浙大优学

高中数学竞赛专题讲座丛书

几何分册

高中数学竞赛解题策略

GAOZHONG SHUXUE JINGSAI
JIETI CELUE

沈文选 杨清桃 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛解题策略

几何分册

沈文选　杨清桃　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛解题策略. 几何分册/沈文选,杨清桃主编. —杭州:浙江大学出版社,2012.6
ISBN 978-7-308-09995-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①沈… Ⅲ.①几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 097855 号

高中数学竞赛解题策略——几何分册

沈文选 杨清桃 主编

责任编辑	杨晓鸣 吴慧(特邀)
封面设计	刘依群
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007) (网址: http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷	富阳育才印刷有限公司
开　　本	787mm×1092mm 1/16
印　　张	26.5
字　　数	650 千
版 印 次	2012 年 6 月第 1 版 2012 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-09995-0
定　　价	49.00 元

前　言

如果说“认识基本图形，了解特色定理”是求解平面几何难题的重要前提，那么“点击基本图形，触摸特色定理”就是求解平面几何竞赛题的重要策略。一个人在解决平面几何问题中体现出来的能力，其实质是根据问题情景重组已知的平面几何图形知识，能正确、迅速地检索、选择和提取相关平面几何图形知识并及时转化为适当的操作程序，从而将问题从初始状态转变为目的状态。丰富、系统的平面几何图形知识不仅是解题创新所不可或缺的材料，而且还能直接激发解题创新的直觉或灵感。只有具备了充分的几何图形与逻辑推理知识，才有可能进行有目的、有方向、有成效的探究性活动，求解数学竞赛中的几何问题效能才有保障，否则就只能是尝试错误。因此，为了在各级各类数学竞赛中取得好的成绩，应该以几何图形为手段，以基本图形性质为核心，逐步认识基本图形为目标来进行学习。认识基本图形，深入挖掘特性，善用平台析题，思路快捷清晰。

认识基本图形，有四重境界：

第一重境界，看山不见水，看水不见水。看图无识，水中无鱼。这个图很平淡。

第二重境界，看山是山，看水是水。看图有识，授之以鱼。这个图有特点。

第三重境界，看山不是山，看水不是水。看图思性，授之以渔。这个图有联系。

第四重境界，看山还是山，看水还是水。见图识性，悟其渔识。这个图内涵丰富。

我们以三角形的垂心图为例说明之。

在锐角$\triangle ABC$中，AD、BE、CF分别为边BC、CA、AB上的高，H为$\triangle ABC$的垂心。

首先看这个图很平淡。仔细看一下，发现有18对相似的直角三角形，有6组四点共圆，有3个完全四边形。

再仔细分析一下这6个圆，有15组两两相交的圆，从而有15条公共弦(每条边上两条，每条高上两条，再有DE、EF、FD)；有7组三圆两两相交，因而有8个根心：A、B、C、D、H、D、E、F；有3组四圆共点(共点于D、E、F)。

如果建立一些平台(即给出一些新的概念)，有垂心组A、B、C、H；H为$\triangle DEF$的内心，A、B、C分别为$\triangle DEF$的旁心；H为$\triangle ABC$的密克尔点，D、E、F为完全四边形的密克尔点。若设M、N、L分别为边BC、CA、AB的中点，P、Q、R分别为AH、BH、CH的中点，AH交EF于P_0，BH交FD于Q_0，CH交DE于R_0，则分别以AP、BQ、CR为半径的$\odot P$、$\odot Q$、$\odot R$为$\triangle ABC$的一组密克尔圆；点D、E、F、M、N、L、P、Q、R共圆(九点

圆)，其圆心为外心与垂心连线的中点 V；设 G 为$\triangle ABC$ 的重心，则 H、V、G、O 四点共线(H、G、O 共线为欧拉线)；有调和点列：A、H，P_0、D；B、H，Q_0、E；C、H，R_0、F；O、V，G、H；有极点三角形：$\triangle P_0BC$、$\triangle Q_0CA$、$\triangle R_0AB$；极点公式：$BP^2+PC^2-2AP^2=BC^2$，$CQ^2+QA^2-2BQ^2=CA^2$，$AR+RB^2-2CR^2=AB^2$；有 9 组定差幂线式：即 $AB^2-AC^2=HB^2-HC^2=DB^2-DC^2$ 等三式；还可联系卡诺定理：$AH=2OL$ 等三式；垂心余弦定理：$AH=2r\cdot|\cos A|$(r 为外接圆半径)等三式；法格乃诺定理：$DE+EF+FD$ 是$\triangle ABC$ 内接三角形周长最小者等等。

这本著作的撰写，是作者近些年(特别是近三年)在全国各地培训讲稿并将其发表的几十篇文章的基础上整理而成，溶进了作者对奥林匹克数学研究的大量成果，也区别于作者已出版的其他几何著作，以期对奥林匹克数学研究作出自己的努力，也望得到广大读者的指正！

沈文选

2011 年 12 月

目录

CONTENTS

第二编　触摸特色定理

第一编　点击基本图形

第1章　直角三角形

直角三角形是含有内角为 $90°$ 的特殊三角形，它是一类基本图形①.

直角三角形的有趣性质在处理平面几何问题中常发挥重要作用.

性质1　一个三角形为直角三角形的充要条件是两条边长的平方和等于第三条边长的平方(勾股定理及其逆定理).

性质2　一个三角形为直角三角形的充要条件是一边上的中线长等于该边长的一半.

推论1　直角三角形的外心为斜边的中点.

性质3　$\triangle ABC$ 为直角三角形，且 C 为直角顶点的充要条件是当 C 在边 AB 上的射影为 D 时，下列五个等式之一成立.

(1) $AC^2 = AD \cdot AB$.

(2) $BC^2 = BD \cdot AB$.

(3) $CD^2 = AD \cdot DB$.

(4) $\dfrac{BC^2}{CD^2} = \dfrac{AB}{AD}$.

(5) $\dfrac{AC^2}{CD^2} = \dfrac{AB}{DB}$.

事实上，由 $AC^2 = AD \cdot AB$，有 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$. 注意到 $\angle A$ 公用，知 $\triangle ACB \backsim \triangle ADC$. 而 $\angle ADC = 90°$，故 $\angle ACB = 90°$. 即可得(1)的充分性.

我们又由

$$\frac{BC^2}{CD^2} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{BC^2 - CD^2}{CD^2} = \frac{AB - AD}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{DB^2}{CD^2} = \frac{DB}{AD}, \text{即 } CD^2 = AD \cdot DB.$$

即可证得(4)的充分性.

其余的证明略.

推论2　非等腰$\triangle ABC$ 为直角三角形，且 C 为直角顶点的充要条件是当 C 在边 AB 上的射影为 D 时，$\dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{AD}{DB}$.

---

①沈文选. 直角三角形中的一些数量关系[J]. 中学数学，1997(7)：14－17.

事实上，由性质 3 中的(1)、(2)相除或(4)、(5)相除即证. 下面，另证充分性. 由

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AD^2+CD^2}{CD^2+DB^2},$$

有
$$(CD^2-AD\cdot DB)(AD-DB)=0.$$

而 $AD\neq DB$，即有 $CD^2=AD\cdot DB$. 由此即可证.

性质 4 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 C 为直角顶点的充要条件是当 C 在边 AB 上的射影为点 D，过 CD 中点 P 的直线 AP(或 BP)交 BC(或 AC)于 E，E 在 AB 上的射影为 F 时，$EF^2=CE\cdot EB$(或 $EF^2=CE\cdot EA$).

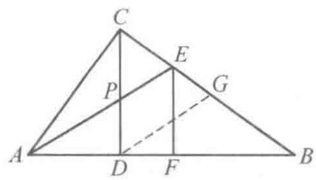

图 1-1

证明 必要性. 如图 1-1，过 D 作 $DG\parallel AE$ 交 BC 于 G，则 $CE=EG$，且 $\frac{AD}{DB}=\frac{EG}{GB}$，即有 $\frac{AD}{AD+DB}=\frac{EG}{EG+BG}$，

即
$$\frac{AD}{AB}=\frac{CE}{EB}. \quad ①$$

又 $EF\parallel CD$，有

$$\frac{EF}{CD}=\frac{EB}{CB} \quad ②$$

在 Rt$\triangle ABC$ 中，有

$$CD^2=AD\cdot DB, BC^2=DB\cdot AB, \quad ③$$

将 ③ 代入 ②^2 得

$$EF^2=\frac{EB^2\cdot AD}{AB}. \quad ④$$

将 ① 代入 ④ 得

$$EF^2=CE\cdot EB.$$

充分性. 由 $EF^2=CE\cdot EB$，注意到 ②^2 及 ①，有

$$\frac{BC^2}{CD^2}=\frac{AB}{AD}$$

再注意到性质 3(4) 即证.

对于 $EF^2=CE\cdot EA$ 的情形也类似上述证明.

性质 5 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 C 为直角顶点的充要条件是当 D 为边 AB 上异于端点的任一点时，$(AB\cdot CD)^2=(AC\cdot BD)^2+(BC\cdot AD)^2$.

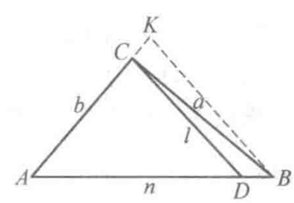

图 1-2

证明 必要性. 如图 1-2，作 $BK\parallel DC$ 交 AC 的延长线于 K，则

$$BK=\frac{AB}{AD}\cdot CD, CK=\frac{BD}{AD}\cdot AC.$$

由 $BK^2 = CK^2 + BC^2$. 将前述式代入上式化简即可证.

充分性. 令 $BC = a, AC = b, AB = c, CD = l, AD = n, DB = m$, 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 中, 应用余弦定理得

$$-\frac{m^2 + l^2 - a^2}{2ml} = \frac{n^2 + l^2 - b^2}{2nl}.$$

注意到 $m + n = c$, 化简得

$$cl^2 + cmn = na^2 + mb^2,$$

所以 $c^2 l^2 + c^2 mn = (na^2 + mb^2)(m + n) = mn(a^2 + b^2) + b^2 m^2 + a^2 n^2$.

而已知有 $c^2 l^2 = b^2 m^2 + a^2 n^2$, 从而 $c^2 = a^2 + b^2$ 即证.

性质 6　如图 1-3, 在 Rt$\triangle ABC$ 中, CD 为斜边 AB 上的高, I_1, I_2 分别为 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CDB$ 的内心, 过 I_1, I_2 的直线交 AC 于 M, 交 BC 于 N; 延长 CI_1 交 AD 于 P, 延长 CI_2 交 DB 于 Q; 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 则

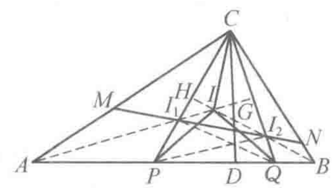

图 1-3

(1) $\angle PCQ = 45°$.

(2) $AQ = AC, BP = BC$.

(3) $CM = CD = CN$, 且 $MI_1^2 + I_2N^2 = I_1I_2^2$.

(4) 三直线 PI_2, QI_1, CD 共点.

(5) $CI \perp I_1I_2$, 且 $CI = I_1I_2$.

(6) $\angle PIQ = 90°$.

证明　(1) $\angle PCQ = \frac{1}{2}\angle ACD + \frac{1}{2}\angle DCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 45°$.

(2) 由 $\angle ACQ = \angle ACD + \frac{1}{2}\angle DCB = \angle B + \frac{1}{2}\angle DCB = \angle AQC$, 知

$$AQ = AC.$$

同理

$$BP = BC.$$

(3) 由 Rt$\triangle ADC \backsim$ Rt$\triangle CDB$, 有

$$\frac{DI_1}{DI_2} = \frac{AC}{BC}.$$

又 $\angle I_1DI_2 = \frac{1}{2}\angle ADB = 90° = \angle ACB$, 则

$$\triangle I_1DI_2 \backsim \triangle ACB,$$

即

$$\angle I_2I_1D = \angle A.$$

故 M, A, D, I_1 共圆, 则

$$\angle CMI_1 = \angle ADI_1 = \angle CDI_1 = 45°.$$

于是

$$MI_1 = DI_1, I_2N = DI_2, \triangle CMI_1 \cong \triangle CDI_1,$$

即

$$CM = CD, MI_1 = DI_1.$$

同理 $$CN=CD, I_2N=DI_2.$$

在 $Rt\triangle I_1DI_2$ 中，有

$$I_1D^2+I_2D^2=I_1I_2^2.$$

由此即证得 $$MI_1^2+I_2N^2=I_1I_2^2.$$

(4) 由 $AQ=AC$，及 I_1 在 $\angle A$ 的平分线上，则 I_1 在 CQ 的中垂线上，即 $CI_1=I_1Q$，又 $\angle PCQ=45°$，则 $\angle CI_1Q=90°$. 同理 $\angle CI_2P=90°$，故 PI_2 与 QI_1 相交于 $\triangle CPQ$ 的垂心，而 $CD\perp PQ$，故 CD 过此垂心，即三直线 PI_2，QI_1，CD 共点.

(5) 联结 AI，BI，易知 I_1，I_2 分别在 AI，BI 上，且有 $AI\perp CQ$，$BI\perp PC$，即 I 为 $\triangle CI_1I_2$ 的垂心，得 $CI\perp I_1I_2$.

又 $\angle I_1CI_2=45°$，设 I_1I 交 CI_2 于 G，有 $CG=I_1G$，则

$$Rt\triangle CIG\cong Rt\triangle I_1I_2G.$$

故 $$CI=I_1I_2.$$

(6) 延长 AI 交 CQ 于 G，延长 BI 交 CP 于 H，则 I_1，I_2 分别在 AG，BH 上.

由 $AC=AQ$，$BC=BP$，可知 AG 为 QC 的中垂线，BH 为 CP 的中垂线，有

$$IQ=IC, IP=IC,$$

即 $$IP=IQ=IC.$$

故 I 为 $\triangle CPQ$ 的外心，于是

$$\angle PIQ=2\angle PCQ=\angle ACB=90°.$$

即 $$\angle PIQ=90°.$$

性质 7 如图 1-4，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，$CD\perp AB$ 于 D，$\triangle ACB$，$\triangle ADC$，$\triangle CDB$ 的内心分别为 I，I_1，I_2；圆 I_1 与圆 I_2 的另一条外公切线交 CD 于 G，交 AC 于 E，交 BC 于 F；I_1I_2 所在直线交 CD 于 K，交 AC 于 M，交 BC 于 N；设圆 I，圆 I_1，圆 I_2 的半径分别为 r，r_1，r_2，则

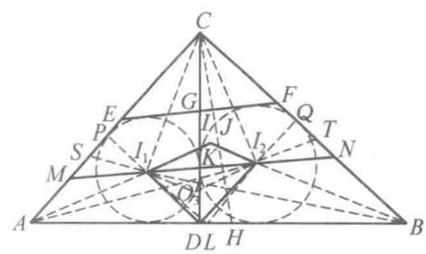

图 1-4

(1) $\triangle I_1DI_2\backsim\triangle ACB$.

(2) $I_1G=I_2G$.

(3) $\triangle CEF\backsim\triangle CBA$.

(4) $r_1^2+r_2^2=r^2$.

(5) 当 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$，$\triangle CDB$ 的半周长分别为 p，p_1，p_2 时，$(p_1\pm r_1)^2+(p_2\pm r_2)^2=(p+r)^2$.

(6) C，I，I_1，I_2 为一垂心组.

(7) $S_{\triangle ABC}\geqslant 2S_{\triangle MCN}$.

(8) 以边 AB 上的中线 HC 为直径的圆必与内切圆圆 I 相切.

(9) $CG=p-c=r$，$r_1+r_2+r=CD$.

(10) $\angle AI_2C=\angle BI_1C$.

(11) 设 $\triangle DI_1I_2$ 的内心为 O_3，则 $II_1O_3I_2$ 为平行四边形.

(12) 延长 O_3I_1 交 AC 于 S，延长 O_3I_2 交 BC 于 T，则 S、I、T 三点共线.

(13) 设圆 I_1 切 AC 于 P，圆 I_2 切 BC 于 Q，圆 I_1 与圆 I_2 的另一条内公切线(不同于 CD)交 AB 于 L，则 P,I_1,L 及 Q,I_2,L 分别三点共线.

(14) 延长 AI 交 BC 于 U，延长 BI 交 AC 于 V，则 $S_{ABUV}=2S_{\triangle AIB}$.

(15) $\dfrac{1}{BC}+\dfrac{1}{AC}=\dfrac{1}{CK}$.

证明　(1) 由 $\mathrm{Rt}\triangle ADC\backsim\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 知

$$\frac{I_1D}{I_2D}=\frac{AC}{BC}.$$

而 $\angle I_1DI_2=90^\circ$，故

$$\mathrm{Rt}\triangle I_1DI_2\backsim\mathrm{Rt}\triangle ACB.$$

(2) 由 $\angle I_1DI_2=90^\circ=\angle I_1GI_2$，知 I_1,D,I_2,G 共圆，从而

$$\angle I_1I_2G=\angle I_1DG=45^\circ=\angle I_2DG=\angle I_2I_1G,$$

故
$$I_1G=I_2G.$$

(3) 由 $\angle I_1I_2G=45^\circ=\angle I_2NC$，知

$$I_2G\parallel NC.$$

故
$$\angle CFE=\angle FGI_2=\angle I_2GD=\angle I_2I_1D=\angle A.$$

同理，$\angle CEF=\angle B$，故 $\triangle CEF\backsim\triangle CBA$.

由上亦推之 A,B,F,E 四点共圆.

(4)，(5) 由 $\mathrm{Rt}\triangle ACB\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADC\backsim\mathrm{Rt}\triangle BDC$，知

$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{r_1^2}{r^2}=\frac{p_1^2}{p^2},\frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{r_2^2}{r^2}=\frac{p_2^2}{p^2}.$$

而 $S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BDC}=S_{\triangle ACB}$，从而有

$$r_1^2+r_2^2=r^2,p_1^2+p_2^2=p^2,r_1p_1+r_2p_2=rp.$$

前两式之和加或减第三式的 2 倍即证得(5).

(6) 设 BI 的延长线交 CI_1 于 T，由 $\angle I_1II_2=135^\circ$，知 $\angle I_1IT=45^\circ=\angle CI_1I$，从而知 $I_2I\perp CI_1$. 同理 $I_1I\perp CI_2$，即知 I 为 $\triangle CI_1I_2$ 的垂心，故 C,I,I_1,I_2 为一垂心组.

(7) 设 H 为 AB 中点，则 $CD\leqslant CH$. 由(2)，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=AH\cdot CD\geqslant CD^2,$$

$$S_{\triangle MCN}=\frac{1}{2}CM\cdot CN=\frac{1}{2}CD^2.$$

故
$$S_{\triangle ABC}\geqslant 2S_{\triangle MCN}.$$

(8) 由于 H 为 AB 的中点，则 H 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的外心. 设 HC 的中点为 J，则圆 I 与圆 J 相切 $\Leftrightarrow IJ^2=(r-JC)^2=\left(r-\dfrac{R}{2}\right)^2$(其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径)，注意到 IJ 为 $\triangle IHC$ 的中线，则

$$4IJ^2 = 2CI^2 + 2IH^2 - CH^2 = 4r^2 + 2(R^2 - 2Rr) - R^2 = (R-2r)^2,$$

其中，$IH^2 = R^2 - 2Rr$，即 $IJ^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2$，由此即证.

(9) 利用切线长关系即可推得前式，后式由内切圆半径与边长关系即可推得.

(10) 由

$$\angle AI_1D = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACD = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC, \angle ABI_2 = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

知
$$\begin{aligned}\angle AI_1I_2 + \angle ABI_2 &= (\angle AI_1D + \angle DI_1I_2) + \angle ABI_2\\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC + \angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC\\ &= 90^\circ + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ.\end{aligned}$$

从而知 A,B,I_2,I_1 四点共圆，则有

$$\angle AI_2B = \angle AI_1B.$$

又 $\angle BI_2C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADC = \angle AI_1C$，故

$$\begin{aligned}\angle AI_2C &= 360^\circ - \angle AI_2B - \angle BI_2C\\ &= 360^\circ - \angle AI_1B - \angle AI_1C = \angle BI_1C.\end{aligned}$$

(11) 显然，O_3 在 CD 上. 由 $CM = CD = NC$ 及(6)知，$AI_1 \parallel DN$(因 $DN \perp CI_2$，$I_1I \perp CI_2$). 又

$$\angle DI_2O_3 = \frac{1}{2}\angle I_1I_2D = \frac{1}{2}\angle B = \angle NBI_2 = \angle NDI_2,$$

从而
$$DN \parallel O_3I_2.$$

即有
$$I_1I \parallel O_3I_2.$$

同理，$O_3I_1 \parallel I_2I$. 故 $II_1O_3I_2$ 为平行四边形.

(12) 因 $II_1O_3I_2$ 为平行四边形，可证 $CI_1 \perp SO_3$，$CI_2 \perp O_3T$. 则 $II_2 = I_1O_3 = SI_1$，$II_1 = O_3I_2 = I_2T$，$\angle SI_1I = \angle I_1II_2 = \angle II_2T$，从而 $\triangle SI_1I \cong \triangle I_2II_1 \cong \triangle II_2T$，有

$$\angle SII_1 = \angle II_1I_2, \angle TII_2 = \angle II_2I_1,$$

即
$$\angle SII_1 + \angle I_1II_2 + \angle I_2IT = 180^\circ.$$

故 S,I,T 三点共线.

(13) 由 $\angle I_1LI_2 = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$，知 I_2,L,D,I_1 四点共圆，则 $\angle I_1LD$ 或 $\angle I_2DL = \angle I_2I_1D = A$，即 $I_2L \parallel CA$. 又 $AC \perp BC$，则 $I_2L \perp BC$. 又 $I_2Q \perp BC$，则 L,I_2,Q 三点共线. 同理 P,I_1,L 三点共线.

(14) 注意到 $ab = 2pr = 2p(p-c)$. $CU = \frac{ab}{b+c}$，$CV = \frac{ab}{a+c}$，由

$$S_{ABUV}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CUV}=\frac{abcp}{(a+c)(b+c)}=cr,$$

即证.

(15) **证法 1**　令 $\angle ACD=\alpha$，则 $\angle DCB=90^\circ-\alpha$，由张角定理，有

$$\frac{\sin 90^\circ}{CK}=\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{CM}+\frac{\sin\alpha}{CN}.$$

而
$$\sin(90^\circ-\alpha)=\sin A=\frac{CD}{AC}=\frac{CM}{AC},$$

$$\sin\alpha=\sin B=\frac{CD}{BC}=\frac{CN}{BC}.$$

于是
$$\frac{1}{CK}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}.$$

证法 2　延长 AC 至 R，使 $CR=CB$.

由 $AM=AN$，知

$$\triangle BAR\backsim\triangle KCN.$$

从而
$$AR\cdot CK=AB\cdot CN,$$

即
$$(AC+CR)\cdot CK=AB\cdot CD,$$

亦即
$$(AC+CB)\cdot CK=AC\cdot CB.$$

故
$$\frac{1}{CK}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}.$$

性质 8　在 $\mathrm{RT}\triangle ABC$ 中，AB 为斜边. 则

(1) $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r=\dfrac{AC+BC-AB}{2}$.

(2) 当圆 Γ 与 AB 边上的高 CD、DB 及 $\triangle ABC$ 的外接圆均相切且切 BD 于点 T 时，圆 Γ 的半径 $r_1=\dfrac{AT\cdot TB}{AT+TB}$，且 CT 平分 $\angle BCD$.

事实上，对于(2)设 O 为 AB 的中点，O_1 为圆 Γ 的圆心，令 $AT=x$，$TB=y$，则 $OA=OB=\dfrac{1}{2}(x+y)$，$OT=\dfrac{1}{2}|x-y|$. $OO_1=\dfrac{1}{2}(x+y)-r_1$，$O_1T=r_1$.

由 $OO_1^2=OT^2+O_1T^2$，即知 $r_1=\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{AT\cdot TB}{AT+TB}$.

又令 $AD=a$，$DB=b$，则 $x=a+r_1$，$y=b-r_1$. 由 $r_1=\dfrac{xy}{x+y}$有

$r_1^2+2ar_1-ab=0$，即 $r_1=\sqrt{a(a+b)}-a$，从而 $AT=AD+DT=\sqrt{a(a+b)}$.

而 $AC=\sqrt{AD\cdot AB}=\sqrt{a(a+b)}$，即 $AT=AC$.

从而 $\angle DCT=90^\circ-\angle CTA=\dfrac{1}{2}\angle CAT=\dfrac{1}{2}\angle BCD$，即知 CT 平分 $\angle BCD$.

例 1 (2008 年克罗地亚数学竞赛题)若$\triangle ABC$通过同一顶点的高线、角平分线、中线将该角四等分.求$\triangle ABC$的三个内角.

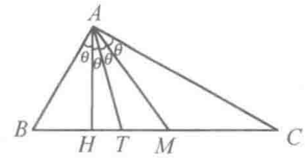

图 1-5

解 如图 1-5,不失一般性,设 AH、AT、AM 分别为过顶点 A 的高线、角平分线、中线.

设 $\angle BAH=\theta$,则 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\theta$,

$\angle ACB=\pi-4\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{2}-3\theta$.

在$\triangle ABM$和$\triangle AMC$中应用正弦定理,有

$$AM=\frac{BM\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin 3\theta}=\frac{BM\cdot\cos\theta}{\sin 3\theta},$$

$$AM=\frac{CM\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-3\theta\right)}{\sin\theta}=\frac{CM\cdot\cos 3\theta}{\sin\theta}.$$

从而$\frac{\cos\theta}{\sin 3\theta}=\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta}$,即 $\sin 2\theta=\sin 6\theta$.

而 $4\theta<\pi$,故 $\theta=\frac{\pi}{8}$.故 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$,$\angle ACB=\frac{\pi}{8}$,$\angle ABC=\frac{3\pi}{8}$.

例 2 (2008 年克罗地亚数学竞赛题)已知$\triangle ABC$的边 BC 的中线和高恰好将$\angle BAC$等分.求$\triangle ABC$的三个内角.

解 如图 1-6,设 AH、AM 分别为 BC 边上的高和中线.

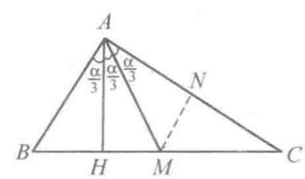

图 1-6

则 $BH=HM$,$MC=BM=2HM$.由角平分线性质,有$\frac{AH}{AC}=\frac{HM}{MC}=\frac{1}{2}$.

即 $AC=2AH$,从而 $\angle C=30°$.

于是 $\angle A=\frac{3}{2}\angle HAC=\frac{3}{2}\cdot 60°=90°$,$\angle B=60°$.

例 3 (2004 年第 12 届土耳其国家数学奥林匹克题)已知$\triangle ABC$满足$\angle B>\angle C$,$\angle A$的平分线和过顶点的高线、中线与边 BC 分别交于点 L、H、D.证明$\angle HAL=\angle DAL$的充分必要条件是$\angle BAC=90°$.

证明 充分性:若 $\angle BAC=90°$,因为 AD 为中线,则 $BD=AD=DC$,即 $\angle DAC=\angle ACD=\angle BAH$.

又 $\angle BAL=\angle CAL$,故 $\angle HAL=\angle DAL$.

必要性:如图 1-7,若 $\angle HAL=\angle DAL$,

又 $\angle BAL=\angle LAC$,则 $\angle BAH=\angle CAD$.

作 $CK\perp AC$ 交 AD 的延长线于点 K,则

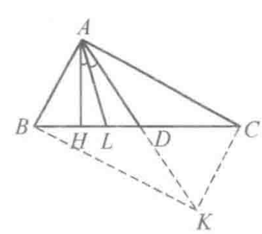

图 1-7

$\angle AKC=90°-\angle DAC=90°-\angle BAH=\angle ABC$.

所以，A、B、K、C 四点共圆．从而，$\angle ABK = 90°$．于是，AK 为四边形 $ABKC$ 的外接圆的直径．

易知 AD 与 BC 不垂直，又 AK 平分 BC，所以，BC 也为外接圆的直径．

因为 $BD = DC$，所以 D 为圆心．即 $DA = DB = DC$，故 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle BAC = 90°$．

例 4　设 m_x、h_x 分别表示三角形顶点 x 所对边上的中线长，高线长，$\triangle ABC$ 为直角三角形，且 C 为直角顶点的充要条件是下列两式之一成立．

(1) $m_A^2 + m_B^2 = 5m_C^2$．

(2) $h_A \cdot h_B = h_C \cdot \sqrt{h_A^2 + h_B^2}$．

证明提示　(1) 注意到三角形的中线长公式 $\left(如\ m_A^2 = \dfrac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)\right)$ 及性质 1 即证．

(2) 注意到面积关系 $\dfrac{h_A}{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{h_B}{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{h_C}{\dfrac{1}{c}}$ 及性质 1 即证．

例 5　$\triangle ABC$ 为直角三角形，且 C 为直角顶点的充要条件是下述条件成立．

设 m_C，h_C，t_C 分别为$\angle C$ 所对边上的中线长，高线长及$\angle C$ 的平分线长时，$(m_C + h_C)t_C^2 = 2m_C \cdot h_C^2$．

证明　设 CD、CH、CL 分别是 AB 边上的中线、高线、$\angle C$ 的平分线．

$\mathrm{Rt}\triangle CDH$ 中，由角平分线的判定与性质知，CL 平分$\angle DCH$ 的充要条件是 $LH = \dfrac{DH \cdot CH}{CD + CH}$．而

$$例 3 结论\quad \Leftrightarrow LH = \frac{DH \cdot CH}{DC + CH} = \frac{DH \cdot h_C}{m_C + h_C}$$

$$\Leftrightarrow CL^2 = h_C^2 + LH^2 = \frac{2m_C \cdot h_C^2}{m_C + h_C^2}（其中\ DH^2 = m_C^2 - h_C^2）$$

$$\Leftrightarrow (m_C + h_C) \cdot t_C^2 = 2m_C \cdot h_C^2.$$

例 6　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，C 为直角顶点．

(1) 设内角 A，B，C 所对的边长分别为 a，b，c，记 $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$，则

$$S_{\triangle ABC} = p(p - c) = (p - a)(p - b) = \frac{1}{2}ab.$$

(2) 设 AB 被内切圆切点 D 分为两段，则 $S_{\triangle ABC} = AD \cdot DB$．

证明　(1) 略．

(2) 设内切圆半径为 r，由

$$\frac{1}{2}(AD + r)(DB + r) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)r = (AD + DB + r)r.$$

即

$$AD \cdot DB = (AD + DB + r)r = S_{\triangle ABC}.$$

例 7 在$\triangle ABC$中，D在AB上，$AD=\lambda AB$，$BC=a$，$CA=b$，$CD=m$，则$\angle C=90^\circ$的充要条件是$m^2=\lambda^2a^2+(1-\lambda)^2b^2(0<\lambda<1)$.

证明 设$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，则

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b},$$
$$(\overrightarrow{CD})^2=(\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{b})^2.$$

即
$$m^2=\lambda^2\boldsymbol{a}^2+(1-\lambda)^2\boldsymbol{b}^2+2\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

$\angle C=90^\circ$的充要条件为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$m^2=\lambda^2\boldsymbol{a}^2+(1-\lambda)^2\boldsymbol{b}.^2$$

例 8 如图 1-8，在$\triangle ABC$中，T为AB上异于A，B的点，$AT=d$，$BT=e$，$CT=t$，$\angle CTB=\alpha$，则$\angle ACB=90^\circ$的充要条件是

$$t^2+t(d-e)\cos\alpha-de=0 \quad ①$$

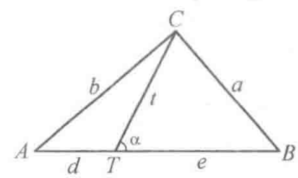

图 1-8

证明 必要性. 设$AC=b$，$BC=a$，由余弦定理，得

$$a^2=t^2+e^2-2te\cos\alpha, \quad ②$$
$$b^2=t^2+d^2+2td\cos\alpha. \quad ③$$

②，③ 两式相加，由于$\angle ACB=90^\circ$，得

$$(d+e)^2=a^2+b^2=d^2+e^2+2t^2+2t(d-e)\cos\alpha.$$

整理即得 ①.

充分性. 由 ① 出发，得

$$(d+e)^2=d^2+e^2+2t^2+2t(d-e)\cos\alpha,$$

应用余弦定理，得

$$(d+e)^2=a^2+b^2.$$

故
$$\angle ACB=90^\circ.$$

例 9 如图 1-9，设 Rt$\triangle ABC$($\angle A$为直角)的内切圆圆I与$\triangle ABC$的三边分别切于D，E，F，$\triangle DEF$，$\triangle BDF$，$\triangle CDE$的垂心分别为H_1，H_2，H_3. 则$\triangle H_1H_2H_3$是等腰直角三角形.

证明 延长AI交BC于G，联结BI，CI，由已知得H_2，H_3分别在BI，CI上. 其余连线如图 1-9 所示.

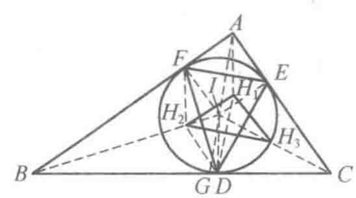

图 1-9

易知$AEIF$是正方形，所以

$$\angle EIF=90^\circ,$$

且
$$AI=EF.$$

又因为$\angle EDF=\frac{1}{2}\angle EIF=45^\circ$，$H_1$是$\triangle DEF$的垂心，由含$45^\circ$角的三角形性质 2，知$DH_1=EF$，所以$AI=DH_1$.

另一方面