数学建模与MATLAB应用

Mathematical Model and MATLAB

主编　夏爱生　刘俊峰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学建模与MATLAB应用

Mathematical Model and MATLAB

主编　夏爱生　刘俊峰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

数学建模与MATLAB应用 / 夏爱生，刘俊峰主编．—北京：北京理工大学出版社，2016.10

ISBN 978-7-5682-3180-0

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①夏…②刘…　Ⅲ.①Matlab软件-应用-数学模型-高等学校-教材　Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第240976号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010) 68914775（总编室）
　　　　　(010) 82562903（教材售后服务热线）
　　　　　(010) 68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 15.5
字　　数 / 358千字
版　　次 / 2016年10月第1版　2016年10月第1次印刷
定　　价 / 38.00元

责任编辑 / 陈莉华
文案编辑 / 陈莉华
责任校对 / 王素新
责任印制 / 王美丽

编审人员

主　编　夏爱生　刘俊峰

主　审　陈博文

编　写　鞠　涛　夏军剑　张新巍　李亚玲

前 言

PREFACE

本教材根据学院实战化教学改革需求而编写，适应于本科工程类专业的教学，也可作为研究生的业务学习教材。

教材主要包含两部分。第一部分介绍了数学模型的基础理论、理论应用，对于案例用 MATLAB 软件进行了求解。第二部分主要包含 MATLAB 入门教程、MATLAB 数据绘图、函数插值等算法。教材旨在培养学员应用数学知识解决实际问题的能力，同时使学员了解 MATLAB 软件，并培养学员用 MATLAB 程序计算数学模型的能力，努力贯彻实战化教学改革，加强对数学建模基础理论、方法和应用实例的介绍，突出其应用性。本书结构严谨，逻辑清晰，文字表述详尽通畅，易教易学，内容的编排也有利于教学的组织和安排，通过把数学建模与数学软件的应用有机结合起来用数学知识解决实际问题是本书的一大特色，有利于培养学员数学建模的能力。

该教材由数学教研室建模组编写。在编写过程中参考了军内外同类教材，对数学建模和 MATLAB 应用的成果进行了归纳提炼，并得到了有关专家教授和领导的大力帮助，在此表示衷心感谢！教材中的错误和不当之处，还请读者批评指正。

编　者

2016 年 1 月

目 录
CONTENTS

上篇 数学模型

下篇　MATLAB 介绍

附　　录

上篇　数学模型

第一章　数学模型概论

世界上一切事物都是按照一定的客观规律运动、变化着，事物之间也彼此联系和制约着，无论是从浩瀚的宇宙到渺小的粒子，还是从自然科学到社会科学都是这样的．事物的变化规律和事物之间的联系，必然蕴含着一定的数量关系，所以数学是认识世界和改造世界的必不可少的重要工具，特别是在科学技术飞速发展的今天，这一点就显得更为重要．本书的主题是数学模型，其核心是用数学揭示事物发展变化的规律，并运用 MATLAB 软件求解数学模型．本章简要介绍数学建模竞赛，并通过案例介绍什么是数学模型，它有什么作用，如何建立数学模型以及数学建模的主要步骤．

第一节　数学模型与数学建模

一、数学应用的广泛性

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学．数学是理解世界的方法，是万物的度量．数学是高度抽象的、非常严密的，数学的结论和方法可以用在许多方面．随着人类社会的进步及科技水平的提高，数学的应用不再限于物理、力学、电磁学等领域．随着电子计算机的发展使得人口、经济、社会等领域都广泛深入地采用了数学的方法和工具，使得以前很多定性的东西也逐步定量化和精确化．数学本身的发展，也提供了解决随机、确定、离散等问题的途径，使得数学在各个学科中的应用显得越来越重要．

许多学科的基本理论都是用数学式表示的．如反映物体机械运动基本规律的牛顿三定律，就是用明确而紧凑的数学公式表示的，反映电路理论基本规律的基尔霍夫定律也可用数学式表示，光沿着通过时间最少路径前进，这一光学原理也可以用变分法来表示．

一个学科的内容能用数学来分析和表示，这是该学科精密化和科学化的一种表现．利用数学这一工具可以深刻地认识客观现象的本质，预测未来，促进科学的发展．有许多物理概念用语言叙述是很难说清楚的，但可以用数学表达式清晰而准确地展现它们．例如，变速运动的瞬时速度、变力沿曲线所做的功，在没有引入微积分以前很难描述，有了微积分以后就可以用导数和积分非常容易地描述并解决这些问题．

在生产过程中，为了分析和改进生产中出现的问题，虽然可采用比较简单的直接实验方法，但在很多情况下这种方法是行不通的，而只能通过模拟计算的方法进行．如某设备正式投产后，往往不允许破坏正常生产过程进行实验，特别是实验中需施加任意输入或改变生产条件时，搞不好会发生故障甚至出现危险．另外，直接实验往往需要花费较多的人力、财力和时间，从经济角度来看也是不合算的．所以在很多情况下，人们一般先进行一些数学处

理，然后在计算机上进行模拟计算来代替实验.

总而言之，当前科学技术的发展要求我们更好地应用数学这一工具为各方面服务，用数学方法来反映、描述或模拟各种各样的现象，揭示其内在规律，这就是下面要介绍的数学模型.

二、原型和模型

原型（Prototype）和模型（Model）是一对对偶体. 原型是指人们在现实世界里关心、研究或从事生产、管理的实际对象. 在科技领域通常使用系统（System)、过程（Process）等词汇，如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统等，又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等. 本书所述的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型. 模型则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物.

这里特别强调构造模型的目的性. 模型不是原型原封不动的复制品，原型有各个方面和各种层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次. 一个原型，为了不同的目的可以有许多不同的模型. 如放在展览厅里飞机模型应该在外形上逼真，但不一定会飞. 而参加航模竞赛的模型飞机要有良好的飞行性能，在外观上不必苛求. 至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模拟，则只要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性，毫不涉及飞机的实体. 所以模型的基本特征是由构造模型的目的决定的.

我们已经看到模型有各种形式. 按模型替代原型的方式来分类，模型可分为物质模型（形象模型）和理想模型（抽象模型）. 前者包括直观模型、物理模型等，后者包括思维模型、符号模型、数学模型等.

直观模型　指那些供展览用的实物模型，以及玩具、照片等，通常是把原型的尺寸按比例缩小或放大，只追求外观上的逼真.

物理模型　只是指科技工作者为一定目的根据相似原理构造的模型，它不仅可以显示原型的外形或某些特征，而且可以用来进行模拟实验，间接地研究原型的某些规律. 如波浪水箱中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能，风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的空气动力学特性. 有些现象直接用原型研究非常困难，更可借助于这类模型，如地震模拟装置、核爆炸反应模拟设备等. 应注意验证原型与模型之间的相似关系，以确认模拟实验结果的可靠性. 物理模型常可得到实用上很有价值的结果，但也存在成本高、时间长、不灵活等缺点.

思维模型　指通过人们对原型的反复认识，将获取的知识以经验的形式直接储存于人脑中，从而可根据思维或直觉作出相应的决策. 如汽车司机对方向盘的操纵、一些技艺较强的工种（如钳工）的操作，大体上是靠这类模型进行的. 通常说的某些领导者凭经验作决策也是如此. 思维模型便于接受，也可以在一定的条件下获得满意的结果，但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点，难以对它的假设条件进行检验，并且不便于人们相互沟通.

符号模型　是在一些约定或假设下借助于专门的符号、线条等，按一定形式组合起来描述原型. 如地图、电路图、化学结构等，具有简明、方便、目的性强及非量化等特点.

本书要专门讨论的数学模型则是由数字、字母或其他数学符号组成的，描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法．

三、什么是数学模型

其实你早在学习初等代数的时候就已经碰到过数学模型了．当然其中许多问题是老师为了教会学生知识而人为设置的．譬如你一定解过这样的“航行问题”：

甲乙两地相距 750 km，船从甲到乙顺水航行需 30 h，从乙到甲逆水航行需 50 h，问船速、水速各是多少？

用 x，y 分别代表船速、水速，可以列出方程

$$(x+y)\cdot 30=750，(x-y)\cdot 50=750$$

实际上，这组方程就是上述航行问题的数学模型．列出方程，原问题已转化为纯粹的数学问题．方程的解 $x=20$ km/h，$y=5$ km/h，最终给出了航行问题的答案．

当然，实际问题的数学模型通常要复杂得多，但是建立数学模型的基本内容已经包含在解这个代数应用题的过程中了．那就是：根据建立数学模型的目的和问题的背景做出必要的简化假设（航行中设船速和水速为常数）；用字母表示待求的未知量（x，y 代表船速和水速）；利用相应的物理或其他规律（匀速运动的距离等于速度乘以时间），列出数学式子（二元一次方程）；求出数学上的解答（$x=20$，$y=5$）；用这个答案解释原问题（船速和水速分别为 20 km/h 和 5 km/h）；最后还要用实际现象来验证上述结果．

一般地说，数学模型可以描述为：对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构．而建立数学模型的全过程称为数学建模，它包括模型的建立、求解、分析和检验的全过程．从实际问题到数学模型，由从数学模型的求解结果回到现实对象，数学建模的全过程可以表示为图 1－1.

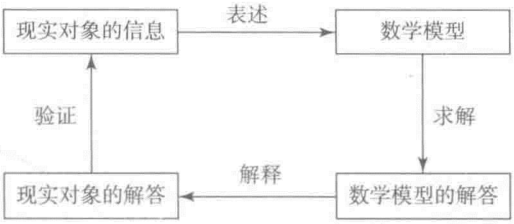

图 1－1　数学建模的全过程

第二节　数学建模的步骤与论文写作

一个理想的数学模型必须能反应系统的全部重要特性，同时在数学上又易于处理，即它满足模型的可靠性和适用性．可靠性指的是在允许的误差范围内，它能反映出该系统的有关特性的内在联系；适用性指的是它必须易于数学处理和计算．

一个实际问题往往是很复杂的，影响它的因素总是很多．如果想把它的全部影响因素都反映到数学模型中来，这样的数学模型是很难的，甚至是不可能建立的，即使能建立也是不

可取的，因为这样的数学模型非常复杂，很难进行数学推演和计算；反过来，若仅考虑易于数学处理这一要求，当然数学模型越简单越好，这样做又难于反映系统的有关主要特性．实际上所建立的数学模型往往是这两种相互矛盾要求的折中处理．

一、建立数学模型的主要步骤

建立一个系统的数学模型的方法大致有两种：一是实验归纳的方法，即根据测试或计算数据，按照一定的数学方法，归纳出系统的数学模型；二是理论分析的方法，即根据客观事物本身的性质，分析因果关系，在适当的假设下用数学工具去描述其数量特征．本书主要讨论用理论分析的方法建立数学模型的问题．

建立数学模型的主要步骤有五步：

(1) 了解问题，明确目的．在建模前要对实际问题的背景有深刻的了解，进行全面的、深入细致的观察，明确所要解决的问题的目的和要求．并按要求收集必要的数据，数据必须符合所要求的精度．这是建模的准备过程．

(2) 对问题进行简化和假设．一般地，一个问题是复杂的，涉及的方面较多，不可能考虑到所有的因素，这就要求我们在明确目的、掌握资料的基础上抓住主要矛盾，舍去一些次要因素，对问题进行适当地简化，提出几条合理的假设．不同的简化和假设，有可能得出不同的模型和结果，究竟简化、假设到什么程度，要根据经验和实际问题去处理．

(3) 建立模型．在所作简化和假设的基础上，选择适当的数学工具来刻画、描述各种量之间的关系，用表格、图形、公式等来确定数学结构．我们要用数学模型解决实际问题，故可以用各种各样的数学理论和方法，必要时还要创造新的数学理论以适应实际问题．在保证精度的前提下应该尽量用简单的数学方法，以便推广使用．

(4) 对模型进行分析、检验和修改．建立模型的目的是为了解释自然现象、寻找规律，以便指导人们认识世界和改造世界，建模并不是目的．所以模型建立后要对模型进行分析，即用解方程、推理、图解、计算机模拟、定理证明、稳定讨论等数学的运算和证明得到数量结果，将此结果与实际问题进行比较，以验证模型的合理性．必要时进行修改，调整参数，或者改换数学方法．一般地，一个模型要经过反复修改才能成功．

(5) 模型的应用．用已建立的模型分析、解释已有的现象，并预测未来的发展趋势，以便给人们的决策提供参考．

归纳起来，建立模型的主要步骤可以用图 1－2 的框图来说明．

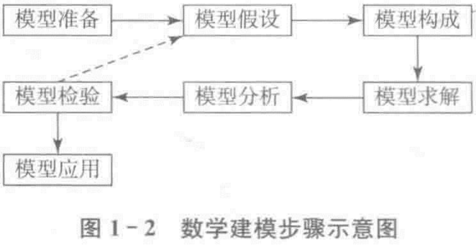

图 1－2　数学建模步骤示意图

二、数学模型论文的写作

数学模型课程不是以介绍系统严密的数学知识为主要目的，而是通过分析和解决问题的过程让学员学习和体会用数学和计算机解决问题的思想方法，培养学员应用数学的意识．数学建模课程的一个显著特点就是：任何实际问题的解答都不一定唯一．在不同的理解和假设下可以建立不同的模型，得到不同的结果．但是，不同的假设都应该有一定的合理性，不同的模型都应该在不同的侧面反映实际问题的特征，不同的结果都应该在不同程度上反映客观事物的变化规律．任何一个实际问题的建模和解决过程都比解答一道数学题的工作量要大，复杂性要高，这就需要一个完整的报告来描述问题的分析解决过程，使得别人对我们假设的合理性、模型的有效性和结果的可用性理解、赞同和欣赏，从而使得我们的模型能得到认可和广泛的应用．

数学建模问题的论文是解决问题过程的描述和概括，其目的是让读者理解所研究的问题，接受所提出的假设，赞同所选用的模型，欣赏所采用的分析过程，信服所给出的结果．数学建模论文一般包括：标题、摘要、关键词、正文、参考文献、附录几部分．

标题是论文涉及范围和水平的第一个重要信息，标题应该简短精练、高度概括，既要准确地表达论文的内容，又要恰当反映所研究问题的范围和深度．

摘要是论文内容的概括陈述，其作用是读者不阅读全文即能获得必要的信息．摘要一般包括以下几个方面：从事这一问题研究的目的和重要性；论文的主要内容和完成哪些工作；论文中获得的基本结论和研究成果；论文中的创新点和结果的意义．

关键词是用来描述论文主题和给出文献资料检索的词汇，它为论文信息检索的网络化提供基础．关键词位于摘要之后，一般论文选用 3 到 5 个关键词．

正文占据论文的最大篇幅，作者的分析和创造性都体现在这一部分．正文要求内容充实、论据充分、主题明确．对于建模论文，一般是按照建模的阶段展开正文的内容，包括问题的分析、模型假设、建立模型、模型分析与求解、模型的检验和修改、模型的推广、模型的优缺点等.

参考文献是对正文中提及或引用资料的详细信息，它来源于一些公开的出版物．参考文献中应该指明所引用资料来源的详细信息，比如作者、标题、刊物名称、卷次、页码及出版日期等．参考文献的格式应该符合建模竞赛格式规范中给出的标准．参考文献反映出论文具有的科学依据，也表明对别人工作的尊重，同时也便于检索和查询．

附录是正文的补充，与正文有关但不便于编入正文的资料可以收集到附录中，为有兴趣的读者提供更详细的资料，附录中可以放入一些相关的图表或者一些计算机程序．

数学建模论文就是让别人清晰地理解自己的思想和所得的结果．数学建模的问题一般没有标准答案，没有固定的模式，自己的思路、方法、结果、特点及工作量的大小只有通过论文来展示．别人无法进入作者的大脑中去理解其思路，一篇清晰完整的论文对展示自己的工作业绩是至关重要的．

第三节 建模示例之一 椅子能在不平的地面上放稳吗

本节和第四节将给出两个数学建模的例子，重点说明如何做出合理的、简化的假设，用

数学语言确切地表达实际问题，以及模型的结果怎样解释实际现象.

本节讨论的问题来源于日常生活中一件普通的事实：把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳，然而只需稍微挪动几次，就可以使四只脚同时着地，放稳了.这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言给以表述，并用数学工具来证实吗？让我们试试看.

一、模型假设

对于椅子和地面应该做一些必要的假设：

假设1：椅子四条腿一样长，椅脚与地面接触处可以视为一个点，四脚的连线呈正方形.

假设2：地面高度是连续变化的.沿任何方向都不会出现间断（没有像台阶那样的情况），即地面可以视为数学上的连续曲面.

假设3：对于椅脚的间距和椅腿的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.

假设1显然是合理的.假设2相当于给出了椅子能放稳的条件，因为如果地面高度不连续，譬如在有台阶的地方是无法使四只脚同时着地的.至于假设3是要排除这样的情况：地面上与椅脚间距和椅腿的长度的尺寸大小相当的范围内，出现深沟或凸峰（即使是连续变化的），致使三只脚无法同时着地.

二、模型构成

中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来.首先要用变量表示椅子的位置，注意到椅脚连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置.在图1-3中椅脚连线为正方形$ABCD$，对角线AC与x轴重合，椅子绕中心点O旋转角度θ后，正方形$ABCD$转至$A'B'C'D'$的位置，所以对角线AC与x轴的夹角θ表示了椅子的位置.

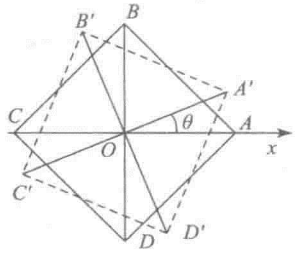

图1-3　变量θ表示椅子的位置

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来.如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离，那么当这个距离为零时就是椅脚着地了.椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离就是椅子位置变量θ的函数.

椅子有四只脚，因而有四个距离，但是由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了.记A，C两脚与地面距离之和为$f(\theta)$，B，D两脚与地面距离之和为$g(\theta)$（$f(\theta)$，$g(\theta)\geqslant 0$）.由假设2，$f(\theta)$和$g(\theta)$都是连续函数.由假设3，椅子在任何位置至少有三只