所以 $F(i)=1-I_\theta(i+1,n-i)=I_{1-\theta}(n-i,i+1)$. ■

12.* 若 X 服从负二项分布 $NB(\theta,r)$，则其分布函数 $F(i)=P(X\leqslant i)$ 可由不

完全 β 函数表示为 $I_\theta(r,i+1)$.

证明 令

$$f_1(\theta)=F(i)=P(X\leqslant i)=\sum_{k=0}^{i}\binom{k+r-1}{k}\theta^r(1-\theta)^k,$$

$$f_2(\theta)=I_\theta(r,i+1)=\frac{1}{\beta(r,i+1)}\int_0^\theta x^{r-1}(1-x)^i\,\mathrm{d}x,$$

$$f(\theta)=f_1(\theta)-f_2(\theta).$$

下面我们用数学归纳法证明:对任意的自然数 i,有 $f'(\theta)=0$.

当 $i=0$ 时,$f'(\theta)=f_1{}'(\theta)-f_2{}'(\theta)=r\theta^{r-1}-r\theta^{r-1}=0$;

当 $i=1$ 时,

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=f'_1(\theta)-f'_2(\theta)\\&=[r\theta^{r-1}+r\cdot r\theta^{r-1}(1-\theta)-r\theta^r]-r(r+1)\theta^{r-1}(1-\theta)\\&=0;\end{aligned}$$

假设当 $i=m$ 时,$f'(\theta)=0$,那么,当 $i=m+1$ 时,我们有

$$\begin{aligned}f'(\theta)=&\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{k+r-1}{k}\theta^r(1-\theta)^k\right]'+\left[\binom{m+1+r-1}{m+1}\theta^r(1-\theta)^{m+1}\right]'-\\&\frac{1}{\beta(r,m+2)}\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1}\\=&[F'(m)-I'_\theta(r,m+1)]+\frac{(m+r)!}{m!(r-1)!}\theta^{r-1}(1-\theta)^m+\\&\binom{m+r}{m+1}r\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1}-\binom{m+r}{m+1}\theta^r(m+1)(1-\theta)^m-\\&\frac{(m+r+1)!}{(m+1)!(r-1)!}\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1}\\=&0+\frac{(m+r)!}{m!(r-1)!}\theta^{r-1}(1-\theta)^m+\frac{(m+r)!}{(m+1)!(r-1)!}r\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1}-\\&\frac{(m+r)!}{(m+1)!(r-1)!}\theta^r(m+1)(1-\theta)^m-\\&\frac{(m+r+1)!}{(m+1)!(r-1)!}\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1}\\=&0.\end{aligned}$$

最后一式各项加以合并,经简单计算,即可得到 $f'(\theta)=0$. 综上所述,根据数学归纳法,对任意自然数 i 有 $f'(\theta)=0$;又因 $f(0)=0$,而且 $f(\theta)$ 在 $\theta=0$ 处连续,所以 $f(\theta)=0$,即 $F(i)=P(X\leqslant i)=I_\theta(r,i+1)$. ■

13.* 设 X 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，则其分布函数 $F(i)=P(X\leqslant i)$ 可由不完全 Γ 函数 $\Gamma(\lambda,i+1)$ 表示为

$$F(i)=\sum_{k=0}^{i}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\Gamma(\lambda,i+1)\triangleq\int_{\lambda}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^i\mathrm{d}x/\Gamma(i+1).$$

证明　令

$$f_1(\lambda)=F(i)=\sum_{k=0}^{i}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$
$$f_2(\lambda)=\Gamma(\lambda,i+1)=\frac{1}{\Gamma(i+1)}\int_{\lambda}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^i\mathrm{d}x,$$
$$f(\lambda)=f_1(\lambda)-f_2(\lambda).$$

则

$$\begin{aligned}f'(\lambda)&=\sum_{k=1}^{i}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=0}^{i}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}+\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\\&=\sum_{k=0}^{i-1}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum_{k=0}^{i}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}+\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $f(\lambda)\equiv c$，为常数. 又因为 $f(0)=1-1=0$，而且 $f(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处连续，所以 $f(\lambda)\equiv 0$，即 $F(i)=\Gamma(\lambda,i+1)$. ■

14. 若 $X_i\sim P(\lambda_i)$，$i=1,\cdots,k$ 相互独立，则 $\{(X_1,\cdots,X_k)\mid X_1+\cdots+X_k=n\}$ 服从多项分布 $MN(n,\pi)$，其中 $\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_k)^{\mathrm{T}}$，$\pi_i=\lambda_i/\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j$.

证明

$$\begin{aligned}&P\{(X_1=x_1,\cdots,X_k=x_k)\mid X_1+\cdots+X_k=n\}\\&=P\{X_1=x_1,\cdots,X_k=x_k,\sum_{i=1}^{k}x_i=n\}/P\{X_1+\cdots+X_k=n\}\\&=\left[\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}\cdots\mathrm{e}^{-\lambda_k}\frac{\lambda_k^{x_k}}{x_k!}\right]\Bigg/\left[\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\right)^n}{n!}\right]\\&=\frac{n!}{x_1!\cdots x_k!}\left(\frac{\lambda_1}{\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i}\right)^{x_1}\cdots\left(\frac{\lambda_k}{\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i}\right)^{x_k}\quad\left(\text{其中}\sum_{i=1}^{k}x_i=n\right).\end{aligned}$$

所以 $\{(X_1,\cdots,X_k)\mid X_1+\cdots+X_k=n\}$ 服从多项分布 $MN(n,\pi)$，其中 $\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_k)^{\mathrm{T}}$，而 $\pi_i=\lambda_i/\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j$，$i=1,\cdots,k$. ■