数学奥林匹克小丛书 高中卷 10

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU

几何变换

萧振纲 著

华东师范大学出版社

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue A

olinpike

数学奥林匹克小丛书

高中卷 10

几何变换

olinpike Xiao Congshu

萧振纲 著

华东师范大学出版社

图书在版编目（C I P）数据

数学奥林匹克小丛书．高中卷．几何变换／萧振纲著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3
ISBN 7-5617-4154-5

I.数...　II.萧...　III.数学课-高中-教学参考资料　IV.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019485号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

几何变换

著　　者　萧振纲
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　程　丹
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部 电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购) 电话 021-62869887
　　　　　门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东 中南地区 021-62458734
　　　　　华北 东北地区 021-62571961
　　　　　西南 西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　787x960 16开
印　　张　10
字　　数　176千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年6月第二次
印　　数　11 001 - 16 100
书　　号　ISBN 7-5617-4154-5/G·2381
定　　价　12.00元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系）

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛．在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大．我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业．我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目．

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率．这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才．由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者．在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺（J.W.Milnor）、芒福德（D.B.Mumford）、奎伦（D.Quillen）等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔（A.Schinzel）学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔（L.Fejér）、里斯（M.Riesz）、舍贵（G.Szegö）、哈尔（A.Haar）、拉多（T.Radó）等都曾是数学竞赛获奖者．匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂"，成为培养优秀人才的有力措施．

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久．

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

前 言

2003 年 4 月，湖南科学技术出版社出版了作者撰写的《几何变换与几何证题》一书，该书全面而系统地介绍了平面几何中的几种常用几何变换的理论和方法，得到了国内一些平面几何专家的充分肯定. 由于该书理论部分写得偏厚了一点，因而激起了作者再专门为中学生写一本介绍几何变换的小册子的写作欲望. 正在这时，华东师范大学出版社编辑出版《数学奥林匹克小丛书》，给了作者这个机会.

平面几何作为最古老的数学分支之一，由于其鲜明的直觉性和逻辑的严谨性，从而成为培养和考查一个人的逻辑思维能力、空间想像能力和推理论证能力的上好题材. 正因为如此，尽管中学数学教材中的平面几何内容时厚时薄，而中学数学竞赛却对平面几何情有独钟. 几乎每年的国际中学生数学奥林匹克(IMO)中，都有两道平面几何题；我国的高中数学联合竞赛加试试题中，必有一道平面几何题已形成了固定的模式.

通常在证明或解答一个平面几何问题时，需要的知识并不多，更多的是需要解题者的"灵机一动"，而这种灵机的产生除了要有丰富的解题实践外，还必须掌握一些较为有力的解题工具和娴熟的使用技巧. 按照德国数学家克莱因(F. Klein，1849～1925)于 1872 年提出的观点，平面几何是研究平面图形在运动、变化过程中的不变性质和不变量的科学. 而几何变换作为一种现代的数学思想方法，正是采用运动、变化的观点来研究平面几何的. 现在，几何变换已经成为解决平面几何问题的一个极为有力的工具. 运用几何变换解决平面几何问题，往往能很大程度上缩短我们的思维过程. 且如果将几何变换与传统方法有机地结合起来，则这种效果更加突出. 如今，我国的中学平面几何教材也已贯彻了几何变换的思想，而我国的高中数学竞赛大纲则早已列入了平移、旋转、轴反射等几何变换内容.

本书就是向中学生(尤其是有数学特长的中学生)介绍平面几何中的几种常用几何变换的基本理论和使用几何变换这一工具处理平面几何问题的

基本方法与技巧的.全书共分11个单元,前5个单元介绍了对应于平面几何中全等概念的平移、旋转、轴反射这三种属于合同变换的几何变换.并以同样的篇幅介绍了对应于平面几何中相似概念的位似、位似旋转、位似轴反射这三种属于相似变换的几何变换.同时,反演变换作为平面几何中的一个处理几何等式与几何不等式以及与圆有关的问题的神奇武器,也在最后一单元作了简要的介绍.

任何一种方法都是有相应的理论支撑的.因此,本书各单元在每出现一个新的几何变换时,都先阐述了该几何变换的必要理论,并在此基础上着重介绍该几何变换适宜于处理哪几类平面几何问题,紧接着以一些典型例子说明怎样用该几何变换处理平面几何问题.在第1单元开头简要概述了与几何变换有关的基本概念和基础知识;诸如向量、方向线段、方向角这些在讨论几何变换时需要用到的基本工具,我们只在第2单元简要地介绍了方向角——这个在当今中学数学教材中没有涉及的内容.另外,对于像Menelaus定理、Ceva定理、Ptolemg定理等在数学竞赛中经常用到的一些著名的平面几何定理,有些用几何变换方法给出了证明,有些没有给出证明,但在需要的时候,我们就直接引用了.每一单元后面都精心选配了一定数量的习题.所选例题和习题几乎都是国内外数学竞赛(奥林匹克)试题和平面几何中的一些历史名题,其中绝大多数都是近十年内出现的竞赛试题,也有少部分例题和习题属于作者自编的.书末还对每一道习题给出了详尽的解答.

作者非常感谢冷岗松教授、倪明先生、陈亚凡先生和张志华先生,他们在作者的写作过程中提出了不少建设性的意见和建议.特别是作者的挚友、博士生导师、IMO中国国家集训队教练组成员冷岗松教授自始至终关注着本书的写作;湖南省岳阳县一中陈亚凡先生在暑假期间牺牲了宝贵的休息时间为本书进行电脑上辛苦的文字录入工作.值得一提的是,网站＜http://my.netian.com/～ideahitme/ps.html＞及＜http://www.kalva.demon.co.uk/index.html＞提供了丰富的资料,作者从中遴选出了一些国外的数学(奥林匹克)竞赛试题,也为本书增色不少.

尽管作者力求使本书的错误消灭至零,但错误和不足肯定还有不少,祈望读者不吝指正(e-mail:xiaozg@163.com).

萧振纲

2004年11月8日于湖南理工学院

目　录

1 平移变换

在介绍平移变换之前，先简单地介绍与几何变换有关的几个基本概念。这也是为后面讨论各种几何变换做准备。

设 A、B 是两个非空集合。如果按照某个对应法则 f，使得对于 A 中的每一个元素 a，在 B 中都有惟一的一个元素 b 与之对应，则 f 称为从 A 到 B 的一个映射。记作 f：$A \to B$ 或 $A \xrightarrow{f} B$。其中，b 称为 a 在映射 f 下的像，记作 $b = f(a)$ 或 $a \xrightarrow{f} b$，a 称为 b 在映射 f 下的原像，集合 A 中所有元素的像的集合记作 $f(A)$。

如果在映射 f：$A \to B$ 下，集合 A 中不同的元素在集合 B 中的像也不同，而集合 B 中的每一个元素在集合 A 中都有原像，则 f 称为一一映射。

如果 f 是集合 A 到 B 的一个一一映射，则对于 B 中的每一个元素 b，在集合 A 中都有惟一的原像 a，使 $f(a) = b$，这样就确定了集合 B 到集合 A 的一个映射。这个映射称为映射 f 的逆映射。记作 f^{-1}：$B \to A$。

凡一一映射皆有逆映射，且如果 $a \xrightarrow{f} b$，那么 $b \xrightarrow{f^{-1}} a$。

显然，一一映射 f 的逆映射 f^{-1} 也是一一映射，且 $(f^{-1})^{-1} = f$。

非空集合 A 到自身的映射 T：$A \to A$ 称为集合 A 的变换。集合 A 到自身的一一映射称为集合 A 的一一变换。

集合 A 的一个一一变换 f 作为 A 到自身的一个一一映射来说，其逆映射 f^{-1} 称为变换 f 的逆变换。说一个变换可逆，是指这个变换有逆变换。

凡一一变换皆可逆，且其逆变换也是一一变换。

使得集合 A 中任意一点都不动的变换称为集合 A 的恒等变换，记作 I。换句话说，恒等变换 I 是将集合 A 中任意一点都变为自身的变换，即对 A 中的任意一点 P，恒有 $I(P) = P$。显然，恒等变换是一一变换，且其逆变换就是自身，即 $I^{-1} = I$。

设 f、g 都是集合 A 的变换。如果对于集合 A 中的任意元素 a，都有

$f(a) = g(a)$，则称变换 f 与 g 相等. 记作 $f = g$.

设 f、g 都是集合 A 的变换. 对于 A 中的任意元素 a，如果 $a \xrightarrow{f} a' \xrightarrow{g} a''$，作变换 φ：$a \to a''$，则变换 φ 称为变换 f 与 g 的乘积. 记作 $\varphi = g \circ f$（如图 1-1）. "$\circ$" 称为乘法运算. 乘积 $g \circ f$ 中的乘法记号"$\circ$"通常省略不写，直接记作 gf（注意：先施行的变换是 f 而不是 g）.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & a' \arrow[d, "g"] \\ & a'' \end{tikzcd}$$

图 1-1

显然，当 $\varphi = gf$ 时，$\varphi(a) = g(f(a))$.

易知，对于集合 A 的任意变换 f，恒有 $fI = If = f$. 而对于集合 A 的任意一一变换 f，恒有 $f^{-1}f = ff^{-1} = I$.

两个一一变换的乘积无疑还是一个一一变换.

变换的乘法一般不满足交换律. 即对集合 A 的两个变换 f、g，在一般情况下 $gf \neq fg$. 这是变换的乘法与通常的数的乘法的一个重要的区别.

变换的乘法满足结合律，即对于集合 A 的任意三个变换 f、g、h，恒有

$$(fg)h = f(gh).$$

事实上，对于 A 中的任意元素 a，由变换的乘法的定义，有

$$((fg)h)(a) = (fg)(h(a)) = f(g(h(a))).$$

$$(f(gh))(a) = f((gh)(a)) = f(g(h(a))).$$

即对于 A 中的任意元素 a，恒有 $((fg)h)(a) = (f(gh))(a)$. 由变换相等的定义即知 $(fg)h = f(gh)$.

由于变换的乘法满足结合律，因此在书写三个或更多个变换的乘积时，就不必加括号. 如上述三个变换的乘积可简单地写作 fgh.

以上介绍的一些概念都属于一般集合的变换. 那么，什么叫几何变换呢？——平面或空间（视为点集）的变换称为几何变换. 在平面几何中所讨论的几何变换当然是指平面（视为点集）的变换，而且是平面的一一变换.

设 T 是平面 π 的一个变换，F 是平面 π 的一个图形（即平面的一个子集），令

$$F' = T(F) = \{T(A) \mid A \in F\}.$$

则图形 F' 称为图形 F 在变换 T 下的像.

设 T 是平面 π 的一个变换，A 是平面 π 上的一个点. 如果 $T(A) = A$，则点 A 称为变换 T 的一个不动点；如果对于平面 π 的一个图形 F，有 $T(F) =$

F，则图形 F 称为变换 T 的一个不变图形.

设 T 是平面 π 的一个变换. 如果对于平面 π 上任意两点 A、B 与其像点 A'、B'，恒有 $A'B'=AB$，则 T 称为平面 π 的一个合同变换.

简言之，平面上保持任意两点之间的距离不变的变换称为合同变换.

可以证明，在合同变换下，共线点仍变为共线点，直线的像是直线；射线的像是射线；线段的像是线段；圆的像是圆. 合同变换保持两条直线的夹角大小不变；任意图形变为与之全等的图形.

现在来看什么是平移变换. 我们用向量来刻画.

设 $\boldsymbol{v}$ 是平面 π 上的一个固定向量. 如果平面 π 的一个变换，使得对于平面 π 上的任意一点 A 与其像点 A'，恒有 $\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{v}$，则这个变换称为平面 π 的一个平移变换. 记作 $T(\boldsymbol{v})$. 其中，向量 $\boldsymbol{v}$ 称为平移向量；向量 $\boldsymbol{v}$ 的方向称为平移方向；向量 $\boldsymbol{v}$ 的模 $|\boldsymbol{v}|$ 称为平移距离.

通俗地讲，将平面上的所有点都按一个固定方向移动一个固定距离的变换称为平移变换（图 1-2）.

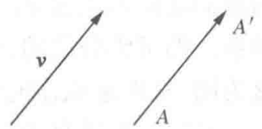

图 1-2

由定义可知，$T(\mathbf{0})=I$ 是恒等变换. 这说明恒等变换是平移变换，其平移距离为零. 恒等变换作为平移变换来说没有平移方向.

显然，平移变换是可逆的，且平移变换的逆变换仍是一个平移变换，其平移向量等于原向量的负向量，即 $[T(\boldsymbol{v})]^{-1}=T(-\boldsymbol{v})$.

定理 平面 π 的一个变换是平移变换的充分必要条件是对平面 π 上的任意两点 A、B 与其像点 A'、B'，恒有 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.

证明 设 $T=T(\boldsymbol{v})$ 是平面 π 的一个平移变换，对平面 π 上的任意两点 A、B，设 $T(A)=A'$，$T(B)=B'$，则有 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{v}$，于是 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB}$. 反之，在平面 π 上任取一点 B，当 $T(B)=B'$ 时，令 $\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{v}$，则 $\boldsymbol{v}$ 是平面 π 的一个固定向量. 对平面 π 上任意一点 A，当 $T(A)=A'$ 时，因 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB'}=\boldsymbol{v}$，由平移变换的定义即知 $T=T(\boldsymbol{v})$ 是平面 π 的一个平移变换.

由定理可知，平移变换是合同变换，且保持任意直线的方向不变.

这个定理还告诉我们：在平移变换下，与平移方向不平行的线段变为与之平行且相等的线段，与平移方向平行的线段变为与之共线且相等的线段.

实际上，由平移变换的定义可知，平面上的任意一个图形在平移变换下仅仅移动了图形的位置，并没有改变图形的大小（图 1-3）.

每一个平面几何问题所对应的几何图形都具有这样或那样的一些特征子图形(如平行四边形、正三角形、等腰三角形、正方形、圆、中点等等),而每一个具体的几何变换也都有自己独特的性质.于是,面对一个陌生的平面几何问题,我们就可以将注意力集中在所对应的几何图形中的某个特征子图形上,把特征子图形中的一部分元素(点、线段、直线等等)视为另一部分元素在某个几何变换下的像.这就是说,如果施以某个几何变换,则特征子图形中的某些已知元素便成为另一些已知元素的像.然后我们只需找出整个几何图形中与结论有关的其他元素的像(这是一件轻而易举之事,却相当于传统的作辅助线),则整个几何图形即重新改组,问题的结构发生变化.再根据相应几何变换的性质(尤其是新旧元素之间的关系),即可将分散的元素相对集中,进而使问题得到转化——化难为易、化繁为简,从而避免作辅助线的苦思冥想,使问题较顺利地得到解决.

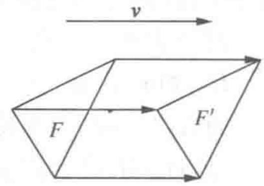

图 1-3

平移变换适宜于处理哪些平面几何问题呢?简单地讲,条件含有相等线段、平行线段比以及求几个角之和等问题,都可以考虑用平移变换处理.

由于在平移变换下与平移方向不平行的线段可变为与之平行且相等的线段,因此,对于已知条件中有平行四边形的平面几何问题,我们可以考虑用平移变换处理.平移向量的始点与终点为平行四边形的某两个相邻顶点.

例1 设 P 是$\square ABCD$ 内部一点,且 $\angle APB+\angle CPD=180^\circ$,求证:$\angle CBP=\angle PDC$.(第29届加拿大数学奥林匹克)

分析 只要将$\triangle PDC$ 平移,使得边 DC 与 AB 重合,则马上出现一个对角和为 180°的四边形,从而可由圆内接四边形得出结论.

证明 如图 1-4 所示,作变换 $T(\overrightarrow{DA})$,则$D\to A$,$C\to B$;设 $P\to P'$,则$\angle BP'A=\angle CPD$,$\angle P'AB=\angle PDC$,$P'P\parallel BC$.又$\angle APB+\angle BP'A=\angle APB+\angle CPD=180^\circ$,所以,$P$、$A$、$P'$、$B$ 共圆.于是,$\angle P'PB=\angle P'AB=\angle PDC$.故再由 $P'P\parallel BC$,即知 $\angle CBP=\angle P'PB=\angle PDC$.

注 因 $\angle PAD=\angle APP'$,由此可知下面的命题成立:

设 P 是$\square ABCD$ 内部一点,则 $\angle CBP=\angle PDC\Leftrightarrow\angle DCP=\angle PAD$.

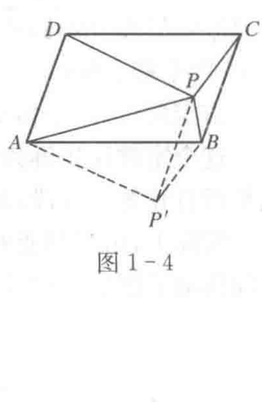

图 1-4

例 2 设 P 是$\square ABCD$ 的内部一点，若 $\angle ABP = 2\angle ADP$，$\angle DCP = 2\angle DAP$，求证：$AB = BP = CP$.（第 25 届澳大利亚数学奥林匹克）

证明 如图 1－5 所示，作变换 $T(\overrightarrow{AB})$，则 $A \to B, D \to C$；设 $P \to P'$，则有 $PP' \underline{\parallel} AB$，且 $\angle BCP' = \angle ADP$，$\angle P'BC = \angle PAD$，$\angle P'PC = \angle DCP$，$\angle BPP' = \angle PBA$. 于是，当 $\angle PBA = 2\angle ADP$，$\angle DCP = 2\angle PAD$ 时，有 $\angle BPP' = 2\angle BCP'$，$\angle P'PC = 2\angle P'BC$；延长 PP' 至 Q，使 $PQ = PB$，连 BQ，则 $\angle BPP' = 2\angle PQB$，所以，$\angle BQP' = \angle BCP'$，从而 Q、B、P'、C 共圆，因此 $\angle P'QC = \angle P'BC$；又 $2\angle P'BC = \angle P'PC = \angle P'QC + \angle QCP$，所以，$\angle P'QC = \angle QCP$，于是 $PC = PQ = PB$，从而 P 为 $\triangle QBC$ 的外心，但 Q、B、P'、C 共圆，故 $PP' = PB$. 再由 $PP' = AB$ 即知 $PB = PC = AB$.

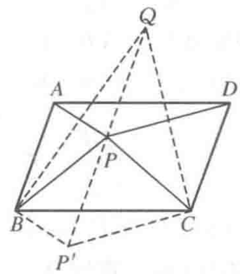

图 1－5

注 本题也是一个典型的平行四边形问题. 但实施平移变换后似乎还不能解决问题. 不过，变换后已将原问题转化成了另一个容易解决的问题.

因为在平移变换下与平移方向平行的线段变为与之共线且相等的线段. 所以，对于已知条件中有共线且相等的线段的平面几何问题，我们也可以考虑用平移变换处理. 平移向量的选择是为了使其中一条线段通过平移变换变成另一条线段.

例 3 设 D、E 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上两点，且 $BD = EC$，$\angle BAD = \angle EAC$，求证：$\triangle ABC$ 是一个等腰三角形.（第 18 届俄罗斯数学奥林匹克）

证明 如图 1－6 所示，作变换 $T(\overrightarrow{BE})$，则 $B \to E, D \to C$；设 $A \to A'$，则 $A'E = AB$，$AA' \parallel BC$，$\angle EA'C = \angle BAD = \angle EAC$，所以，四边形 $AECA'$ 为圆内接梯形，因而 $AECA'$ 为等腰梯形. 于是，$AC = A'E = AB$. 故$\triangle ABC$ 是一个等腰三角形.

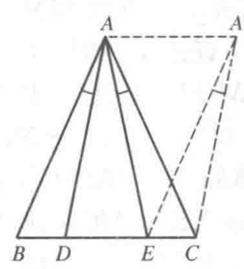

图 1－6

中点问题是共线相等线段的特殊情形，因此，对于出现了中点的平面几何问题，我们当然可以尝试用平移变换处理. 而且当我们对其实施一次平移变换后仍难以解决问题时，我们可以考虑作两次平移变换（非变换之积），每次都将出现中点的线段的一个端点都移到中点处.

例 4 在$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 内的旁切圆与 CA 相切于 D，$\angle C$ 内的旁切圆

与AB相切于E，M和N分别为BC和DE的中点，求证：直线MN平分$\triangle ABC$的周长，且与$\angle A$的平分线平行.（第21届世界城市（冬季）数学竞赛）

分析 如图1-7所示，问题的关键是要证明后一结论. 事实上，设直线MN与直线AB、CD分别交于F、G，如果后一结论成立，则有$\angle BFM = \angle MGC$，$AF = AG$. 由正弦定理得

$$\frac{BF}{\sin\angle FMB} = \frac{BM}{\sin\angle BFM} = \frac{MC}{\sin\angle MGC} = \frac{CG}{\sin\angle CMG},$$

而$\sin\angle FMB = \sin\angle CMG$，所以$BF = CG$. 再注意$AF = AG$，$M$为$BC$的中点即知直线$MN$平分$\triangle ABC$的周长.

显然，后一结论与“$\angle BFM = \angle MGC$”等价，因而只需证“$\angle BFM = \angle MGC$”即可. 由条件有$EB = \frac{1}{2}(AB + CA - BC) = DC$（这是旁切圆与内切圆的一个重要关系，在平面几何中经常用到）. 这样，我们需要从“$BE = CD$”推出“$\angle BFM = \angle MGC$”. 下面用平移变换给出两种不同的证法.

证法1 如图1-7所示，作变换$T(\overrightarrow{EN})$，则$E \to N$；设$B \to B'$，则$B'N \underline{\underline{/\!/}} BE$，从而$\angle BFM = \angle B'NM$；再作平移变换$T(\overrightarrow{DN})$，则$D \to N$；设$C \to C'$，则$NC' \underline{\underline{/\!/}} DC$，$\angle MGC = \angle MNC'$；又由$N$为$ED$的中点知$BB' \underline{\underline{/\!/}} CC'$，而$BM = MC$，所以$B'$、$M$、$C'$共线，且$M$为$B'C'$的中点. 于是，$EB = DC \Rightarrow NB' = NC' \Rightarrow \angle B'NM = \angle MNC' \Rightarrow \angle BFM = \angle MGC \Rightarrow$ 直线MN与$\angle A$的平分线平行.

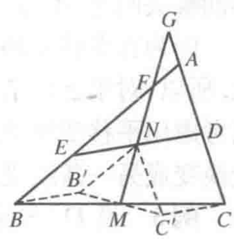

图1-7

证法2 如图1-8所示，作变换$T(\overrightarrow{BM})$，则$B \to M$；设$E \to E'$，则$E'M \underline{\underline{/\!/}} EB$，所以$\angle BFM = \angle E'MN$；再作平移变换$T(\overrightarrow{DN})$，则$D \to N$；设$C \to C'$，则$NC' \underline{\underline{/\!/}} DC$，$\angle MGC = \angle MNC'$；又易知$EE' \underline{\underline{/\!/}} MC$，$CC' \underline{\underline{/\!/}} EN$，所以$NE' \underline{\underline{/\!/}} MC'$，即$NMC'E'$是一个平行四边形，从而$\angle E'MN = \angle ME'C'$，所以$\angle BFM = \angle ME'C'$. 于是，$EB = DC \Rightarrow E'M = NC' \Rightarrow \square NMC'E'$是一个矩形$\Rightarrow N$、$M$、$C'$、$E'$共圆$\Rightarrow \angle ME'C' = \angle MNC' \Rightarrow \angle BFM = \angle MGC \Rightarrow$ 直线MN与$\angle A$的平分线平行.

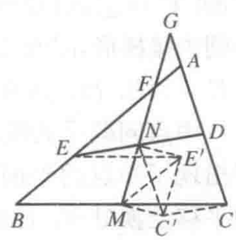

图1-8

如果两条相等线段既不平行也不共线，则其中一条线段不可能是另一条线段在某个平移变换下的像．但我们可以通过平移变换移动其中一条线段，使两条线段有一个公共端点，然后通过等腰三角形的性质再加上其他相关条件使问题得到解决．

在上面的例 4 中，EB 与 DC 显然是两条既不平行也不共线的相等线段．现在给出它的第三种证法．

证法 3　如图 1－9 所示，作变换 $T(\overrightarrow{DE})$，则 $D\to E$；设 $C\to C'$，则 $EC' \underline{\mathbin{/\!/}} DC$，$CC' \underline{\mathbin{/\!/}} DE$；设 L 为 BC' 的中点，则 $LM \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}CC'$，又由 N 是 DE 的中点知，$EN \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}CC'$，所以 $LM \underline{\mathbin{/\!/}} EN$，从而 $EL \underline{\mathbin{/\!/}} NM$．因此 $\angle BFM = \angle BEL$，$\angle MGC = \angle LEC'$．于是，$EB = DC \Rightarrow EB = EC' \Rightarrow \angle BEL = \angle LEC'$（因 L 是 BC' 的中点）$\Rightarrow \angle BFM = \angle MGC \Rightarrow$ 直线 MN 与 $\angle A$ 的平分线平行．

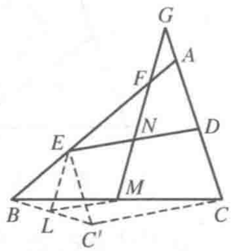

图 1－9

注　通过平移变换得到等腰$\triangle EBC'$后，再根据等腰三角形的三线合一性质作出底边 BC'的中点 L 是比较自然的．

因为在平移变换下，平面上任意一点与其像点的连线总是平行于平移向量的，所以，对于条件中有平行线（段）的平面几何问题当然也可以考虑用平移变换处理，平移方向平行于平行线（段），平移距离则要视具体情况（特别是所要证明的结论）而定．

例 5　在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，CD 是角平分线，过$\triangle ABC$ 的外心作 CD 的垂线交 AC 于 E，过 E 作 CD 的平行线交 AB 于 F，证明：$AE = FD$．（第 22 届俄罗斯数学奥林匹克）

分析　因 $FE \mathbin{/\!/} DC$，要证明的结论是 $AE = FD$．当我们把 FD 沿平行方向平移到 ED'后即将问题转化成了要证明$\triangle EAD'$是一个等腰三角形．

证明　如图 1－10、1－11 所示，作变换 $T(\overrightarrow{FE})$，则 $F\to E$；设 $D\to D'$，则 D'在 DC 上，$ED' \underline{\mathbin{/\!/}} FD$，$\angle CD'E = \angle ADC = \angle B + \frac{1}{2}\angle C$；又$\angle OEC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$，$\angle ECO = \frac{1}{2}\angle A$，所以 $\angle COE = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle C\right) - \frac{1}{2}\angle A = \angle B + \frac{1}{2}\angle C = \angle CD'E$，因此 O、D'、C、E 共圆，从而 $\angle D'OC =$

$\angle D'EC=\angle A=\angle OAC+\angle ACO$，或 $\angle D'OC=180^\circ-\angle D'EC=180^\circ-\angle A=180^\circ-(\angle OAC+\angle ACO)$，因而 D'、O、A 共线，于是由 $\angle ED'A=\angle ACO=\angle OAE$，即得 $AE=ED'=FD$.

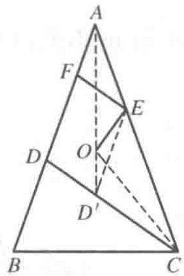

图 1-10

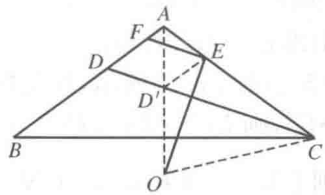

图 1-11

值得注意的是，有些平行问题在用平移变换处理时，其平移方向并不一定非要与平行方向一致，而要综合问题的条件和结论所给出的各种信息来处理.

例 6　平面上一个单位正方形与距离为 1 的两条平行线均相交，使得正方形被两条平行线截出两个三角形（在两条平行线之外），证明：这两个三角形的周长之和与正方形在平面上的位置无关.（第 15 届亚洲-太平洋数学奥林匹克）

分析　如图 1-12 所示，设直线 $l_1 /\!/ l_2$，l_1与 l_2的距离为 1，单位正方形 $ABCD$ 的边 AB、AD 与 l_1分别交于 P、Q，边 BC、CD 与 l_2分别交于 R、S. 要证明$\triangle APQ$ 的周长与$\triangle CSR$ 的周长之和是一个常数. 考虑到两平行线之一过正方形的一个顶点的极端情形，则$\triangle APQ$与$\triangle CSR$ 中有一个退化为一个点，此时$\triangle APQ$与$\triangle CSR$ 的周长之和即其中一个三角形的周长.

证明　如图 1-12 所示，作变换$T(\overrightarrow{PA})$，设 $l_1\to l_1'$，$l_2\to l_2'$，$R\to R'$，则 R'在 l_2'上，l_1'过正方形的顶点 A. 因点 A 到 l_2'的距离等于 AB，所以 l_2'决不会与边 AB、AD 相交. 设l_2'与边 BC、CD 分别交于 E、F，则有 $R'F=RS$，$SF=PA$，$ER=AQ$，进而$ER'=PQ$，于是

$$AP+PQ+AQ+RC+CS+RS$$
$$=SF+ER'+ER+RC+CS+R'F$$
$$=EC+CF+EF.$$

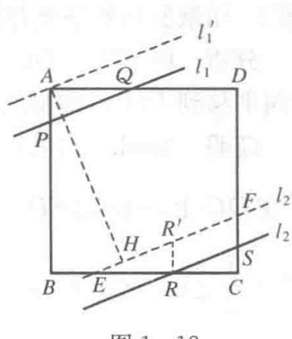

图 1-12