发现数学之美

张安军/著

FAXIAN SHUXUE ZHI MEI

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

发现数学之美

FAXIAN SHUXUE ZHI MEI

张安军/著

东北师范大学出版社
长 春

图书在版编目(CIP)数据

发现数学之美/张安军著. —长春:东北师范大学出版社,2013.5
ISBN 978 - 7 - 5602 - 8983 - 0

Ⅰ.①发… Ⅱ.①张… Ⅲ.①中学数学课 - 初中 - 课外读物 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 098306 号

□责任编辑:王宏志　曲　颖　□封面设计:张　然
□责任校对:孔垂阳　刘　昆　□责任印制:刘兆辉

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号(邮政编码:130117)
网址:http://www.nenup.com
东师大出版社旗舰店:http://nenup.taobao.com
读者服务部:0431—84568069　0431—84568213
电子函件:sdcbs@mail.jl.cn
东北师范大学出版社激光照排中心制版
长春市利源彩印有限公司印装
2013 年 5 月第 1 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
幅面尺寸:169 mm×239 mm　印张:12　字数:210 千

定价:30.00 元

序　言

当下我国的数学教育亦喜亦忧，喜的是国际奥数和 PISA 成绩居世界前列，忧的是受传统文化影响，功利性价值取向突出，利益意识强化。数学让学生感到枯燥，数学给人以冰冷和严肃的面孔，如同冰箱，缺少热度。转而联想 CCTV10 百家讲坛系列讲座，深受广大群众喜爱，把古代经典文化讲解得通俗易懂、深入浅出又雅俗共赏。文化似水，文而化之，春风化雨滋润人们的心田，把文化的特性演绎得淋漓尽致。数学也是一种文化，正如著名数学家朱梧槚所言："数学有两种品格，一是工具品格，二是文化品格。对于那些当年接受过立足于数学之文化品格数学训练的学生来说，当他们后来真正成为哲学大师、著名律师或运筹帷幄的将帅时，可能早已把学生时代所学到的那些非实用性的数学知识忘得一干二净了。但那种铭刻于头脑中的数学精神和数学文化理念，会长期地在他们的事业中发挥重要作用。也就是说，他们当年所受到的数学训练，一直会在他们的生存方式和思维方式中潜在地起着根本性的作用，并且受用终身。这就是数学之文化品格、文化理念与文化素质原则之深远意义和至高的价值所在。"

当前的教育，让学生感觉不到数学的可爱，数学给人以冰冷和严肃的面孔，过量的数学教学活动和过多的作业，还有试卷中有太多的重复，机械地训练目的是提高解题的速度，好像是数学的考试比的是熟练，谁在单位时间内做得又快又准确，谁就学得最好。"当曾经感受着数学的阳光沐浴的孩子被无谓的难题、偏题和怪题所恐吓的时候，天真的好奇心和求知欲就伴随着噩梦的来临而消失在漫漫的黑夜里，更不用说多少青春年华被消耗在无谓的竞争和莫名其妙的好胜心当中。"学生在毕业之后，对数学知识和数学课堂能有留下多少美好的回忆呢？或者是深刻的思想、或者是凝练的公式、或者是精妙的推理、或者是美妙的图形、或者是奇特的数字、或者是有用的模式和有趣的图表。但实际情况远非如此乐观，某些非官方的调查显示，数学是学生在学校里最厌恶的学科之一，为什么要让孩子们总是愉快地回想起在篮球场上的嬉戏打闹或是在音乐课上的引吭高歌，而对数学老师厚厚的眼镜片和似乎永远也做不完的数学题皱起眉头呢？

教师的手头有的都是有关解题参考书，学生对数学的认识仅停留在解题

的层面，停留在试卷分数层面。向学生传授学习经验第一招是做题，第二招是做题，第三招还是做题。以熟练为取胜之道，强化训练出来的竞赛获奖者，往往并不能成为出色的研究者，他们更像优秀运动员，而不大像数学家。小学生在一次次数学测试中，不停地丧失数学学习的信心。从不喜欢数学到害怕数学，再到对数学避而远之。基于以上数学教育中的现状，树立正确的数学观，认识数学的真实形象，是数学教学责无旁贷的任务。由于应试和功利的影响使学生陷入茫茫题海战术中，学生很难体会到数学的另一面，教师力求还原数学本来的、生动活泼的形象，数学家为追求真理上下求索的火热的思考和曾经狂热、激动的不眠之夜，由此，数学课堂中教师的任务是把静态的、学术形态的“数学文化”转化为动态的、教育形态的文化，把“冰冷的美丽”变为“火热的思考”，从而帮助学生对数学产生兴趣和好奇，激发数学学习的热情，让数学变得亲近、可爱。

目　录

第一章

美丽的数学——发现数学中的美

"有理数"蕴含数学之美

"有理数"(ration number)，非有道理的数，乃可比之数，也是古希腊毕达哥拉斯学派的遗风，毕氏学派倡导"万物皆数"，世界万物的本源来自于"数"，数是世界万物最本质的东西，把世界万物的多样性统一成"一"，这个"一"就是"数"，这个"数"指的是整数或可化为整数之比的数。现在所学习的"有理数"，不同于当初的可比之数。数系的发展从自然数到分数，再从分数超越逻辑的障碍到负数，经历了一个漫长而曲折的历程，看似平静的背后却有着火热的思想。在学习"有理数"一章时，或许你被有理数的运算弄得晕头转向，很难觉察它蕴含的数学之美。那么，有理数一章蕴含着哪些丰富的数学之美呢?

1. 简洁之美

著名数学家丘成桐谈到数学的简洁之美，数学的文采表现为简洁，寥寥数语便能道出不同现象的法则，甚至在自然界中发挥作用，这就是数学优雅美丽的地方。陈省身先生创作的陈氏类，文采斐然，令人赞叹，它在扭曲的空间中成为物理学界求量子化的主要工具。可谓是描述大自然美丽的诗篇，正如陶渊明"采菊东篱下，悠然见南山"的意境。

在有理数一章中如何表示 4 个$\left(-\frac{2}{3}\right)$相乘或 n 个 a 相乘呢?为了简洁地表示这特别的乘法，引进了"乘方"。如$\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^4$，$(a)^n=\underbrace{aaa\cdots a}_{n}$。

为了表示大数和微小的数，数学上采取科学记数法。例如，光的速度约为 300000000 米/秒，可表示为 3.0×10^8 米/秒。采取科学记数法表示显得简洁、明了。

在有理数的加减混合运算中，如：$(-17)-\left(-2\frac{3}{4}\right)+(-8)-(+7.75)+(+17)=-17+2\frac{3}{4}-8-7.75+17$。等式左边形式繁琐，书写

也不方便，体会不到运算符号和性质符号的相互统一性，因此通常省略运算符号“+”和“(　　)”。等式右边显得简洁，也能体会到运算符号和性质符号的相互统一性。深入浅出、言简意赅是文学的追求，也是数学的追求。

2. 负数——感受不同文化传统下的思维之美

从历史发展看，我国古代著名数学专著《九章算术》（成书于公元1世纪）中的“方程”一章，在世界数学史上首次正式引入负数及其加减运算法则：“正负数曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之；其异名相除，同名相益；正无入正之，负无入负之。”这里的名就是“号”，“除”就是“减”，“相益”、“相除”就是两数的绝对值“相加”、“相减”，“无”就是“零”。用现在的话说就是“正负数的加减法则是：同符号两数相减等于其绝对值相减，异号两数相减等于其绝对值相加。零加正数等于正数，零加负数等于负数。”

这段关于正负数运算法则的叙述完全正确，与现在的法则一致，负数的引入是我国数学家杰出的贡献之一，书中涉及不同颜色的算筹（小棍形状的记载工具）表示正负数的习惯一直保留到现在。

负数通过阿拉伯人的著作传到欧洲，西方数学家对负数的认识经历了一个漫长而曲折的过程。“15世纪的丘凯和16世纪的斯蒂费尔都把负数说成荒谬的数，卡丹给出了方程的负根，但认为是不可能的解，仅仅是一些记号，他把负数的根称为虚根，把正根称为真实的，韦达则全然摒弃负数。帕斯卡则认为从0中减去4纯粹是胡说八道，他在《思想录》中说道：‘了解那些不能明白为什么从零中取出后还剩零的人。’大多数学家并不承认它们是数，即使承认了也并不认为它们是方程的根。一直到19世纪30年代著名的英国代数学家摩根还强调负数与虚数一样都是虚根，他还举了一个例子解释他的观点：父亲56岁，他的儿子29岁，问：什么时候父亲的岁数将是儿子的岁数的2倍？为解这个问题列出方程：$56+x=2(29+x)$（这里的x是指过了x年后，父亲的岁数将是儿子的2倍），解得$x=-2$。因此他说，这个结果是荒谬的数。”①

总而言之，在17世纪前，并没有许多数学家心安理得地使用或者承认负数，更谈不上承认它们作为方程的真实的根。

① [美] M. 克莱因. 数学：确定性的丧失. 李宏魁，译. 长沙：湖南科学技术出版社，2007.

历史事实表明，中国古代的数学中，“负数常常在代数方程的求解过程中产生，由于中国古代算学高度发达，中国传统关注的数量计算对数的本质并没有太大的兴趣，负数是人类第一次越过正数域的范围。以前的种种经验，在负数面前全然无用，在数系发展的历史进程中，现实经验有时不仅无用，反而会成为一种阻碍。我们将会看到，负数并不是唯一的例子”①。

著名数学史家 M. 克莱因认为，欧洲数学家不能很好地接受负数，只是因为人们接受整数和小数的性质时，其基础自然是经验。当在数字中增添新型的数时，建立在经验基础上并已为人们接受的正整数和小数的运算法则就被用在这些新数上，并以几何思想作为得心应手的指导，这样负数就缺乏正数所具有的直观性和物理意义。其次，数系和几何的发展形成鲜明的对比。几何学是公元前 300 年用演绎的方法建立起来的，后面我们将看到几何中的几个瑕疵也易于纠正。但算术与代数怎么也找不到逻辑的基础，这样看来，缺少逻辑基础，没有几何意义，其运算规律也非常奇怪，势必会困扰所有的数学家。

综合上述的数学史，我们既要实事求是地认识到古代中国数学的长处，由于算法的高度发达和筹算机械化的特点而有创造性地引入“负数”这一概念，同时也认识到西方数学文化的长处。善于究根问底的西方数学家，继承了希腊人对几何学演绎公理化思想却无法迈过这一道坎，正因为西方人的这种长处，才把数系和代数学建立在可靠逻辑的基础上。

3. 闪烁着的数学思想之美

数学思想是数学海洋中美丽的珍珠，穿越数学的历史长河，依然闪闪发光。有理数一章中的数学思想有数形结合思想、化归思想、分类思想等。

3.1 数形结合思想

“数缺形，少直观；形缺数，难入微”是华罗庚对数形结合思想深刻、透彻的诠释。在有理数一章中，数和直线本来风马牛不相及，是两个不同的对象，但是当数和直线（即数轴）上的点建立起对应关系时，这两者就变成了同一个对象，两件事变成了同一件事，抽象的数就有了形象的直观。相当于从一个人的后脑看这个人，你看不到这个鲜活的形象，但若从正面看这个人，则非常形象直观。数轴把数分单元有序地排列在一条直线上，数在现实

① 纪志刚. 从记数法到复数域：数系理论的历史发展. 上海交通大学学报：社会科学学报，2007.

世界找不到，也看不见，但是在数轴上能找到点的形象。数轴是数形结合思想最好的模型，有了数轴这一模型，无形的数、抽象的概念，在数轴上显现为一个点，一个点代表一个数，数轴是数学思想的外化和比喻。有了数轴模型，相反数的概念就可以赋予形的解释，即分布在原点两旁且到原点的距离相等的两个点。当然，零的相反数是零（原点本身）。借助这一模型得到有理数的大小比较法则——“右边的数总比左边的数大”。绝对值的几何意义在数轴上找到了很好的解释，所谓求一个数的绝对值，就是在数轴上该数所代表的点到原点的距离。如：求 $|x+1|+|x-2|+\left|x-\frac{1}{2}\right|$ 的最小值。在数轴上描出-1，2，$\frac{1}{2}$，求出数 x 所在的点到这三个数所在的点距离最小。在数轴上很容易知道，当$x=\frac{1}{2}$时，最小值为 3。

3.2 化归思想

化归思想能够帮助我们把陌生的问题化归为熟悉的问题，把复杂的问题化归为简单的问题，把抽象的问题化归为具体的问题，把疑难的问题化归为易解的问题。那么，什么是化归思想呢？匈牙利女教学家罗莎在其《无穷的玩艺》中有一个精彩的比喻：摆在你面前的有水龙头、水壶、煤气灶和火柴。任务是烧开水，你将怎么办？答案是打开水龙头，把水壶注满水并放到煤气灶上，然后划着火柴点燃煤气灶烧开即可。罗莎又提出：如果水壶里已注满了水你又将怎么办？一般人的回答是把水壶放到煤气灶上，然后划着火柴点燃煤气灶烧开即可。可数学家的回答是，把水壶里的水倒掉，并声称自己把这一问题化归为最初提出的问题。在有理数这一章中有很多化归思想，如：

$$
\begin{aligned}
&17+(-32)\\
&=-(|-32|-|17|)\\
&=-(32-17)\\
&=-25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-\frac{3}{2}\right)\times(-0.52)\times\left(+\frac{2}{3}\right)\times(-100)\\
&=-\left(\left|-\frac{3}{2}\right|\times|-0.52|\times\left|+\frac{2}{3}\right|\times|-100|\right)\\
&=-\left(\frac{3}{2}\times0.52\times\frac{2}{3}\times100\right)\\
&=-52
\end{aligned}
$$

从上面的计算可以看到，计算的第一步，括号的前面是符号判别，括号里面通过绝对值转化为我们熟悉的四则运算，说得具体一点，括号前面的符号判别是陌生的，至于括号里的计算是旧的、熟悉的内容，同样，有理数的减法和除法都可以化归为小学学过的运算。所以，有理数的运算法则通过化归可以转化为熟悉的四则运算。

3.3　分类思想

“物以类聚，人以群分”是分类思想的一种反映，数学中的分类思想依据数学研究对象本质属性的相同点和差异点，将数学对象分为不同种类的思想。在有理数一章中有许多分类思想，如：有理数可分成正数、零、负数。由于分类标准不一样，有理数也可以分成整数和分数，如：有理数的绝对值可以分成正数的绝对值、负数的绝对值、零的绝对值。

再如：有理数的加法法则通过对两个有理数的正负性的分类分成正数＋正数、正数＋负数、负数＋正数、负数＋负数、零＋正数、零＋负数、零＋零。也可按照同号、异号和零分成同号两数相加、异号两数相加，以及零加一个数。对数的精确度要求不一样，数可分成准确数和近似数等。

4. 哲学的思辨之美

“在古希腊，哲学家大都格外重视数学。最早的唯物主义哲学家泰勒斯，提出了原子唯物论的德谟克利特，最早的唯心主义哲学家毕达哥拉斯，都曾到埃及学习几何知识，创立唯心主义理念论的柏拉图，也特别推崇数学知识。”① 可见数学体现了丰富的哲学观点，在有理数一章也体现了辩证法。

4.1　对立统一思想

数学中充满矛盾，当然也充满对立与统一的问题。辩证法告诉我们：“一切矛盾的东西相互联系着，不但在一定条件下处于一个统一体中，还可以互相转化。”在有理数一章中体现了这种思想。如：$3-(-2)=3+(+2)$，减法和加法是一对相反的运算，减法在一定条件下可转化为加法。同样，$(-5)\div(-4)=(-5)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$的运算也体现了对立与统一。此外还有精确与近似、正与负、相等与不等、动与静、数与形等，都反映了既对立又统一的唯物主义观点。

---

①　张景中．数学与哲学．北京：中国少年儿童出版社，2003．

4.2 变与不变

数是数学中的基本概念，也是人类文明的重要组成部分。数的概念的每一次扩充都标志着数学的巨大飞跃，人们对于数的认识与应用，以及数系理论的完善程度可以反映当时的数学发展水平。在数系的发展过程中，“变与不变”始终贯穿着整个过程。

人类在生活和生产实践中认识的第一种数为自然数，自然数对除法运算是不封闭的。为了保证除法运算不变，即运算通行无阻而引进分数。分数和自然数在小学中我们统称为算术数。在算术数中为了保证减法运算的不变，即运算通行无阻而引进有理数。概括地说：“数系扩展中，由自然数系发展到整数系，由整数系到有理数系，由有理数系到实数系，由实数系到复数系，实际上就是多次连续数系扩展中发现不变的运算特征，本质上就是强调多次抽象化来发展数学的抽象化眼光，透过不变部分的研究发展数学的公理化眼光，实际上培养的是数学数系扩展的抽象化和公理化眼光。运算扩展中也重复了这样的理念。加法是最基本的运算，由人们生活的需要而自然产生，如果相加的数相同，我们把相同的数连续相加的简便运算特别取名为乘法，从变式的角度，乘法在本质上只是一个特别的加法，加的性质不变，是加法的一种特殊变化。与此完全类似，同一个数相乘若干次，求其结果的一种运算方法；也特别取名为乘方。”① 其次是在数系的发展中，随着数系范围的扩大及新成员的加入，运算法则也随之而变，但运算中有着优良的传统作风——变中之不变，如加法的交换律和结合律、乘法的交换律和结合律即是变中的不变。数为何物？这是每次数系扩充后的深思，一部分数学家就认为，到底是不是数要看其运算和运算律是否成立。

4.3 否定之否定

著名数学史家 M. 克莱因在谈到负数为何经历一个曲折而漫长的过程时说：“负数对数学家的困扰远胜于无理数。大概是因为负数没有现在的几何意义，并且其运算规则也非常奇怪……即便是在最好的课本中，表示减法的减号和用来表示负数的负号，仍然常常被弄混。”在有理数的乘法法则中，“负负得正”很难找到现实生活中的模型。欧拉在《对代数的完整介绍》(1770) 一书中证明了减 $-b$ 的运算等于加 b 运算，因为“免除负债即意味着奉送礼物”。“中国有句古语，叫做‘物极必反’，这和辩证法的‘否定之否定’是一致的。”否定之否定是事物内部矛盾对立面的两次转化，即肯定

① 孙旭花，黄毅英，林智中. 变式的角度 数学的眼光. 数学教学，2007（10）.

——否定——否定。在有理数的乘法法则中，“负负得正”说起来容易，但真正理解起来很难。如果联系实际生活，双重否定即是肯定。如：无孔不入，战无不胜，攻无不克，“莫愁前路无知己，天下谁人不识君”等可加深对乘法法则的认识。

对美与数学的探讨自古就有，古希腊哲学家、数学家普罗克拉斯曾断言：“哪里有数，哪里就有美。”开普勒认为“数学是这个世界之美的原型”。培根更断言：“数学是关于美的科学。”著名的法国数学家、物理学家彭加勒说：“感觉数学的美，感觉数和形的调和，感觉几何学的优雅，这是所有数学家都知道的美感。”罗素说：“数学如果正确地看，不但拥有真理，而且有至高无上的美——正像雕刻的美，是一种冷而严肃的美。”罗素的话指出认识数学美的途经在于“正确地看数学”。“现今，由于人们认识到数学是一种文化，数学文化的美学观构成数学文化的重要内容，美的理念与数学教育成为当前数学教育研究中的一个热门课题。审美的追求对数学教育的作用也引起广大数学教师的重视，作为21世纪的教育工作者，尤其是第一线的教师，应该在数学教学中指导学生进行一定的审美活动，以推动数学教学乃至整个素质教育的发展。”①

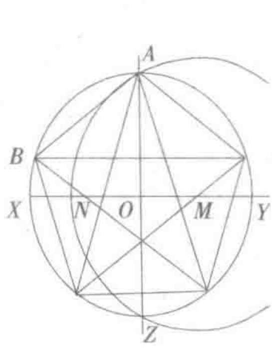
① 周春荔. 数学美学与数学教育刍议. 中学数学研究，2006（11）.

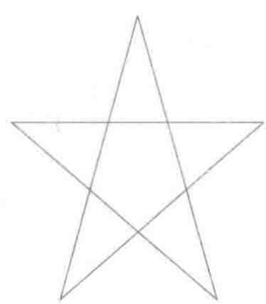
美哉黄金分割

爱美之心，人皆有之。美本身有着影响力和吸引力，在市场经济中美更具有经济性。当下商家们利用人们的这种心理，打造一个个绝美的偶像，偶像如同柏拉图所云“美的理念”，让人们高不可攀，生活中我们都是平凡之人，面对偶像使人们感到自惭形秽。什么是最美的形象？在大众传媒时代里，我们接受的是商家打造的固定的偶像美，由于和偶像美的极大反差，为了找到美的自信，人们甚至不惜健康而整容，如前些年出现的“王贝整容”事件。

毫无讳言，年轻的王贝是健康漂亮的，就连这么美丽的王贝也冒着生命危险进行整容，那么人们不禁要问：商家打造美的标准是什么？

其实，这些美的标准是古希腊的先贤们在两千多年前就已经确立的，如毕达哥拉斯学派的黄金分割和对称等。说穿了，这些美的准则是数学的、理性的，同时又是冰冷的、亘古不变的准则。毕达哥拉斯学派在对数学的发现中，不断追求“美”的形式，他们认为日、月、五星都是球形，浮悬在太空中，这是最完美的立体，而圆是最完美的平面图。就是曾被誉为“巧妙的比例”并染上各种瑰丽诡秘色彩的“黄金分割”也是这个学派首先认识到的，这个学派的会徽是正五角星，正五角星蕴含“黄金分割”，如下图所示：





古希腊人按照这些美的准则设计出巴台农神庙等。

巴台农神庙正前面如图中白线表示的矩形，以矩形的宽为边在其内部作正方形，我们可以惊奇地发现，剩下的矩形和原矩形相似，矩形的宽和长之比恰好是黄金分割。