

S X S D C B S

初中数学解题指导之二

初中代数 一题多解

100例

马 飞 编 著

陕 西 师 范 大 学 出 版 社

初中数学解题指导之二

初中代数一题多解 100 例



陕西师范大学出版社

图书代号:JF058300

初中数学解题指导之二

初中代数一题多解 100 例

马 飞 编著

陕西师范大学出版社出版发行

(西安市陕西师大 120 信箱 邮政编码 710062)

新华书店经销 陕教社一分厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 5.375 字数 116 千

1996 年 7 月第 1 版 1997 年 3 月第 2 次印刷

印数:15001—30000

ISBN 7-5613-1356-X/G·1013

定 价:5.00 元

开户行:西安工行小寨分理处 帐号:216-065026-27

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与发行科联系、调换

电话:(029)5251046

目 录

一、数	(1)
二、整式	(9)
三、分式	(33)
四、二次根式	(54)
五、不等式	(74)
六、方程与方程组	(81)
七、判别式与韦达定理	(105)
八、方程与方程组的应用	(125)
九、函数与统计初步	(155)

一、数

例 1 用代数式表示任意三个连续的自然数,并说明它们的和能被 3 整除.

分析 为了表示任意三个连续的自然数,就必须使之具有一般性,这时就必须用字母表示数. 考虑是连续的自然数,就容易想到它们之间的内在联系——后一个恰比前一个大 1,于是有了下面的几种解法.

解法 1 设最小的一个是 n (n 为自然数),则第二个可表示为 $n+1$,第三个为 $n+2$.

于是 $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$.

故知任意三个连续的自然数的和能被 3 整除.

解法 2 设中间的一个是 n (n 表示大于 1 的自然数),则最小的一个是 $n-1$,最大的一个是 $n+1$.

以下略.

解法 3 设最大的一个是 n (n 表示大于 2 的自然数),则最小的一个表示为 $n-2$,中间的一个可表示为 $n-1$. 以下略.

例 2 证明 1995^2+1996 不是完全平方数.

证法 1 $\because 1995^2 < 1995^2+1996$

$$< 1995^2+2 \times 1995+1$$

$$= (1995+1)^2,$$

而 1995^2 和 $(1995+1)^2$ 是两个连续完全平方数,其间不

可能再有完全平方数,

$\therefore 1995^2+1996$ 不是完全平方数.

证法 2 由于 1995^2 是奇数, 而 1996 是偶数, 所以 1995^2+1996 必是一个奇数.

设 $1995^2+1996=(2k+1)^2, k$ 为整数

则 $1995^2+1996=4k^2+4k+1,$

即 $1995^2+1996=4k(k+1),$

$1995(1995+1)=4k(k+1),$

且 $\therefore 1995 \times 1996=4k(k+1).$

因为 $k(k+1)$ 为两个连续整数的乘积, 必是 2 的倍数, 所以 $4k(k+1)$ 一定能被 8 整除.

但 1996 不能被 8 整除, 所以原假设不成立.

故知 1995^2+1996 不是完全平方数.

证法 3 设 $1995=x,$ 则

$1995^2+1996=x^2+x+1.$

因为二次三项式的判别式 $\Delta=1^2-4 \times 1 \neq 0,$

所以 1995^2+1996 不是完全平方数.

例 3 求证对于任意自然数 n , 数 $2n^3+3n^2+n$ 一定能被 6 整除.

证法 1 $2n^3+3n^2+n=n(n+1)(2n+1).$

对自然数 k , 当 $n=2k$ 时, n 能被 2 整除; 当 $n=2k+1$ 时, $n+1=2(k+1)$ 能被 2 整除. 因此, 对任意的 $n, n(n+1)(2n+1)$ 能被 2 整除.

对自然数 k , 当 $n=3k$ 时, n 能被 3 整除; 对 $k=0, 1, 2, \dots$, 当 $n=3k+1$ 时, $2n+1=2(3k+1)+1=3(2k+1)$ 能被 3 整除; 当 $n=3k+2$ 时, $n+1=3(k+1)$ 能被 3 整除. 因此, 对任意

的 $n, n(n+1)(2n+1)$ 能被 3 整除.

故知对于任意自然数 n , 数 $2n^3 + 3n^2 + n$ 一定能被 6 整除.

证法 2 $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$.

因为 $n(n+1)$ 是两个连续自然数的乘积, 所以 $n(n+1)$ 能被 2 整除, 即知 $n(n+1)(2n+1)$ 能被 2 整除.

又因为 $n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{4} \cdot 2n(2n+1)(2n+2)$, 而 $2n, 2n+1, 2n+2$ 为三个连续的自然数, 其中必有一个是 3 的倍数, 3 和 4 的最大公因数是 1, 所以 $\frac{1}{4} \cdot 2n(2n+1)(2n+2)$ 能被 3 整除. 以下略.

证法 3 $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$
 $= 2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)$.

因为任意三个连续自然数中必有一个是 3 的倍数, 所以 $2n(n+1)(n+2)$ 能被 6 整除; 任意两个连续自然数中必有一个是偶数, 所以 $3n(n+1)$ 能被 6 整除. 故知 $2n(n+1)(n+2) - 3n(n+1)$ 一定能被 6 整除, 即对于任意自然数 n , 数 $2n^3 + 3n^2 + n$ 一定能被 6 整除.

说明 证法 1 是解决这类问题的常规方法. 证法 3 由于变形巧妙, 所以比较简便.

例 4 一个六位数 6 个数字都不相同, 最左边一位数字是 1, 表示为 $1abcde$ (其中 a, b, c, d, e 分别为各数位上的数字), 将它乘以 3 后变为 $abcde1$, 求这个六位数.

解法 1 采用推理的方法: 由于

$$\begin{array}{r} 1abcde \\ \times 3 \\ \hline abcde1 \end{array}$$

3 只有乘以 7 才能等于个位是 1 的数, 故先断定 $e=7$; 把 e 换

为 7 后,可进而断定 $d=5$;从右到左类推依次可得 $c=8, b=2, a=4$. 故所求的六位数为 142857.

解法 2 设这个六位数的后五位数(即 $abcde$)为 x ,则此六位数为 $(100000+x)$.

依题意,得 $3(100000+x)=10x+1$,

解得 $x=42857$,

于是这个六位数为 $100000+x=142857$.

解法 3 设这个六位数为 x .

依题意,得 $3x=10(x-100000)+1$,

$3x=10x-1000000+1$,

$\therefore 7x=999999$,

$\therefore x=142857$.

解法 4 设这个六位数乘以 3 以后变成的新六位数为 x ,

则原六位数为 $\left(100000+\frac{x-1}{10}\right)$.

依题意,得 $3\left(100000+\frac{x-1}{10}\right)=x$.

$300000+\frac{3(x-1)}{10}=x$, $7x=2999997$, $\therefore x=428571$.

故原六位数为 $100000+\frac{x-1}{10}=142857$.

例 5 比较 0.3 和 $\frac{1}{3}$ 的大小.

解法 1 化成小数比较.

$\therefore \frac{1}{3}=0.3333\dots$,

$\therefore 0.3 < \frac{1}{3}$.

解法 2 化成分数比较.

$$\therefore 0.3 = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}, \quad \frac{1}{3} = \frac{10}{30},$$

$$\therefore 0.3 < \frac{1}{3}.$$

$$\text{解法 3} \quad \therefore 0.3 - \frac{1}{3} = \frac{3}{10} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30} < 0,$$

$$\therefore 0.3 < \frac{1}{3}.$$

说明 解法 1 和解法 2 注重的是统一形式, 解法 3 是比较两数(或两式)大小的常用方法. 其推理过程是: 若 $a-b>0$ (或 <0), 则有 $a>b$ (或 $a<b$).

例 6 计算 1988^2 .

解法 1 列竖式计算可得 $1988^2 = 3952144$.

解法 2 查平方表可得 $1988^2 = 3952144$.

$$\begin{aligned} \text{解法 3} \quad 1988^2 &= (2000-12)^2 \\ &= 4000000 - 48000 + 144 \\ &= 3952144. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 4} \quad 1988^2 &= (1988+12)(1988-12) + 12^2 \\ &= 2000 \times 1976 + 144 \\ &= 3952144. \end{aligned}$$

说明 以上四种解法, 其中的解法 3 和解法 4 简便易行 (不用列竖式和查表).

例 7 如果 $a>b$, 那么 $b-a$ 与它的相反数哪个大?

分析 只要确定了 $b-a$ 的正负, 便可以利用相反数的意义, 根据“正数总大于其相反数, 负数总小于其相反数”来解.

$$\text{解法 1} \quad \because a>b,$$

$$\therefore b-a \text{ 是一个负数, 于是 } b-a \text{ 小于其相反数 } a-b.$$

$$\text{解法 2} \quad \because (b-a) - [-(b-a)]$$

$$=b-a+b-a=2(b-a),$$

又 $\because a > b$, 即 $2(b-a) < 0$,

$$\therefore (b-a) - [- (b-a)] < 0.$$

故知 $b-a$ 小于其相反数.

解法 3 $\because a > b$,

$$\therefore a-b > 0, b-a < 0.$$

$$\therefore b-a < a-b = -(b-a),$$

即 $b-a$ 小于其相反数 $-(b-a)$.

例 8 比较 -3 与 $-2\frac{7}{8}$ 的大小.

$$\text{解法 1 } \because |-3| = 3, \quad |-2\frac{7}{8}| = 2\frac{7}{8},$$

$$\text{又 } \because 3 > 2\frac{7}{8},$$

$$\therefore -3 < -2\frac{7}{8}.$$

解法 2 根据相反数的意义可知, 如果一个数的相反数大于另一个数的相反数, 那么这个数一定小于另一个数.

由于 -3 的相反数是 $+3$, $-2\frac{7}{8}$ 的相反数是 $+2\frac{7}{8}$.

$$\therefore +3 > +2\frac{7}{8},$$

$$\therefore -3 < -2\frac{7}{8}.$$

解法 3 由于数轴上表示的两个数, 右边的数较大, 而 $-2\frac{7}{8}$ 在 -3 的右边, 所以

$$-3 < -2\frac{7}{8}.$$

例 9 计算 $2 \times 5 \times 17 - (-2) \times (-5) \times (-17) - (-2)$

$$\times(-5) \times 17 + 2 \times (-5) \times 17.$$

解法 1 原式 $= 170 + 170 - 170 - 170 = 0.$

解法 2

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \times 5 \times 17 + 2 \times 5 \times 17 - 2 \times 5 \times 17 - 2 \times 5 \times 17 \\ &= 0. \end{aligned}$$

说明 解法 1 是直接利用有理数运算法则进行计算的.

解法 2 灵活运用了有理数乘法的运算法则,抓住每项中积的绝对值都是 $2 \times 5 \times 17$,从而把注意力放在“确定符号”上,得出两对互为相反数,不经过计算就可以得出结果为零.

$$\begin{aligned} \text{例 10 计算} &\left(-\frac{2}{9}\right) + (-18) + (+128.3) + (+15) + \\ &(-128.3) + \left(-1\frac{7}{9}\right) + \left(+5\frac{4}{7}\right). \end{aligned}$$

思路一 把互为相反的数先相加.

解法 1 略.

思路二 把分母相同及容易通分的分数先相加.

解法 2 略.

思路三 把加数分成两类(正的、负的),先分别相加.

解法 3 略.

思路四 综合考虑上述几种思路.

解法 4

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left[\left(-\frac{2}{9}\right) + \left(-1\frac{7}{9}\right)\right] + [(-18) + (+15)] + \\ &\quad [(+128.3) + (-128.3)] + \left(+5\frac{4}{7}\right) \\ &= (-2) + (-3) + 0 + \left(+5\frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

例 11 证明:如果两个分数的和等于 1,则第一个分数的

平方加上第二个分数等于第二个分数的平方加上第一个分数.

分析 原题用式子表示就是, 设两个分数为 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$, 且 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, 则 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b}$.

证法 1 设两个分数为 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$, 且 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, 则

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{c}{d} &= \left(1 - \frac{c}{d}\right)^2 + \frac{c}{d} \\&= \left(\frac{c}{d}\right)^2 - \frac{2c}{d} + 1 + \frac{c}{d} \\&= \left(\frac{c}{d}\right)^2 + 1 - \frac{c}{d} \\&= \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

证法 2 由 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, 得 $\frac{a}{b} = 1 - \frac{c}{d}$.

$$\text{则 } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 - \frac{2c}{d} + \left(\frac{c}{d}\right)^2 = \frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \left(\frac{c}{d}\right)^2.$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b}.$$

证法 3 $\because \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 1 \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{d}\right)^2,$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{a}{b}.$$

二、整 式

例 1

计算 $3x^2y + \{xy - [3x^2y - (4xy^2 + \frac{1}{2}xy)] - 4x^2z\}$.

解法 1

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 3x^2y + \{xy - [3x^2y - 4xy^2 - \frac{1}{2}xy] - 4x^2z\} \\ &= 3x^2y + \{xy - 3x^2y + 4xy^2 + \frac{1}{2}xy - 4x^2z\} \\ &= 3x^2y + \frac{3}{2}xy - 3x^2y + 4xy^2 - 4x^2z \\ &= \frac{3}{2}xy + 4xy^2 - 4x^2z.\end{aligned}$$

解法 2

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 3x^2y + xy - [3x^2y - (4xy^2 + \frac{1}{2}xy)] - 4x^2z \\ &= 3x^2y + xy - 3x^2y + (4xy^2 + \frac{1}{2}xy) - 4x^2z \\ &= xy + 4xy^2 + \frac{1}{2}xy - 4x^2z \\ &= \frac{3}{2}xy + 4xy^2 - 4x^2z.\end{aligned}$$

解法 3

$$\text{原式} = 3x^2y + xy - 3x^2y + 4xy^2 + \frac{1}{2}xy - 4x^2z$$

$$= \frac{3}{2}xy + 4xy^2 - 4x^2z.$$

说明 这里解法 1 采用的是从里向外,即先去小括号,再去中括号,最后去大括号的顺序进行. 这是通常采用的方法.

解法 2 打破常规,采用的是从外向里逐步去掉括号,同样获得了正确的答案.

对于有些问题,从外向里逐层去括号,较为简便. 如计算

$$(1) 5ab - \{5ab + [2a^2b + (a^2b - 3ab)] - 2a^2b\};$$

$$(2) x - \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3} (x - 9) \right] - \frac{1}{6} (x - 9).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \text{ 原式} &= 5ab - 5ab - [2a^2b + (a^2b - 3ab)] + 2a^2b \\ &= -2a^2b - (a^2b - 3ab) + 2a^2b \\ &= -a^2b + 3ab. \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 原式} = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}(x - 9) - \frac{1}{6}(x - 9) = \frac{1}{2}x.$$

解法 3 采用的是一次性去掉所有括号的方法. 这是按“奇变偶不变”,即“抓住某项的所有括号前的‘-’号有奇数个,则该项改变符号;若有偶数个,则该项不变号”的法则进行的. 这种解法的特点是步骤简捷. 不过,这要在括号掌握得很熟练时方可采用.

例 2 计算 $(2a - b)(2a + b)^2$.

$$\begin{aligned} \text{解法 1 原式} &= (2a - b)(4a^2 + 4ab + b^2) \\ &= 8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解法 2 原式} &= (2a - b)(4a^2 + 4ab + b^2) \\ &= (2a - b)[(4a^2 + 2ab + b^2) + 2ab] \\ &= (2a)^3 - b^3 + 2ab(2a - b) \\ &= 8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

$$\text{解法 3 原式} = [(2a - b)(2a + b)](2a + b)$$

$$=(4a^2-b^2)(2a+b)$$

$$=8a^3+4a^2b-2ab^2-b^3.$$

说明 三种解法都运用了乘法公式,相比之下,后两种解法较为简捷.可见,运用乘法公式计算时,乘法公式运用的顺序不同可能导致解题过程的繁与简的差异.

例3 计算 $\left[\frac{e+\frac{1}{e}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e-\frac{1}{e}}{2}\right]^2$.

解法1 原式 $= \frac{\left(e+\frac{1}{e}\right)^2}{2^2} - \frac{\left(e-\frac{1}{e}\right)^2}{2^2}$
 $= \frac{e^2+2+\frac{1}{e^2}}{4} - \frac{e^2-2+\frac{1}{e^2}}{4}$
 $= \frac{4}{4} = 1.$

解法2 原式 $= \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2e}\right)^2 - \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e}\right)^2$
 $= 4 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2e} = 1.$

解法3

原式 $= \left[\frac{e+\frac{1}{e}}{2} + \frac{e-\frac{1}{e}}{2}\right] \left[\frac{e+\frac{1}{e}}{2} - \frac{e-\frac{1}{e}}{2}\right]$
 $= \frac{2e}{2} \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{e}}{2} = 1.$

说明 解法1直接展开计算.解法2稍作变形后,立即看出展开后相消的项,容易得出结果.解法3利用了平方差公式,计算也很简捷.

例4 已知 $a-b=-1$, 求 $a^3+3ab-b^3$ 的值.

解法 1 由 $a-b=-1$, 得 $a=b-1$.

$$\begin{aligned}\therefore a^3+3ab-b^3 &= (b-1)^3+3(b-1)b-b^3 \\ &= b^3-3b^2+3b-1+3b^2-3b-b^3=-1.\end{aligned}$$

解法 2 $\because a-b=-1$.

$$\begin{aligned}\therefore a^3+3ab-b^3 &= (a^3-b^3)+3ab \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2)+3ab \\ &= -(a^2+ab+b^2)+3ab \\ &= -(a^2-2ab+b^2) \\ &= -(a-b)^2 = -(-1)^2 = -1.\end{aligned}$$

解法 3 $\because a-b=-1$,

$$\begin{aligned}\therefore a^3+3ab-b^3 &= a^3-3ab \cdot (-1)-b^3 \\ &= a^3-3ab(a-b)-b^3 \\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ &= (a-b)^3 = (-1)^3 = -1.\end{aligned}$$

解法 4 $\because a-b=-1$,

$$\therefore (a-b)^3 = -1,$$

即 $a^3+3ab^2-3a^2b-b^3=-1$,

$$a^3-b^3-3ab(a-b)=-1.$$

把 $a-b=-1$ 代入, 得

$$a^3-b^3+3ab=-1.$$

解法 5 $a^3+3ab-b^3$

$$\begin{aligned}&= a^3+3ab^2-3a^2b-b^3-3ab^2+3a^2b+3ab \\ &= (a-b)^3-3ab(b-a)+3ab.\end{aligned}$$

$$\because a-b=-1,$$

$$\therefore a^3+3ab-b^3 = -1-3ab+3ab = -1.$$

说明 解法 1 实际上是采用了代入消元法;后面几个解法的共同思路,是使原式出现 $a-b$ 的因式,以便代入化简求值.

例 5 设 $a+b=1$, 求证 $a^3+b^3+3ab=1$.

证法 1 由已知得 $b=1-a$, 代入得

$$\begin{aligned}a^3+3ab+b^3 &= a^3+3a(1-a)+(1-a)^3 \\&= a^3+3a-3a^2+1-3a+3a^2-a^3 \\&= 1.\end{aligned}$$

证法 2 由已知得 $a=1-b$, 代入原式.

以下略.

证法 3 $a^3+3ab+b^3=(a^3+b^3)+3ab$

$$\begin{aligned}&= (a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab \\&= a^2-ab+b^2+3ab \\&= (a+b)^2=1.\end{aligned}$$

证法 4 $a^3+3ab+b^3$

$$\begin{aligned}&= a^3+3ab(a+b)+b^3 \\&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\&= (a+b)^3=1.\end{aligned}$$

证法 5 $a^3+3ab+b^3$

$$\begin{aligned}&= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-3a^2b-3ab^2+3ab \\&= (a+b)^3-3ab(a+b-1) \\&= 1-3ab(1-1)=1.\end{aligned}$$

证法 6 $\because (a^3+3ab+b^3)-1$

$$\begin{aligned}&= (a^3+3ab+b^3)-(a+b)^3 \\&= a^3+3ab+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3 \\&= -3ab(a+b-1)\end{aligned}$$