21世纪高职高专规划教材

高等应用数学

（工科、经管类）

下册

主　编　杨　勇　黄庆波
副主编　吴白旺　陈华峰　海敏娟　李　勇　张祖科
主　审　唐艺川

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21 世纪高职高专规划教材

高等应用数学（下册）

（工科、经管类）

主　编　杨　勇　黄庆波

副主编　吴白旺　陈华峰　海敏娟　李　勇　张祖科

主　审　唐艺川

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

《高等应用数学》（工科、经管类）是教育部高职高专21世纪规划教材。

本书是认真总结、分析、吸收全国高职高专院校高等数学课程教学改革的经验，从高职高专教育人才培养目标出发，根据教育部高等职业教育教学课程的基本要求与课程改革精神，适当降低难度，注重贯彻循序渐进的教学原则的基础上编写完成的。

本书分上、下两册，上册内容包括：函数、极限与连续、一元函数微分学、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、二元函数的微分和积分及附录和部分习题解答。下册内容包括：微分方程、无穷级数、离散数学初步、线性代数初步、概率统计初步、拉普拉斯变换及附录和部分习题解答。

本书内容充实、体系新颖。特别是每个章节内容中各含一节“数学实验”部分，增加了Mathematica 数学软件操作内容，强调理论与实际相结合，书中选取的基础实验十分有利于高职、高专类学生对基础知识的学习与理解，以培养他们借助现代技术手段解决经典数学中的问题和处理实际问题的能力。

本书可作为高等专科院校、高等职业技术院校、成教、网教各专业的数学教材，也可作为工程技术人员参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学 ：工科、经管类. 下册 / 杨勇，黄庆波主编. -- 北京 ：中国水利水电出版社，2011.8

21世纪高职高专规划教材

ISBN 978-7-5084-8730-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①杨… ②黄… Ⅲ. ①应用数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第119910号

策划编辑：寇文杰　　责任编辑：杨　谷　　封面设计：李　佳

书　名	21世纪高职高专规划教材 高等应用数学（工科、经管类）（下册）
作　者	主　编　杨　勇　黄庆波 副主编　吴白旺　陈华峰　海敏娟　李　勇　张祖科 主　审　唐艺川
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京泽宇印刷有限公司
规　格	184mm×240mm　16开本　总29.25印张　总730千字
版　次	2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷
印　数	0001—3000册
总定价	55.00元（上册、下册）

序

新世纪的中国正处于新型工业化时期，对人才的需求呈多元化、多层次的态势，这为高职、高专学校的人才培养带来了新的契机。经济与社会的发展要求高职、高专毕业生具有基础理论知识适度、技术应用能力强、知识面较宽、素质较高等特点，因此，在培养优秀理论型、研究型人才的同时，对应用型技术人才的培养就成为高职高专教育的首要目标。瞄准这个目标办好高职、高专，既能满足人才市场的需要，又能促进高职、高专学校自身的蓬勃发展。

高等数学是高职高专的一门主要的基础课程，出版一本适合高职高专教学需要的高等数学教材，无疑是一件有着重大意义的事情。值得庆幸的是，《高等应用数学》（工科、经管类）教材具有以下几点明显的优势和特色：

1. 科学性

这本教材的整个体系保持了传统高等数学的严谨，涵盖到所有必需的知识点。内容安排上由浅入深，符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑性强，通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握。

2. 先进性

这本教材在遵循教育部《高职高专教育基础课程基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》精神的前提下，充分考虑了内容的更新，选入了一些新颖的、能反映相应学科新思想、新趋势的材料，增加了“数学实验”和“数学家简介”等部分。特别是“数学实验”部分，不仅充实了教材内容，而且有助于提高学生的学习兴趣，培养学生运用数学软件处理实际问题的能力。

3. 实用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具。这本教材在概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、教材的安排，以及例题、习题的选配等方面，都注重从教学的实际要求出发，遵循教学活动自身的规律性，从而有利于师生的教与学。

总之，这本教材编出了新意和特色。相信这本教材在数学教学和教学改革中一定能发挥巨大的作用，同时也希望它在大家的关爱中不断地得到完善。

前　言

高职高专教育的根本任务是培养生产、建设和管理第一线的技术应用型人才。为了发挥高等数学在21世纪培养技术应用型人才的作用，培养和提高学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力，根据教育部高等职业教育教学课程的基本要求与课程改革精神编写此教材。本书是由重庆科创职业学院数学教研室，根据教育部制定的《高职高专数学教学的基本要求》，总结、分析、吸收一些高职高专院校高等数学教学改革的经验，遵循“必需，够用”的原则编写而成的。在编写中，我们针对高职院校课时少，学生的基础差等问题，适当的降低了难度，调整了例题、习题的配置，以保证学生对基本知识点的训练和掌握。

本书的特色在于：①保持传统高等数学的知识点；②增加Mathematica软件操作内容；③每个章节内容中各含一节数学实验；④采用模块化设计，补充了离散数学、线性代数和概率统计初步及拉普拉斯变换，以便于高职、高专院校中不同的专业（如经济管理、电子、计算机、工程类）选用；⑤提高学生对数学源流的认识，每章后附有数学家简介；⑥每章开头给出本章学习目标，有利于学生明确本章学习知识点的方向，同时每章后给出了本章重点知识的小结，有利于学生对本章的学习进行系统的复习。

编写《高等应用数学》（工科、经管类）的具体分工如下：全书由重庆科创职业学院数理教研室主任杨勇、黄庆波老师主持编写并统稿，唐艺川副教授负责全书的审稿工作。参与编写的还有徐健清、任超、吴杰老师。

在编写本书的过程中，我们得到了重庆科创职业学院院领导、机电分院领导以及教研室同行的大力支持。在此，编者对他们表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，敬请各位专家、同行及广大读者批评指正。

杨　勇

2011年4月

目　录

上册

下册

第 7 章　常微分方程

高等数学研究的对象是函数，而函数关系一般是不能直接由实际问题得到的．但根据实际问题的特性，有时可以得到表示未知函数及其导数或微分与自变量之间关系的式子，这种关系式揭示了实际问题的客观规律性，它是描述这种客观规律性的一种重要的数学模型——微分方程．

本章学习目标

- 了解微分方程的定义（阶、解、通解、初始条件、特解）．
- 掌握可分离变量方程的解法、齐次型方程的解法．
- 熟练掌握一阶线性微分方程的解法．
- 了解二阶线性微分方程的解的结构．
- 掌握二阶线性常系数齐次、非齐次微分方程的解法．

§ 7.1　基本概念

利用数学手段研究自然现象和社会现象，或解决工程技术问题，一般先要建立数学模型，再对数学模型进行简化和求解，最后结合实际问题对结果进行分析和讨论．数学模型最常见的表达方式是包含自变量和未知函数的方程，在很多情况下未知函数的导数（或微分）也会在方程中出现，于是便自然地称这类方程为微分方程．

定义 7.1.1　含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程．只含一个自变量的方程称为常微分方程，自变量多于一个的称为偏微分方程．微分方程中实际出现的导数的最高阶数称为微分方程的阶．

于是 n 阶常微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{7.1.1}$$

本章只介绍常微分方程，并简称为微分方程或方程．

定义 7.1.2　如果方程的左边函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 $y',\dots,y^{(n)}$ 的全体而言是一次的，则称它为线性微分方程，否则称它为非线性微分方程．

n 阶线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

其中 $a_i(x)$（$i=1,\ 2,\cdots,n$）和 $f(x)$ 都是 x 的已知函数．

例 7.1.1　下面的方程都是常微分方程．

$$(y')^2 = 3x^2 + 2 \tag{7.1.2}$$

$$y' = 1 + y^2 \tag{7.1.3}$$

$$y''+\omega^2 y=0 \quad （\omega>0\text{是常数}） \tag{7.1.4}$$

它们的阶数分别为1、1、2．方程（7.1.4）是线性的，而方程（7.1.2）和（7.1.3）是非线性的．

定义 7.1.3 凡代入微分方程能使方程成立的函数，均称为该方程的解．

例 7.1.2 函数 $y=\tan x$ 是方程（7.1.3）在区间 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的一个解，而 $y=\tan(x-c)$ 是方程（7.1.3）在区间 $(c-\frac{\pi}{2},c+\frac{\pi}{2})$ 上的解，其中 c 为任意常数；函数 $y=3\cos\omega x$、$y=4\sin\omega x$ 都是方程（7.1.4）在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解，而且对任意常数 c_1 和 c_2，$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ 也是方程（7.1.4）在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解．

从上面的讨论可知，微分方程的解可以包含一个或几个任意常数（与方程的阶数有关），而有的解不含任意常数．为了加以区别，我们给出如下定义：

定义 7.1.4 方程（7.1.1）中含有 n 个相互独立的任意常数 $c_1, c_2,\cdots, c_n$ 的解 $y=\varphi(x,c_1, c_2,\cdots, c_n)$ 称为它的通解．不含任意常数的解称为它的特解．使这些任意常数取定值的条件，称为微分方程的初始条件，我们把求满足初始条件的微分方程特解的问题称为解的初值问题．

例 7.1.3 验证函数 $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ 是方程 $y''+\omega^2 y=0$（$\omega>0$ 是常数）（7.1.4）的通解，其中 c_1、c_2 为任意常数．

解 $y'=-c_1\omega\sin\omega x+c_2\omega\cos\omega x$，$y''=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x$，

将 y、y'' 的表达式代入方程（7.1.4）有

$$y''+\omega^2 y=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x+\omega^2(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x)\equiv 0，\quad x\in(-\infty,+\infty)，$$

所以对任意常数 c_1、c_2，$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ 都是方程（7.1.4）的解，又由于

$$\frac{\cos\omega x}{\sin\omega x}\neq\text{常数} \quad （x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}）$$

即 c_1、c_2 是两个独立的任意常数，因此 $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ 是方程（7.1.4）的通解．

类似验证 $y=A\sin(\omega x+B)$（A、B 为任意常数）也是方程（7.1.4）的通解．而 $y=3\cos\omega x$ 和 $y=4\sin\omega x$ 是方程（7.1.4）的两个特解．

例 7.1.4 解微分方程 $y''=x$，其中 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$．

解 对方程两边积分，得 $y'=\frac{1}{2}x^2+c_1$，再积分，得 $y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c_2$

由 $y'|_{x=0}=0$ 得 $c_1=0$，由 $y|_{x=0}=1$ 得 $c_2=1$，因此，所求方程的特解为 $y=\frac{1}{6}x^3+1$．

习题 7.1

1．方程 $(y')^3+2(y')^2y+2y'=0$ 的阶数是（　　）．

A．1　　　B．2

C．3　　　D．4

2．方程 $xyy''+x(y')^3-y^4y'=0$ 的阶数是（　　）．

A．3　　　B．4　　　C．2　　　D．5

3．指出方程 $y'=\frac{1}{2}x^2+c_1$ 的阶数．

4．验证 $y=cx+\frac{1}{c}$ 是方程的通解．

§7.2 一阶微分方程的解法

本节讲述一阶微分方程的初等解法，即把微分方程的求解问题化为积分问题．微分方程的求解方法很多，我们这里仅就一阶微分方程介绍一些初等的解法．

一、可分离变量方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{7.2.1}$$

的方程称为可分离变量方程，其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 都是连续函数．

当 $g(y)\neq 0$ 时，把（7.2.1）改写为 $\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x$（称为变量分离），

两边积分，得通解（隐式通解）

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C. \tag{7.2.2}$$

这里我们把积分常数 C 确写出来，而把 $\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$、$\int f(x)\mathrm{d}x$ 分别理解为 $\frac{1}{g(y)}$ 和 $f(x)$ 的一个确定的原函数．

例 7.2.1　求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2xy=0$（7.2.3）的通解．

解　分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x$，两边积分得 $\ln|y|=x^2+C_1$

即 $|y|=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}$．令 $c=\pm\mathrm{e}^{C_1}$，则 $y=c\mathrm{e}^{x^2}\ (c\neq 0)$．

此外 $y=0$ 是方程的常数解．若允许 $c=0$，则此解也含于上式中．所以方程（7.2.3）的通解为 $y=c\mathrm{e}^{x^2}$，其中 c 为任意常数．

例 7.2.2　求初值问题 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=0$，$y(0)=1$ 的解．

解　求通解，方程可以变形为　$y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x$

分离变量得　$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$

两边积分得通解为　$\frac{y^2}{2}=-x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+C$

代入初始条件，即 $x=0,y=1$，得 $C=-\frac{1}{2}$

所以解为 $y^2=2\mathrm{e}^x(1-x)-1$．

二、可化为变量分离方程的特殊类型

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.2.4}$$

的方程称为齐次方程，其中 φ 是连续函数.

其解法是通过变量代换，可将（7.2.4）化为变量分离方程，然后按变量分离方程求解.

令 $\frac{y}{x}=u$ 或 $y=ux$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(ux)'=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入（7.2.4）得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u) \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\varphi(u)-u}{x}$$

这是一个变量分离方程.

例 7.2.3 解方程 $y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

解 令 $\frac{y}{x}=u$ 或 $y=xu$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入方程得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u+\sqrt{1+u^2}\text{，即 } x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+u^2}$$

分离变量并积分，有 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})+\ln c_1=\ln|x|$ $(c_1>0)$.

从而推出 $x=c(u+\sqrt{1+u^2})$ $(c=\pm c_1\neq 0)$

将 $\frac{y}{x}=u$ 代回原变量得 $y=\frac{x^2}{2c}-\frac{c}{2}$，其中 $c\neq 0$ 为任意常数.

三、一阶线性微分方程

在一阶线性方程中，如果未知函数及其导数都是一次的，那么这类方程叫做一阶线性方程. 一阶线性方程的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{7.2.5}$$

其中 P、Q 为连续函数. 当 $Q(x)\equiv 0$ 时，（7.2.5）成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{7.2.6}$$

称它为一阶线性齐次微分方程.

相应地，当 $Q(x)\neq 0$ 时，（7.2.5）称为一阶线性非齐次微分方程.

对于方程（7.2.6），它是可分离变量的微分方程，可以求出方程（7.2.6）的通解

$$y=c\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.7}$$

其中 c 为任意常数，注意，$\int P(x)\mathrm{d}x$ 仅表示 $p(x)$ 的一个原函数.

下面我们来求非齐次方程（7.2.5）的通解. 现在对方程（7.2.7）作变换

$$y=c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{7.2.8}$$

代入（7.2.5）化简得 $c'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$

由此两边积分，有 $c(x)=\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c$

将它代回到（7.2.8）即得方程（7.2.5）的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right) \tag{7.2.9}$$

上述求解方法通常称为常数变易法（把（7.2.7）中 c 变易为 x 的函数 $c(x)$ ），公式（7.2.9）也称为方程（7.2.5）的常数变易公式．它是一种重要的数学方法．通常只要知道了线性齐次方程的通解，便可用常数变易法将对应的线性非齐次方程的通解求出来．

例 7.2.4　解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^2$．

解　它是一阶线性非齐次微分方程，且 $p(x)=-\dfrac{2}{x+1}$，$Q(x)=(x+1)^2$

代入公式（7.2.9）得

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\left[\int(x+1)^2\mathrm{e}^{\int\frac{-2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right]\\&=\mathrm{e}^{2\ln(x+1)}\left[\int(x+1)^2\mathrm{e}^{-2\ln(x+1)}\mathrm{d}x+c\right]\\&=(x+1)^2\left(\int\mathrm{d}x+c\right)=(x+1)^2(x+c).\end{aligned}$$

习题 7.2

1．下列函数中，（　　）是微分方程 $\mathrm{d}y-2x\mathrm{d}x=0$ 的解．

A．$y=2x$　　　　B．$y=x^2$

C．$y=-2x$　　　　D．$y=-x^2$

2．微分方程 $2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0$ 的通解是（　　）．

A．$y^2-x=c$　　　　B．$y-\sqrt{x}=c$

C．$y=x+c$　　　　D．$y=-x+c$

3．微分方程 $y'=y$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$ 的特解是（　　）．

A．$y=\mathrm{e}^x+1$　　　　B．$y=2\mathrm{e}^x$

C．$y=2\mathrm{e}^{2x}$　　　　D．$y=\mathrm{e}^{2x}$

4．下列微分方程中为可分离变量方程的是（　　）．

A．$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xt+t$　　　　B．$x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{xt}\sin t$

C．$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xt+t^2$　　　　D．$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+t^2$

5．微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}+\dfrac{\mathrm{d}y}{x}=0$ 满足 $y|_{x=3}=4$ 的特解是（　　）．

A．$x^2+y^2=25$　　　　B．$3x+4y=c$

C．$x^2+y^2=c$　　　　D．$x^2+y^2=7$

6．下面微分方程中为一阶线性的是（　　）．

A．$xy'+y^2=x$　　B．$y'+xy=\sin x$

C．$yy'=x$　　D．$(y')^2+xy=0$

7．微分方程 $y^2\mathrm{d}x-(1-x)\mathrm{d}y=0$ 是（　　）微分方程．

A．一阶线性齐次　　B．一阶线性非齐次

C．可分离变量　　D．二阶线性齐次

8．通过点 $(1,1)$ 处，且斜率处处为 x 的曲线方程是________．

9．微分方程 $y'-2y=0$ 的通解是________．

10．曲线族 $y=cx^2$ 所满足的一阶微分方程是________．

11．齐次方程 $y'=\dfrac{y}{x}+1$ 的通解为________．

12．方程 $xy'+y=3$ 的通解是________．

13．计算下列微分方程的通解（可分离变量部分）

（1）$xy'-y\ln x=0$

（2）$\sin x\mathrm{d}y+\cos y\mathrm{d}x=0$

（3）$y(x^2-1)\mathrm{d}y-(y^2+1)\mathrm{d}x=0$

（4）$y\ln y+xy'=0$

14．求下列微分方程的解（齐次型方程部分）

（1）求下列齐次微分方程的通解：

1）$(x^3-2xy^2)\mathrm{d}y+(2y^3-3yx^2)\mathrm{d}x=0$

2）$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y(\ln y-\ln x)$

（2）求下列齐次微分方程满足初始条件的特解：

1）$y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$，$y|_{x=1}=1$

（2）$y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$，$y|_{x=1}=2$

（3）化方程为齐次微分方程，并求出其通解：

$(x+y)\mathrm{d}x+(3x+3y-4)\mathrm{d}y=0$　　（提示：令 $x+y=u$）

15．求下列微分方程的解（一阶线性微分方程部分）

（1）求下列微分方程的特解：

1）$xy'+2y=x$，$y|_{x=1}=0$

2）$xy'+y-\mathrm{e}^x=0$，$y|_{x=1}=\mathrm{e}$

3）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4x=\mathrm{e}^{3t}$，$x|_{t=0}=0$

（2）求下列微分方程的通解：

1）$(x+1)y'-2y=(x+1)^4$

2）$y'-\dfrac{1}{x+1}y=\mathrm{e}^x(x+1)$

3）$y' = -2xy + x\mathrm{e}^{-x^2}$

（3）求曲线的方程，这条曲线通过原点，并且它在点(x, y)处的切线的斜率等于$2x+y$.

§7.3　二阶常系数微分方程的解法

定义 7.3.1　形如

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = f(x) \tag{7.3.1}$$

的方程称为二阶线性非齐次微分方程．如果$f(x)=0$，即

$$y'' + P(x)y' + Q(x) = 0 \tag{7.3.2}$$

方程称为二阶线性齐次微分方程．

力学中，物体在有阻力的情况下的自由振动微分方程和强迫振动微分方程，以及电学中串联电路的振动方程都是二阶线性微分方程．

一、二阶线性微分方程解的结构

定理 7.3.1（齐次线性方程解的结构）如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程（7.3.2）的两个解，那么

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \tag{7.3.3}$$

也是方程（7.3.2）的解，其中C_1，C_2是任意常数．如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$之比不为常数（即$\dfrac{y_1}{y_2} \neq k$，k为常数），则

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\text{，（}C_1\text{，}C_2\text{ 是任意常数）}$$

是该方程的通解．

证明只需将式（7.3.3）代入方程（7.3.2）验证即可．（不难推广到n阶齐次线性方程．）

定理 7.3.2　（非齐次线性方程解的结构）设$y^*(x)$是二阶非齐次线性方程（7.3.1）的一个特解，$Y(x)$是该方程所对应的齐次线性方程（7.3.2）的通解，则

$$y = Y(x) + y^*(x) \tag{7.3.4}$$

是二阶非齐次线性方程（7.3.1）的一个通解．证明略．

定理 7.3.3　（叠加原理）设二阶非齐次线性方程（7.3.1）的右边是两个函数之和，如

$$y'' + P(x)y + Q(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{7.3.5}$$

而$y_1^*(x)$与　$y_2^*(x)$分别是

$$y'' + P(x)y + Q(x) = f_1(x)$$

与

$$y'' + P(x)y + Q(x) = f_2(x)$$

的特解，则$y_1^*(x) + y_2^*(x)$是方程（7.3.5）的特解．

二、二阶常系数齐次线性微分方程

定义 7.3.2　设p，q为常数，形如

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{7.3.6}$$

的方程称为二阶常系数线性微分方程．如果 $f(x)=0$，方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{7.3.7}$$

称为二阶常系数齐次线性微分方程．如果 $f(x)\neq 0$，方程（7.3.7）称为二阶常系数非齐次线性微分方程．

由齐次线性微分方程解的结构知道，求齐次线性微分方程（7.3.7）的解，只需求出它的两个比值不为常数的解即可．

由指数函数 e^x 的导数特征，联系方程（7.3.7），其应有 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 形式的解，其中 r 为待定常数．将 $y=\mathrm{e}^{rx}, y'=r\mathrm{e}^{rx}, y''=r^2\mathrm{e}^{rx}$ 代入方程（7.3.7），得

$$\mathrm{e}^{rx}(r^2+pr+q)=0$$

因为 $\mathrm{e}^{rx}\neq 0$，所以

$$r^2+pr+q=0 \tag{7.3.8}$$

即当 r 是一元二次方程（7.3.8）的根时，$y=\mathrm{e}^{rx}$ 就是齐次线性微分方程（7.3.7）的解．

因此，方程 $r^2+pr+q=0$ 称为齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程，特征方程的根称为特征根．下面就特征方程（7.3.8）的特征根的不同情形讨论其对应的齐次方程的通解．

1）当特征方程（7.3.8）有两个不同的实根 r_1 和 r_2 时，则方程（7.3.7）有两个线性无关的解 $y_1=\mathrm{e}^{r_1x}, y_2=\mathrm{e}^{r_2x}$．此时方程（7.3.7）有通解

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

2）当特征方程（7.3.8）有两个相同的实根 r 时，即 $r_1=r_2=r$，方程（7.3.7）有一个解 $y_1=\mathrm{e}^{rx}$，这时直接验证可知 $y_2=x\mathrm{e}^{x}$ 是方程（7.3.7）的另一个解，且 y_1 与 y_2 线性无关，所以此时有通解

$$y=C_1\mathrm{e}^{rx}+C_2x\mathrm{e}^{rx}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}.$$

3）当特征方程（7.3.8）有一对共轭复根 $r=\alpha\pm i\beta$（其中 α,β 均为实常数且 $\beta\neq 0$）时，方程（7.3.7）有两个线性无关的解

$$y_1=\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)x} \quad 和 \quad y_2=\mathrm{e}^{(\alpha-i\beta)x}$$

因此方程（7.3.7）的通解为

$$y=A\mathrm{e}^{\alpha x+i\beta x}+B\mathrm{e}^{\alpha x-i\beta x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(A\mathrm{e}^{i\beta x}+B\mathrm{e}^{-i\beta x}).$$

利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，还可以得到实数形式的解

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

其中 $C_1=A+B, C_2=i(A-B)$．一般情况下，如无特别声明，要求写出实数形式的解．

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的步骤如下：

（1）写出微分方程的特征方程 $r^2+pr+q=0$．

（2）求出特征根．

（3）根据特征根的情况按表 7.3.1 写出对应微分方程的通解．

表 7.3.1

特征方程的根	通解形式
两个不等式根 $r_1 \ne r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$
一对共轭复根 $r = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

例 7.3.1　求方程 $y'' - 5y' - 6y = 0$ 的通解.

解　方程 $y'' - 5y' - 6y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 - 5r - 6 = 0$$

其特征根为 $r_1 = 6, r_2 = -1$，且互异，所以方程的通解为

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}.$$

例 7.3.2　求方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的通解.

解　方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

其特征根为 $r = r_1 = r_2 = -1$，二重特征根，所以方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

例 7.3.3　求方程 $y'' + 4y' + 5y = 0$ 的通解.

解　方程 $y'' + 4y' + 5y = 0$ 的特征方程为

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

其特征根为 $r_1 = -2 + i, r_2 = -2 - i$，是共轭复根，所以方程的通解为

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

由定理 7.3.2，要求非齐次线性方程（7.3.6）的通解，先求出其对应的齐次方程（7.3.7）的通解 Y，再求出非齐次方程（7.3.6）的一个特解 y^*，即可以得到非齐次方程的通解 $y = Y + y^*$.

1. $f(x) = P_n(x)e^{\lambda x}$ 的情形

在此情形中，λ 是常数，$P_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，即

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

这时，非齐次方程为

$$y'' + py' + qy = P_n(x)e^{\lambda x}. \tag{7.3.9}$$

由于方程（7.3.9）的右边是一个 n 次多项式与指数函数的乘积，根据其特征，不妨设方程的一个特解为

$$y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}$$

则

$$y^{*\prime} = Q_m{}'(x)e^{\lambda x} + \lambda Q_m(x)e^{\lambda x}$$