



2017

高 教 版

●严格依据 2017 年
管理类联考
考试大纲编写

MBA、MPA、MPAcc、MEM 联考 综合能力考前冲刺

- ▲ 以实用性和技巧性为基点
- ▲ 以强调考试方法和做题技巧为宗旨
- ▲ 以快速提高和立竿见影为核心
- ▲ 在解题中总结套路，在套路中预测考题

主编 陈剑 杨武金 陈君华

高等教育出版社



● 严格依据 2017 年
管理类联考
考试大纲编写

MBA、MPA、MPAcc、MEM 联考 综合能力考前冲刺

- ▲ 以实用性和技巧性为基点
- ▲ 以强调考试方法和做题技巧为宗旨
- ▲ 以快速提高和立竿见影为核心
- ▲ 在解题中总结套路，在套路中预测考题

主编 陈剑 杨武金 陈君华

2017 MBA、MPA、MPAcc、MEM LIANKAO ZONGHE NENGLI KAOQIAN CHONGCI

内容简介

《2017MBA、MPA、MPAcc、MEM 联考综合能力考前冲刺》紧扣考试大纲,强调解题技巧和全真模拟。全书分为数学、逻辑和写作三部分,将考纲知识点归纳成考试预测题型,精心挑选题目,逐题深度剖析,将知识点和解题方法无缝对接,指导考生把握命题脉搏,赢取高分。《2017MBA、MPA、MPAcc、MEM 联考综合能力考前冲刺》以提升实战为宗旨,将历年考试中出现的技巧进行系统总结,汇总了数十种固定的解题思维模式,又灵活演变成数十种做题模板和解题套路,无论基础怎样,都能达到“水到渠成”和“润物细无声”之功效。此外,根据最新考试动态,蕴含无数创新考题,不仅让考生能够找到身临其境的感觉,在有限的时间抓住重点,而且通过全真演练,掌握考试的技巧和方法,考场上就能从容应考,轻取高分。

《2017MBA、MPA、MPAcc、MEM 联考综合能力考前冲刺》以实用性和技巧性为基点,以强调考试方法和做题技巧为宗旨,以快速提高和立竿见影为核心,达到在解题中总结套路,在套路中提高能力,最后形成一套灵活应试的战略战术的目的,从而实现学习效果的加倍提高和考分的快速突破,非常适宜作为管理类专业硕士学位联考复习考前过关冲刺用书。

图书在版编目(CIP)数据

2017MBA、MPA、MPAcc、MEM 联考综合能力考前冲刺 /
陈剑,杨武金,陈君华主编. --北京:高等教育出版社,
2016.8

ISBN 978-7-04-045884-8

I. ①2… II. ①陈… ②杨… ③陈… III. ①研究生
-入学考试-习题集 IV. ①G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 172627 号

策划编辑 李晓翠
责任校对 陈旭颖

责任编辑 张耀明
责任印制 赵义民

封面设计 杨立新

版式设计 马云

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京市白帆印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 14.25
字 数 340 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>

版 次 2016 年 8 月第 1 版
印 次 2016 年 8 月第 1 次印刷
定 价 30.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 45884-00

前言

~~~~~

为了帮助报考管理类专业硕士学位的考生更好地做好考前冲刺,按照最新考试大纲精心编写本书。全书按照考试要求分为数学、逻辑和写作三部分。

本书对各类基本命题类型、考试经常出题点进行系统的分析,以便考生在最短的时间对联考的形貌、内容、特点有充分的认识;精心挑选题目,逐题深度剖析,将知识点和解题方法无缝对接,建立了完整、科学的备考链条和考点层级网络体系。此外,在讲解时将题目涉及的知识点、考点和方法技巧有机联系,辅助一定的口诀记忆,快速抓住重点数学考试思想、思维模式,以利于考生更系统、更宏观地掌握数学实质,赢取高分。

解题技巧是本书的最大特色。制约成绩的最大障碍不是难度,而是速度。本书以提升实战为宗旨,将历年考试中出现的技巧进行系统总结,涵盖了百余种方法和技巧,汇总了数十种固定解题思维模式,又灵活演变成数十种做题模板和解题套路,让考生在上考场前对试卷便能了如指掌,在考场上做到游刃有余,所向披靡,无论基础怎样,都能达到“水到渠成”和“润物细无声”之功效。

此外,本书根据最新考试动态,蕴含无数创新考题,不仅让考生能够找到身临其境的感觉,在有限的时间抓住重点,而且通过全真演练,掌握考试的技巧和方法,有的放矢,查漏补缺,考场上就能从容应试,轻取高分。尽管本书每题均有详尽的解析,但希望考生不要轻易去查看详解,先培养自己的独立思考能力,做完题目后,再去看详解,仔细回顾、研究一下自己的解答过程与书中有什么异同,如果存在疑问,应尽早查清原因。注意,归纳总结过程是必不可少的,是提高成绩的必经途径,其重要性远远超过做题本身。

本书是“高分指南”的姊妹书,以实用性和技巧性为基点,以强调考试方法和做题技巧为宗旨,以快速提高和立竿见影为核心,达到在解题中总结套路,在套路中提高能力,最后形成一套灵活应试的战略战术为目的,对典型考题从多侧面、多视角进行讲解,注重对多解法、多类型题目的训练,培养发散思维和技巧应用能力,从而实现学习效果的加倍提高和考分的快速突破,因而本书是考前过关冲刺的必备辅导书。

在编写过程中,得到了广大教师同仁的大力支持,特此感谢。同时参阅了众多有关的教材和复习指导书,引用了一些例子,恕不一一提及,谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。由于编者水平有限,兼之时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请读者批评指正。

欢迎大家通过作者博客(<http://www.chenjian.cc>)以及邮箱(myofficer@qq.com)等网络平台答疑解惑、获得最新信息,互动学习经验,最大程度利用好本书。

编 者  
2016年8月

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

特别提醒：“高校考试培训网络学院”<http://px.hep.edu.cn>是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供资料下载、在线练习、在线考场、网上商城、网络课程等多项增值服务。高教版考试用书配有本网站的增值服务卡，该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息，并以此辨别图书真伪。

# 目录

## 第一部分 数学预测冲刺黄金

### 技巧 ..... 1

第 1 章 数学考点预测串讲 ..... 2

第 2 章 数学固定思维模式 ..... 5

第 3 章 核心专题 ..... 8

第 4 章 常用黄金技巧 ..... 30

第 5 章 考场增分策略 ..... 45

## 第二部分 逻辑推理冲刺黄金

### 技巧 ..... 57

第 1 章 基本应考策略 ..... 58

第 2 章 结论型问题求解法 ..... 61

第 3 章 一般解题思路 ..... 74

第 4 章 归纳与类比 ..... 90

第 5 章 简单句的推理 ..... 97

第 6 章 基本复合命题 ..... 105

第 7 章 复合推理 ..... 113

第 8 章 特殊条件下的推理 ..... 127

## 第三部分 写作部分冲刺黄金

### 技巧 ..... 135

前言:联考作文,考场须知 ..... 136

上编:论证有效性分析 ..... 144

第 1 章 考前点睛 ..... 145

第 2 章 回归真题 ..... 159

下编:论说文 ..... 182

第 3 章 再读大纲 ..... 183

第 4 章 回归真题 ..... 186

第 5 章 加强审题 ..... 195

第 6 章 写好开篇 ..... 201

第 7 章 搭建框架 ..... 208

第一部分 数学预测冲刺  
黄金技巧

# 第1章 数学考点预测串讲

## 一、算数部分

本部分4个题,以“历年真题名家详解”为素材复习.主要的命题点如下:

### 1. 实数的性质

奇数、偶数:相关性质

质数、合数:最小的质数是2,最小的合数是4(与奇数、偶数相关联出题)

### 2. 长串数字化简

很多项相加或相乘的化简.

### 3. 绝对值重点性质

### 4. 三角不等式

等号成立的条件(可用特值辅助判断)

### 5. 绝对值几何意义以及最值

### 6. 平均值定理求定值

乘积为定值,和有最小值;

和为定值,乘积有最大值

## 二、应用题部分

本部分6个题,以“高分指南”和“历年真题名家详解”为素材复习.主要的命题点如下:

### 1. 比例、分数、百分比、倍数

命题:部分量与总量的关系

### 2. 利润:成本、售价、销量

已知函数关系求最值,结合抛物线

### 3. 路程(必考)

直线、往返、圆圈、顺水逆水、相对速度、变速对时间影响

### 4. 工程

效率正负(进水、排水)、变效率、轮流、工时的最值问题

### 5. 浓度比例问题

### 6. 集合

两个集合及三个集合的公式

### 7. 不定方程

特点:未知参数个数 $>$ 方程个数

本质讨论: $ax+by=c$  从奇偶性入手,从系数大的入手

## 8. 至少至多

总量不变,研究某对象至少、至多(转化为其余最少)

## 9. 线性规划

由题目转换为数学式子,解出边界交点值,若为分数或小数,则讨论附近两个整数

## 10. 最值

抛物线

平均值定理

### 三、代数部分

本部分4个题,以“历年真题名家详解”为素材复习.主要的命题点如下:

注意:符号运算、表达式变容易粗心错误.

## 1. 整式、分式化简变形

基本公式掌握清楚

## 2. 多项式系数

求指定项系数

## 3. 因式或整除

注意因式定理的应用

## 4. 抛物线(必考)

与方程、不等式、最值相关

与数列关联

## 5. 方程

韦达定理,根的特征及范围

特殊形式:绝对值方程、根号、分式

## 6. 不等式

不等式(有解、无解、全体实数)

不等式有最大值、最小值

不等式解为空集和全体实数

穿线法(可分解因式)

特殊:绝对值、分式(移向合并)

## 7. 数列

数列求和

数列性质

递推公式

数列大小比较或最值

### 四、几何

本部分6个题,以“历年真题名家详解”和“高分指南”为素材复习.主要的命题点如下:

## 1. 平面几何(2~3个题目)

(1) 求面积题目必考,常用方法:

割补凑整法;反面求解法;三角形等面积变换,底高之比;三角形全等,相似(折叠,平行,勾股定理,射影定理,重心把三角形分为三个面积相等的三角形);出现分块编号(出现多块不规则编号);有重叠面积: $S = \text{所有面积} - \text{重叠两次} - 2 \times \text{重叠三次}$ ;梯形

(2) 求长度:全等或相似比例

求切线段长度

已知面积关系求长度

求弧长

(3) 判断三角形的形状:

已知三边等式,等边,等腰,直角,等腰直角

(4) 特殊的线、心:

内心: $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$

外心:三边中垂线的交点

直角三角形外心在斜边的中点

重心:三条中线交点,将中线分为 2:1 的两段

2. 解析几何(2~3 个题目)

(1) 三个距离公式:两点距离,点到直线的距离,两平行线的距离

(2) 对称:点关于直线;直线关于直线;圆关于直线

特殊对称:关于  $x$  轴,  $y$  轴,  $y=x$ ,  $y=-x$

应用:光的反射,求最值

(3) 三个位置关系:

直线与直线、直线与圆、圆与圆的位置关系

(4) 求面积,求长度或者距离:弦长和切线段长(已知面积或其他条件)

(5) 利用几何意义求最值

3. 立体几何(2~3 个题目)

(1) 与水相关的变换

(2) 表面积和体积的关系

(3) 内切球,外接球;正方体,长方体,等边圆柱

## 五、排列组合、概率

本部分 5 个题,以“历年真题名家详解”和“高分指南”为素材复习. 主要的命题点如下:

1. 排列组合(2~3 个题目)

常用题型及方法:分步,分类,相邻,相间,隔板,对号与不对号,数字问题,分房问题

2. 概率

(1) 古典概率:用两个排列组合相除来计算

(2) 独立事件:乘法公式

(3) 伯努利公式:公式的应用及分析

3. 数据描述

平均值、方差、直方图

## 第2章 数学固定思维模式

思维能力主要是指:观察、比较、猜想、分析、综合、抽象和概括;会用归纳、演绎和类比进行推理;会合乎逻辑并准确地阐述思想和观点;能运用数学概念、思想和方法,辨明数学关系,形成良好的思维品质.良好的思维习惯不是生来就有的,它是在有意识的培养中形成,在不断的练习中得到强化.数学问题解决的思维策略,是指在数学问题解决过程中,主体所采取的总体思路,它是数学思想、观点在解决问题时思维决策的选择.而且,数学解题是一种复杂的、呈现多种思维特征且其特征充满各个环节的思维过程.管理类研究生招生考试急需的并非是一般的数学思维模式,缺的是具体问题如何设计解题策略的能力,即何时使用何种数学思维模式的能力,所以更需要研究针对管理类考试特点的数学问题解决的思维策略模式.

通过笔者多年的教学经验和考生的实际情况,解题受阻的原因非知识缺乏,而是没有正确的解题策略.解题是系统工程,由知识、方法(狭义、具体的)、能力(基本能力)、经验等本质因素构成解题基础模块;关键是思维策略模块,“是什么促使你这样想、这样做的?”“是怎样想到这个解法的?”等层面的问题都属于思维策略模块.显然,思维策略模块是其核心,光有基础知识,具体方法和经验是不够的.判断用什么方法、用什么知识解答问题必须对该问题进行识别、解剖、加工,甚至变换,即必须具有一定的思维策略水平.

“解题的价值不是答案本身,而是要弄清楚是怎样想到这个解法的”.尤其对于管理类考试,不仅需要就各种类型就题论题地给出解答并演练,而且要展现思路,尤其是思路的寻找过程.课堂上的学生除了对老师的神机妙算叹服外,如果思维策略得不到学习和提高,那么依然只能停留在“套题型、背题解,依样画葫芦”的层次.这样导致的结果是,今天做过的题,明天仍然做不出;这道题会做了,其背景稍加改造又一筹莫展、手足无措,即使东碰西撞、曲里拐弯算出了答案,心里也没有底,只是靠对答案来检验自己解题思路的正误.部分考生也有把各种各样的、庞杂凌乱的具体解题技巧一概视为规律,企图通过大量的机械重复、模仿、记忆来补偿思维策略水平的低下,能力的不足.长此以往,不仅高负担低效率,还必将造成思维的萎缩性退化,对认知结构的构建、对数学思维的发展都是极其不利的.

学好数学的关键有两个方面:一是本质特征,即问题具备的与解题有关的一些特征和性质.二是本质要求,“明确目标”仅仅是认识了题目要求的表象,但这种要求的本质是什么?由条件到结论的差异如何消除等问题还需解题者从更高的层次上去把握.揭示本质主要有两种形式:一是从差异看本质,二是从联系看本质.所谓从差异看本质,就是先认识题中的各种差异,然后了解差异在题中所处的地位,进而抓住其中最主要的、最能反映事物特征、决定事物性质的差异,由此产生对题目本质要求的认识.一些数学问题常常只需消除题中的主要差异便可获解,或者使问题发生根本转化,变得易于求解.特别地,当问题中只存在一种差异时,问题的本质要求常常就是消除这一差异.所谓从联系看本质,就是通过发掘题中各要素的特征及其相互关系,揭示事物的本质.这里涉及的基本数学思想方法,诸如函数方程思想、

化归思想、参数思想、数形结合思想,对发掘各要素的内在联系从而揭示本质起着主要作用.

综上所述,为了让广大考生更高效地准备管理类考试,特列举出考试常用的思维策略.把解题思维策略模式化不仅不会禁锢人的思维,而且还能帮助基础不好的考生快速提高解题能力.因为按定势和模式思维表现出的思维准备状态,能随时扩大已有经验的应用范围,而且定势的不断熟练和完善可使思维更加深入与灵活.思维的发散常常表现为对定势的调节与变异,发散不是目的,发散后必将形成新的定势,使解题通向目标,而这种策略模式可帮助考生在解题时从记忆库里提取所需的具体知识和具体解题方法,通过问题本身的启示,把已有的知识、方法和要解决的问题联系起来,建立良好的信息交往,使解题通向目标.

## 2.1 初等数学

- 【模式 1】 遇到多个变量符号,首先取特值判断
- 【模式 2】 遇到选择变量取值范围,首先采用特值排除法
- 【模式 3】 遇到多项式整除问题,首先令除式为零,得到多项式为零
- 【模式 4】 遇到多项式余式问题,首先令除式为零,得余式
- 【模式 5】 遇到因式问题,首先令因式为零,得到表达式为零
- 【模式 6】 遇到绝对值问题,首先利用非负性或特值法
- 【模式 7】 遇到绝对值问题,首先借助几何意义求解最值及范围
- 【模式 8】 遇到比例问题,首先令比例系数为 1
- 【模式 9】 遇到选择原始参数,首先将选项代入验证
- 【模式 10】 遇到选择间接参数,列完方程首先将选项代入验证
- 【模式 11】 遇到整式相乘,首先抓最高次方项及常数项
- 【模式 12】 遇到两部分组成整体时,首先采用杠杆原理的交叉法
- 【模式 13】 遇到百分比时,如利润率,可令基准量为 100
- 【模式 14】 遇到分数或比例问题,可先看数字能否被整除
- 【模式 15】 遇到比例变化问题时,首先采用比例统一分析法
- 【模式 16】 遇到分段计费问题时,先确定每段的数值
- 【模式 17】 遇到线性规划找最优解,最值点往往在边界
- 【模式 18】 遇到浓度混合问题,首先采用交叉法
- 【模式 19】 遇到顺水逆水问题,可以假设水速为特值(如为 0)进行分析
- 【模式 20】 遇到质数问题,可以采用常见的质数代入
- 【模式 21】 遇到根的范围讨论,首先采用穿点法分析
- 【模式 22】 遇到含有  $n$  的命题,首先取  $n=1,2$  验证
- 【模式 23】 遇到数列问题,首先验证前几项
- 【模式 24】 遇到数列中既有通项也有求和,首先采用万能公式分析

## 2.2 几 何

- 【模式 1】 遇到求解长度问题,首先进行测量估算

- 【模式 2】 遇到求解角度问题,首先进行观察估算
- 【模式 3】 遇到求解面积问题,首先观察选项特征
- 【模式 4】 遇到有对称的面积,首先求出一部分面积
- 【模式 5】 遇到平行问题,首先观察相似
- 【模式 6】 遇到折叠的面积,首先找全等
- 【模式 7】 遇到坐标轴交点问题,首先看常数项
- 【模式 8】 遇到对称问题,首先反代求解
- 【模式 9】 遇到垂直问题,不要漏掉水平与竖直
- 【模式 10】 遇到直线与圆,首先考查相切
- 【模式 11】 遇到切线问题,首先连接圆心与切点
- 【模式 12】 遇到弦长,首先求出圆心到直线的距离
- 【模式 13】 遇到解析几何最值,首先找特殊点
- 【模式 14】 遇到三角形的判断,首先看三边是否相等或是否满足勾股定理
- 【模式 15】 遇到两圆位置关系,首先看两圆的圆心距离
- 【模式 16】 遇到光的反射问题,首先利用对称求解

## 2.3 数据分析

- 【模式 1】 几个元素排序,要出现几的阶乘
- 【模式 2】 指定元素不参选,指定位置不排序
- 【模式 3】 相邻问题捆绑打包,相间问题插空隔离
- 【模式 4】 打包与插空并存,先打包再插空
- 【模式 5】 正面情况较多采用反面求解法
- 【模式 6】 遇到至少或至多问题,可从反面思考
- 【模式 7】 相同元素分配采用隔板法
- 【模式 8】 对号入座只一种方法,不对号记住 1,2,9
- 【模式 9】 等数量分组,要除以等数量组数的阶乘
- 【模式 10】 独立事件,都发生的概率等于每个发生的概率相乘
- 【模式 11】 独立事件,模板:试钥匙、试密码、破译密码、命中敌机
- 【模式 12】 伯努利公式,模板:天气预报、比赛、直到
- 【模式 13】 方差和标准差表示数据的稳定性,越小越稳定,越大越不稳定
- 【模式 14】 直方图的面积表示频率,频数等于频率乘以总数
- 【模式 15】 直方图所有面积之和等于 1

## 第3章 核心专题

考生解题时,习惯用熟悉的题型去“套”.这说明考生只满足于解出来.笔者认为,只有对数学思想、数学方法理解透彻及融会贯通时,才能提出新解法、巧解法.管理类研究生试题十分重视对数学思想方法的考查,特别是突出考查能力的试题,其解答过程都蕴含着重要的数学思想方法.要有意识地应用数学思想方法去分析问题、解决问题,形成能力,提高数学素质,使自己具有数学思想.

管理类研究生试题主要从以下几个方面对数学思想方法进行考查:

- ① 常用数学方法:配方法、换元法、待定系数法、等价变形法、参数法、消去法等;
- ② 数学逻辑方法:分析法、综合法、反例法、归纳法、演绎法、特值法等;
- ③ 数学思维方法:观察与分析、概括与抽象、分析与综合、特殊与一般、类比、归纳和演绎等;
- ④ 常用数学思想:函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化(化归)思想等.

数学思想方法与数学基础知识比较,它有着较高的地位和层次.数学知识是数学内容,可以用文字和符号来记录和描述,随着时间的推移,记忆力的减退,将来可能忘记.而数学思想方法则是一种数学意识,只能够领会和运用,属于思维的范畴,用于对数学问题的认识、处理和解决.掌握数学思想方法,不是受用一阵子,而是受用一辈子.即使数学知识忘记了,数学思想方法也还是会起作用.

数学思想方法中,数学基本方法是数学思想的体现,是数学的行为,具有模式化与可操作性的特征,可以选用作为解题的具体手段.数学思想是数学的灵魂,它与数学基本方法常在学习、掌握数学知识的同时获得.

简言之,“知识”是基础,“方法”是手段,“思想”是深化,提高数学素质的核心就是提高学生对数学思想方法的认识和运用,数学素质的综合体现就是“能力”.为了帮助考生掌握解题的金钥匙,掌握解题的思想方法,本章将管理类研究生考试中涉及的核心思想通过专题的形式进行展现.

### 3.1 配方变形专题

配方法是对数学式子进行一种定向变形(配成“完全平方”)的技巧,通过配方找到已知和未知的联系,从而化繁为简.何时配方,需要适当预测,并且合理运用“裂项”与“添项”、“配”与“凑”的技巧,从而完成配方.有时也将其称为“凑配法”.

最常见的配方是进行恒等变形,使数学式子出现完全平方.它主要适用于:已知或者未知中含有二次方程、二次不等式、二次函数、二次代数式的讨论与求解,或者缺 $xy$ 项的二次多项式变换等问题.

配方法使用的最基本的配方依据是完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ .将这个公式

灵活运用,可得到各种基本配形式,如:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab;$$

$$a^2 + ab + b^2 = (a+b)^2 - ab = (a-b)^2 + 3ab = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2;$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2];$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca).$$

结合其他数学知识和性质,相应有一些配形式,如:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2, \text{等等}.$$

【例 3.1】在正项等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1a_5 + 2a_3a_5 + a_3a_7 = 25$ , 则  $a_3 + a_5 = (\quad)$ .

- A. 3                      B. 3.6                      C. 4.2                      D. 5                      E. 5.5

【答案】D

【解析】 $a_1a_5 + 2a_3a_5 + a_3a_7 = (a_3 + a_5)^2 = 25 \Rightarrow a_3 + a_5 = 5$ .

【点拨】利用等比数列性质  $a_{m-p}a_{m+p} = a_m^2$ , 将已知等式左边代换后配方为  $(a_3 + a_5)^2$  易求.

【例 3.2】方程  $x^2 + y^2 - 4kx - 2y + 5k = 0$  表示圆的充要条件是  $(\quad)$ .

- A.  $\frac{1}{4} < k < 1$                       B.  $k < \frac{1}{4}$  或  $k > 1$                       C.  $k \in \mathbf{R}$   
D.  $k = \frac{1}{4}$  或  $k = 1$                       E.  $k > 1$

【答案】B

【解析】将圆的一般式配方变形为标准式:  $(x-2k)^2 + (y-1)^2 = 4k^2 - 5k + 1$ , 根据  $4k^2 - 5k + 1 > 0 \Rightarrow k < \frac{1}{4}$  或  $k > 1$ .

【点拨】配方成圆的标准方程形式  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ , 解  $r^2 > 0$  即可.

【例 3.3】已知方程  $x^2 + (a-2)x + a-1 = 0$  的两实根  $x_1$  和  $x_2$ , 若点  $P(x_1, x_2)$  在圆  $x^2 + y^2 = 4$  上, 则实数  $a = (\quad)$ .

- A.  $3 - \sqrt{6}$                       B.  $3 + \sqrt{6}$                       C.  $3 \pm \sqrt{7}$                       D.  $3 + \sqrt{7}$                       E.  $3 - \sqrt{7}$

【答案】E

【解析】点  $P(x_1, x_2)$  在圆  $x^2 + y^2 = 4$  上, 得到  $x_1^2 + x_2^2 = 4$ . 再根据韦达定理得到:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a-2)^2 - 2(a-1) = a^2 - 6a + 6 = 4$$

解得  $a = 3 \pm \sqrt{7}$ . 由于方程有实根, 故取  $a = 3 - \sqrt{7}$ .

【点拨】本题根据点在圆上, 满足圆的方程, 再进行配方, 结合韦达定理求解. 需要注意的是, 使用韦达定理后一定要验证方程是否有实根.

【例 3.4】已知长方体的全面积为 11, 其 12 条棱的长度之和为 24, 则这个长方体的一条对角线长为  $(\quad)$ .

- A.  $2\sqrt{3}$                       B.  $\sqrt{14}$                       C. 5                      D. 6                      E. 8

【答案】C

【解析】设长方体长、宽、高分别为  $x, y, z$ , 由已知“长方体的全面积为 11, 其 12 条棱的长度之和为 24”, 得  $\begin{cases} 2(xy+yz+xz)=11 \\ 4(x+y+z)=24 \end{cases}$ , 长方体所求对角线长为

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)}=\sqrt{6^2-11}=5.$$

【点拨】本题先转换为数学表达式, 欲求对角线长, 将其凑成两已知式的组合形式可得. 解答关键是将两个已知和一个未知转换为三个数学表达式, 观察和分析三个数学式, 容易发现使用配方法将三个数学式进行联系, 即联系了已知和未知, 从而求解.

【例 3.5】设方程  $x^2+kx+2=0$  的两实根为  $p$  和  $q$ , 若  $\left(\frac{p}{q}\right)^2+\left(\frac{q}{p}\right)^2\leq 7$  成立, 则实数  $k$  的取值范围中包含( )个整数.

- A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3                      E. 4

【答案】C

【解析】方程  $x^2+kx+2=0$  的两实根为  $p$  和  $q$ , 由韦达定理得  $p+q=-k, pq=2$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^2+\left(\frac{q}{p}\right)^2 &= \frac{p^4+q^4}{(pq)^2} = \frac{(p^2+q^2)^2-2p^2q^2}{(pq)^2} \\ &= \frac{[(p+q)^2-2pq]^2-2p^2q^2}{(pq)^2} = \frac{(k^2-4)^2-8}{4} \leq 7, \end{aligned}$$

解得  $-\sqrt{10}\leq k\leq \sqrt{10}$ .

又因为  $p$  和  $q$  为方程  $x^2+kx+2=0$  的两实根, 所以  $\Delta=k^2-8\geq 0$ , 即  $k\geq 2\sqrt{2}$  或  $k\leq -2\sqrt{2}$ .

综合起来,  $k$  的取值范围是:  $-\sqrt{10}\leq k\leq -2\sqrt{2}$  或者  $2\sqrt{2}\leq k\leq \sqrt{10}$ .

【点拨】关于实系数一元二次方程问题, 总是先考虑根的判别式  $\Delta$ ; 已知方程有两根时, 可以恰当运用韦达定理. 本题由韦达定理得到  $p+q$  和  $pq$  后, 观察已知不等式, 从其结构特征联想到先通分后配方, 表示成  $p+q$  与  $pq$  的组合式. 假如本题不对“ $\Delta$ ”讨论, 结果将出错, 即使有些题目可能结果相同, 但去掉对“ $\Delta$ ”的讨论, 解答也是不严密、不完整的.

【例 3.6】函数  $y=(x-a)^2+(x-b)^2$  ( $a, b$  为常数) 的最小值为( ).

- A.  $\frac{a^2-b^2}{2}$               B.  $\frac{(a-b)^2}{2}$               C.  $\frac{a^2+b^2}{2}$               D.  $\frac{(a+b)^2}{2}$

E. 最小值不存在

【答案】B

【解析】 $y=x^2-2ax+a^2+x^2-2bx+b^2=2x^2-2(a+b)x+a^2+b^2$

$$=2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(a-b)^2}{2},$$

因此最小值为  $\frac{(a-b)^2}{2}$ .

【点拨】本题首先将平方展开, 合并同类项, 然后通过配方法求解最小值. 当然也可以根据抛物线的特点, 利用顶点坐标求解最小值.

【例 3.7】 $\alpha$  和  $\beta$  是方程  $x^2-2ax+a+6=0$  的两实根, 则  $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$  的最小值是( ).

A.  $-\frac{49}{4}$

B. 8

C. 18

D. 20

E. 不存在

**【答案】**B**【解析】** $\alpha$  和  $\beta$  是方程  $x^2 - 2ax + a + 6 = 0$  的两实根, 根据韦达定理得

$$\begin{aligned}
 (\alpha-1)^2 + (\beta-1)^2 &= \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 2\beta + 1 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta - 2(\alpha+\beta) + 2 \\
 &= 4a^2 - 6a - 10 = 4\left(a - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{4}.
 \end{aligned}$$

由于方程有实根, 故判别式  $\Delta = 4a^2 - 4(a+6) \geq 0$ , 可得  $a \leq -2$  或  $a \geq 3$ .因此只有当  $a=3$  时, 才有最小值 8.**【点拨】** 本题首先将表达式展开, 合并同类项, 然后借助韦达定理化简, 进行配方求解最小值. 注意要验证判别式, 如果忘记验证判别式, 就会误选 A.

## 3.2 换元专题

解数学题时, 把某个式子看成一个整体, 用一个变量去代替它, 从而使问题得到简化, 这种方法称为换元法. 换元的实质是转化, 关键是构造元和设元, 理论依据是等量代换, 目的是变换研究对象, 将问题移至新对象的知识背景中去研究, 从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化, 变得容易处理.

换元法又称辅助元素法、变量代换法. 通过引进新的变量, 可以把分散的条件联系起来, 隐含的条件显露出来, 或者把条件与结论联系起来, 或者变为熟悉的形式, 把复杂的计算简化. 它可以化高次为低次、化分式为整式、化无理式为有理式、化超越式为代数式, 在研究方程、不等式、函数、数列等问题中有广泛的应用. 例如, 解不等式  $4^x + 2^x - 2 \geq 0$ , 先变形为设  $2^x = t (t > 0)$ , 然后变为熟悉的一元二次不等式求解和指数方程的问题.

使用换元法时, 要遵循有利于运算、有利于标准化的原则, 换元后要注重新变量范围的选取, 一定要使新变量范围对应于原变量的取值范围, 不能缩小也不能扩大.

**【例 3.8】** 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = -1$ ,  $a_{n+1} \cdot a_n = a_{n+1} - a_n$ , 则  $a_{100} = ( \quad )$ .

A.  $-\frac{1}{100}$

B.  $\frac{1}{100}$

C.  $-\frac{1}{99}$

D.  $\frac{1}{99}$

E.  $-\frac{1}{101}$

**【答案】**A**【解析】**  $a_{n+1} \cdot a_n = a_{n+1} - a_n$  变形为  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = -1$ , 设  $b_n = \frac{1}{a_n}$ , 则  $b_1 = -1$ ,  $b_n = -1 +$ 

$$(n-1)(-1) = -n, \text{ 所以 } a_n = -\frac{1}{n}, \text{ 从而 } a_{100} = -\frac{1}{100}.$$

**【点拨】** 本题两边变形, 采用换元的方法构造一个新的等差数列, 根据数列的通项公式求解元素值.**【例 3.9】** 设实数  $x, y$  满足  $x^2 + 2xy - 1 = 0$ , 则  $x+y$  的取值范围是  $( \quad )$ .

A.  $x+y \geq 1$

B.  $x+y \leq -1$

C.  $x+y \geq 1$  或  $x+y \leq -1$

D.  $-1 \leq x+y \leq 1$

E.  $x+y \leq 1$

**【答案】**C