适合作为高中数学选修课教材

妙趣横生的图与网络

史明仁 编著

MIAOQUHENGSHENG

DE TU YU WANGLUO

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

妙趣横生的图与网络

史明仁　编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

妙趣横生的图与网络 / 史明仁编著. —杭州：浙江大学出版社，2016.5
ISBN 978-7-308-15741-4

Ⅰ.①妙… Ⅱ.①史… Ⅲ.①计算数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 072338 号

妙趣横生的图与网络

史明仁 **编著**

责任编辑 傅百荣
责任校对 金佩雯 陈 宇
封面设计 姚燕鸣
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 浙江时代出版服务有限公司
印 刷 浙江省邮电印刷股份有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 7
字 数 125 千
版 印 次 2016 年 5 月第 1 版 2016 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-15741-4
定 价 18.00 元

前 言

那些妙趣横生的智力游戏：狼羊菜渡河、分油问题、一笔画、走迷宫……曾使我们喜欢到着迷的程度。绞尽脑汁地苦苦思索，终于找到思路时的恍然大悟，求出答案时的又惊又喜，我们漫游在趣味与智慧的王国中……也许正是这样的魔力诱使我们走进数学的迷宫。

一门年轻的数学分支学科——图与网络——会让你重温昔日的情趣。这门在自然科学、社会科学各领域中，特别是计算机科学中有着日益广泛应用的学科，它的许多课题与狼羊菜渡河、一笔画等智力游戏一样，有着同样的数学模型。这些游戏的机智巧妙的图论解法将被用来确定“造价最低”的筑路方案、“效率最高”的工作分派计划、“旅程最短”的邮递员路线……

感谢浙江大学出版社的编辑，使拥有多年高校“图与网络”教学经验的笔者，能把图论中一些饶有趣味的问题，引人入胜的巧妙解题方法撰写成册，奉献给予我们有同样爱好的读者。希望读者能与我们共享在一番冥思苦想以后终于获得解答的由衷喜悦。

本书精心安排了少量习题，它们是书中内容的扩充，也是启发诱导初学者掌握图论方法和技巧的重要组成部分。

企望读者翻开这一页，走向新天地。笔者力图以勤补拙，写得浅显易懂、生动流畅，寓科学性于趣味性之中，力求避免因为自己的寡闻陋见、功力浅薄而使上述愿望成为奢望。希冀广大读者与师长、同行的指正。

史明仁

2015 年 2 月

目 录

1 一些与图论有关的智力游戏 …… 1
2 什么是图 …… 6
3 树的概念与图的连通 …… 13
4 编码问题、谣言传播、街与广场命名 …… 22
5 最短路——狼羊菜渡河与分油问题 …… 28
6 一笔画——七桥难题——握手定理 …… 38
7 多笔画——中国邮递员问题——奇偶点图上作业法 …… 49
8 “碰壁回头”走迷宫——高斯八后问题——先深搜索 …… 55
9 哈密尔顿图——环球旅行和货郎担问题 …… 62
10 工作分派问题——匹配——婚姻定理 …… 69
11 平面图——三家三井问题，地图着色的四色猜想 …… 79
12 图论研究等待你一展聪明才智 …… 89

参考文献 …… 91
习题参考答案 …… 92

1 一些与图论有关的智力游戏

那些智力游戏曾让我们如此地着迷，苦苦地思索，久久不能忘怀 ……

(1) 儿时熟悉的智力游戏

狼羊菜渡河 这一智力游戏，恐怕很多人在儿时就已知晓：一个人带了一只狼、一只羊、一棵白菜想渡过河去。但是只有一条小船，每次只能载一个人和一件东西。人不在时，狼会吃羊，羊会吃菜。要你想出一种渡河的方案（我们加上“而且渡河次数最少”这一新的要求），把狼羊菜一样不少，都安全地带过河去。

分油问题 我们也一定听说过：现有一个装满 8 两油的瓶，另有两个空瓶，装满时分别为 5 两油与 3 两油，如何用这三个没有刻度的瓶（倒来倒去）把 8 两油平分为两个 4 两油（我们加上“而且使来回倒的次数最少”这一新的要求）?

最短路问题 已知一个地图上各条街道的长度，要找出一条从甲地到乙地的行走路线，使得走过的路程最短。

这三个问题初看起来，似乎风马牛不相及。但我们将会看到，当数学的魔杖揭开它们的面纱时，它们原来是那样的相像——它们本是同胎所生的三个孪生的弟兄。数学的奥秘正在于此，它的高度抽象性，保证了它的广泛应用性。

(2) 编码问题、谣言传播问题、街与广场命名问题

编码问题 仅用数字 0 与 1 来编制密码（称为二进制码）。假如按下列方法编码：

E	N	O	S	Y
10	001	011	11	00

当我们接收到一个没有分隔符的密码 001011 时，既可以译码为

00　　10　　11

Y　　E　　S

即英文中的“是”，也可以译码为

001　　011

N　　O

即英文中的“不”，这就会使人莫衷一是。

要求是，如何对其中一个字母的编码稍作改动（增加或减少或改换一个数字），使得译码不再产生歧义。

谣言传播问题　有一个小村庄，已知某些村民日常互相闲谈。问：一个谣言能否传遍全村？

街与广场的命名问题　假设有这样的街道与广场：任何两个广场之间，最多只有一条街。现在要问：

（ⅰ）什么情况下每条街都可以用它一端的广场来命名？例如某街一端有一广场叫“中山广场”，那么这条街就可取名为“中山路”。

（ⅱ）什么情况下每个广场都可以用与其相连的某一条街来命名？

以上三个问题又是看上去毫不相关，但实际上都与图与网络中“树”的概念紧密相连。

(3) 七桥难题与一笔画

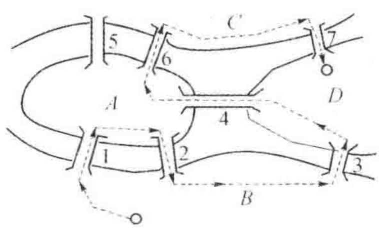

图 1.1　哥尼斯堡城的七桥难题

瑞士的著名数学家欧拉（E. Euler）在 1727 年他 20 岁时，被邀请到俄国彼得堡科学院做研究工作。在那里，他的一位德国朋友向他提出一个曾使许多人困惑的**七桥难题**(见图 1.1)：当时普鲁士的哥尼斯堡城有一个岛 A，名叫克涅波，普雷格尔河的两条支流从它两边流过。有七座桥（图上用数字编号）把这个岛 A 和三块陆地 B、C 和 D 连结起来。要想找一条散步的路径，走过每座桥且只走一次，最后回到出发点。欧拉最后解决了这个难题。他把四块地方（岛 A 和三块陆

地 B、C、D）各缩成一个点，七座桥变成七条边，把“七桥难题”化成了图 1.2 所示的“一笔画问题”，即是否可以不重复地一笔就能画出来，并且回到出发点。

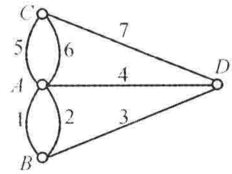

图 1.2 七桥难题导出的一笔画问题

(4) 高斯八后问题

现在你可以在计算机上搜寻到很多走迷宫的游戏。有适合于儿童的、相对简单的。图 1.3 是一种“电路迷宫(circuit labyrinth)”，要求从下面的入口出发，最后回到出发点。也有比较复杂的，例如重新修复的万花阵迷宫，位于北京圆明园长春园的西洋楼内。

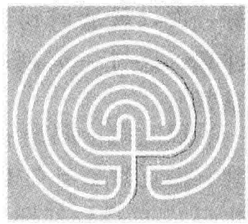

图 1.3 电路迷宫

迷宫本身与图论没有什么关系，但数学家把走迷宫的策略“碰壁回头”变成电子计算机的一种算法，叫作“深度优先搜索法”。这种方法可以用来解决许多图与网络问题，例如用它来解答由下面的“高斯八后问题”所化成的图论问题。

国际象棋的棋子是下在 8×8 的格子里（见图 1.4），中国象棋的棋子是下在 10 条横线与 9 条竖线的交叉点上。国际象棋里的皇后真是“八面威风”的“铁女人”，它不仅像中国象棋的“车”那样，可以吃掉棋盘上与它同一行或同一列的棋子，还可以吃掉同一条对角线上（与棋盘边框成 45°角的斜线）的棋子（见图 1.4）。德国著名数学家、物理学家、天文学家、大地测量学家高斯（Carl Friedrich Gauss）在 1850 年提出这样的问题：“现在有八个皇后，要放到 8×8 的国际象棋的棋盘上，使得她们彼此不受威胁，即没有两个皇后位于同一行、同一列或同一对角线上。问：有几种放法?”图 1.4 给出了其中一个解。

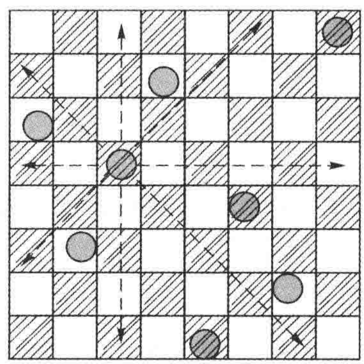

图 1.4 国际象棋盘上“八面威风”的皇后

(5) 环球旅行和货郎担问题

1859 年，英国著名的数学家哈密尔顿（William R. Hamilton）发明了一种名叫**“环球旅行”**的数学游戏，并以 25 个金币的代价把这种游戏卖给了玩具制造商（见图 1.5）。它是一个木刻的实心正 12 面体，每个面都是正五边形，三面交于一个顶点，每个顶点写上世界上一个重要城市的名称。这个数学游戏要求沿

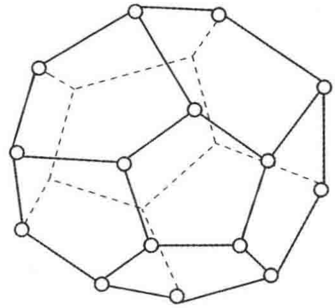

图 1.5　环球旅行游戏

12 面体的边寻找一条线路，通过 20 个城市，作一次环球旅行，并且每个城市只通过一次，最后回到原地。

货郎担问题：一个货郎，要去 n 个村子卖货。假定任何两个村子间均有路直接可通，怎样安排一条路线，使这个货郎从某村出发，通过各个村子恰好一次，最后回到出发点，并使走过的路程最短。注意，这与一笔画的问题不同，点（村子）不能重复。

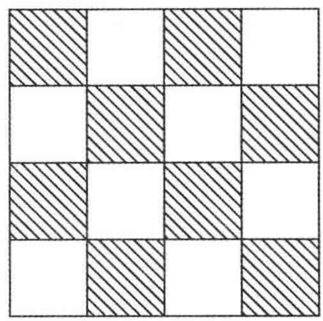

图 1.6　一个 4×4 的棋盘

以上两个问题看起来有点相似，但我们将会看到它们竟然会与**“马能跳遍棋盘的每一格，且仅仅一次吗?”**这样的问题扯上边。这个看起来八竿子都打不到的“马”的问题，详细来说是“在 4×4 的黑白方格棋盘上（见图 1.6），或在这个棋盘上再剪去任意角上一格，从任何一个方格开始，跳动一只马，使其通过棋盘的每一个方格一次，而且仅仅一次，问：是否可能?”（马在国际象棋的棋盘上的跳法与在中国象棋的棋盘上的跳法是一样的：直走一步，再斜走一步。）

(6) 工作分配、循环赛日程安排问题

第二次世界大战期间，欧洲许多沦陷区国家的飞行员到英国皇家空军服役。皇家空军某飞行队有 10 个来自不同国家的驾驶员，每人都会驾驶某种飞机。每架飞机都要配备在航行技能与语言上能互相配合的两名驾驶员，问：应该怎样安排，才能使起飞的飞机最多?

这是一个非常实际且性命攸关的问题。它在图论中是一种把图的顶点“配成对”的匹配问题，所以与图论中一个听上去甜蜜蜜的“婚姻定理”搭上钩。

我们平时都熟悉**循环赛日程安排问题**：有 n 个选手参加循环赛，问：如何安排比赛日程？它也是一个匹配问题。当选手个数为偶数的时候，还是一个“完美”匹配问题，因为没有选手轮空。

(7) 三家三井问题

有三户人家 X_1，X_2，X_3，有三口井 Y_1，Y_2，Y_3，要在每户人家与每口井

之间都修一条路。问：有没有办法使得 9 条路互不相交?

(8) 地图着色问题

我们见到的地图，例如我国分省地图或世界地图都是彩色的。着上颜色的目的主要是为了看起来清楚。当然最好每个国家或地区用一种独特颜色。但实际上无此必要，只要使相邻国家或地区的颜色不同就可以了。注意，两个国家或地区相邻，是指它们有公共的一段边界，在地图上即为两个区域有公共边。而仅有公共顶点的不算相邻。

我们可以考虑这样的问题：任何一张地图（它是平面图），要使相邻国家或地区所着的颜色不同，至少要用几种颜色呢？简单的例子说明，只用三种颜色对一般的平面地图是不够的。1890 年，希伍德证明了“五色定理”：任何一个平面图，都可以用五种颜色来着色，使任何两个相邻的区域有不同的颜色。那么我们自然要问，四种颜色够不够？这就是图论中的著名难题“四色猜想”。其中详情，且看正文分解。

下面几章以及习题中还有很多奇情妙趣的智力测验，它们用来说明图论中的各种概念以及如何把有关的问题巧妙地化为图论问题。

2 什么是图

我们这里要介绍的"图"是什么呢？它既不是我们日常所见的形形色色的图——地图、机械零件图、建筑施工图；也不是几何中各种各样的图形与日常生活中所见的画片。它是一种特定的数学对象。

德国著名哲学家康德（Immanuel Kant）说过"一切人类知识以直观始"，"我们所有的知识都开始于感性，然后进入到知性，最后以理性告终。"而"一个好的实例胜于训诫［著名匈牙利裔美国数学家和数学教育家波利亚（George Pólya)]"，所以在说明本书所介绍的图为何物时，还是让我们先看几个实例吧。

(1) 图的例子

例 2.1 初看《红楼梦》时，你一定会感到人物众多，头绪纷杂。然而，如果你把贾府的人物（为简单起见，只考虑男人）画成如图 2.1 所示的图，就会对贾府人物之间的血统关系一目了然：以点代表人，在有父子关系的两人（两点）之间连一条带箭头的线，从父亲指向儿子。

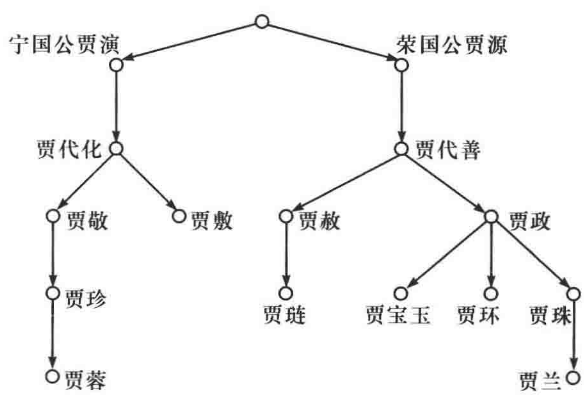

图 2.1 《红楼梦》家谱

例 2.2 假如仍以点代表

人，但两点之间是否连线，视两人是否有直系亲缘关系而定。因直系亲缘关系是相互的，这里的线不带箭头。那么，贾政、王夫人、元春、贾珠、贾宝玉这五个人之间的关系可以用图 2.2 来表示。这个图有一个特点，任何两个点之间都有线相连。这是因为任何两个人之间都有直系亲缘关系：或夫妻，或父子，或母女，或姐弟等等。

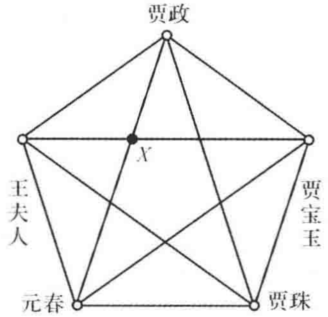

图 2.2　亲缘关系图

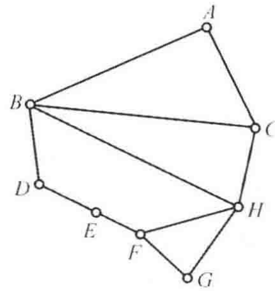

图 2.3　旅行路线

例 2.3　假如你想作一次旅游，从 A 出发，去 B，C，D，E，F，G，H 等城市，再回到 A。则用点表示这几个城市，两城市间可以乘火车、飞机或汽车直达的，就连一条线，见图 2.3。此时你要设计一条每个城市都经过且只经过一次的旅行路线就很容易了。“$A \to B \to D \to E \to F \to G \to H \to C \to A$”就是其中一条路线。

例 2.4　有四位教师：甲、乙、丙、丁，四门课程：数学、物理、化学、政治。若教师甲能教物理课，则在代表教师甲与物理课的两点之间连一条线。图 2.4 就是这样得到的。如果要使每个教师各教一门不同的课，有了图就知道存在不存在这样的分派以及如何分派。这里容易看出：甲教物理、乙教政治、丙教数学、丁教化学（图中粗线所示）就是这样一种安排。

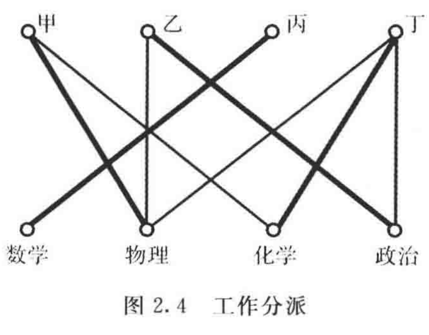

图 2.4　工作分派

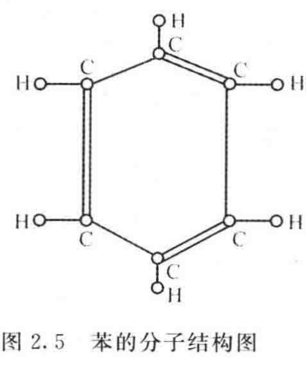

图 2.5　苯的分子结构图

例 2.5　为表示一个化学分子的结构，我们可以用一个点代表一个原子，两个原子之间有几阶化学键，就连几条线。图 2.5 就是碳氢化合物苯的化学分子结构图。

(2) 什么是图

从上面几个例子可以看出，客观世界里的人、事物或现象，如果两两之间有某种关系，称为**二元关系**。如例 2.1 中的父子关系，例 2.2 中的直系亲缘关系，例 2.3 中两个城市之间有无交通可直达的关系，例 2.4 中某教师能否教某课程的关系，例 2.5 中两原子之间的结构关系和有几阶化学键的关系，等等。

当我们要研究这种二元关系，从中找出规律时，可以用点表示人、事物或现象，两点之间用线相连，表示它们之间存在我们要研究的那种关系。这样就可以得到**反映客观实际问题中二元关系的一个数学模型——图。**

简而言之，这里所说的图，就是由一组点和连线所构成的图形。这些点称为图的**顶点**(或**节点**)，而连线则称为**边**。带箭头的边特称为**有向边**。

美国图论学家哈拉里（Frank Harary）有一句名言："千言万语不及一张图"，用图来表示一些客观实际问题，会使问题变得简明、直观和形象化。"因为没有什么东西比图形更容易进入人们的思想"（这里我们把笛卡尔名言中"几何图形"四个字"偷换"成了"图形"）。对图进行研究，等价于对某些问题中二元关系的研究。上面所举的几个例子，若不用图来表示，而改为文字叙述，那么即便有纵横捭阖的口才，仍会令人如堕五里雾中。要注意的是，这里讨论的图与几何图形的不同之处是：几何图形中，点的相对位置与连线的长度都是至关重要的。而图论所关心的只是一个图有多少个顶点以及哪些顶点之间有边相连。至于顶点的位置分布和边的长短曲直，则无关紧要，可以任意描画。只要不改变两顶点间是否有边相连这一本质，我们认为这样任意描画的两个图是一样的，在图论中称这样两个图是**同构**的，因为这样不改变有关二元关系的性质。

例 2.6　图 2.6 与图 2.3 是一样（同构）的图。因为图 2.6 也表达这些城市之间有无交通可直达的关系。

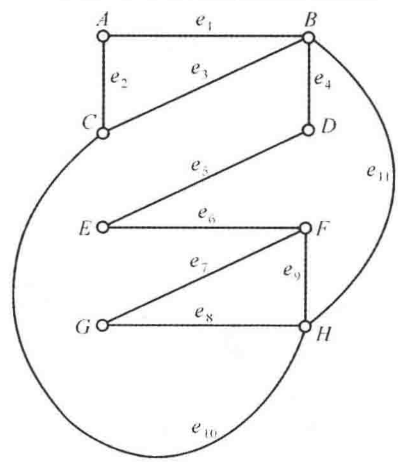

图 2.6　与图 2.3 同构的图

另外，在几何图形中，把边看作是由无数个点组成的；而在图论中，边的唯一作用只是

把两个顶点连结起来，因为它只表示两个顶点所代表的人、事物或现象之间存在某种联系。正因为如此，一个图中任何两条边，我们认为它们只可能在顶点处相遇。在别的地方，它们看作立体交叉。画在平面上时，那些在平面几何中的“交点”，例如图 2.2 的 X，不算是图的顶点。

(3) 网络

我们常说“现在是网络时代”，在计算机领域中，网络是信息传输、接收、共享的虚拟平台，我们通过它把各个点、面、体的信息联系到一起，从而实现这些资源的共享。在数学上，网络是一种图。它也是由节点和连线构成，表示各个对象及其相互联系。网络上的两节点间有无连线（边）除了表示对应的两对象之间是否存在我们感兴趣的二元关系外，每条边还可被赋予一定的数值，称为权数。例如图 2.3（旅行路线）的边可以标上在它所连结的两城市间旅行所花费的时间或旅费等等。一般认为网络专指加权图。

(4) 一些图的名称

本章前面提到的几个图（图 2.1—图 2.5），在图论中都是比较重要而且典型的图。所有边都是有向边的图称为**有向图**，例如图 2.1。所有边都没有方向（不带箭头）的图称为**无向图**。除图 2.1 以外，前面提到的其他的图都是无向图。

另外，图 2.1 又是**有向树**。如果把它的边的方向全去掉，所得图为**无向树**，简称为**树**。你看，它多像一棵倒放的树！后面我们给树下的严格定义为：**树就是一个连通但无圈的图**（详见第 3 章）。

像图 2.2 那样，任何两顶点之间都有边相连的无向图称为**完全图**，或形象化地称它为“家庭”（family）。n 个顶点的完全图记为 K_n。图 2.2 是 K_5——有 5 个“成员”的“家庭”。而一般的非完全图，可以叫作一个“社会”（society），它的顶点之间的关系像社会一样形形色色。

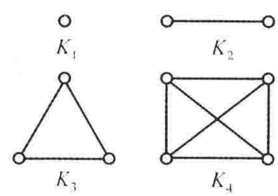

图 2.7 完全图 K_1、K_2、K_3 与 K_4

例 2.7 完全图 K_1 是仅有一个顶点的图，K_2 是有 2 个顶点以及连结它们的一条边的图，K_3 是连结 3 个顶点的三角形，K_4 则是连结 4 个顶点的四边形及其 2 条对角线（见图 2.7）。

两个顶点之间最多只有一条边相连的无向图称为**简单图**。图 1.2 与图 2.5 不是简单图，图 1.2 有两对顶点之间有两条边，而图 2.5 有三对顶点之间有两条边。图 2.2、2.3、2.4 都是简单图。

图 2.4 的顶点可分为 X 与 Y 两部分，X 是代表教师的四个点，Y 是代表课程的四个点。同属于 X 或同属于 Y 的任何两个顶点间（教师与教师之间、课程与课程之间）均无边相连。这种图叫**二部图，或二分图、偶图**。

原图的部分顶点及原图中连结这些顶点的全部边或部分边构成的图称为原图的一个**子图**。也就是说，子图是原图删去一些边（可以是全部边）以及，或删去一些顶点（可以是全部顶点）后，由剩余的顶点与边构成的图。删去一个顶点必须删去与该顶点连结的所有边，因为删去一个顶点，就是不考虑该顶点所代表的对象，当然就不必考虑与该对象的二元关系（与它相连的边）。注意，删去全部顶点后，就成为没有顶点，当然也就没有边的“图”，这样的图称为**空图**。引进空图的概念能给一些定义与定理的叙述带来方便。空图是任何图的子图。

例 2.8　图 2.3 中的$\triangle ABC$，或它的顶点 A，B，C 及边 AB，AC 构成的图都是原图的子图。

例 2.9　任何 n 个（$n\geqslant 0$）顶点的完全图 K_n 是（$n+1$）个顶点的完全图 K_{n+1} 的子图。因为 K_{n+1} 去掉任何一个顶点（记为 A）及其 n 条边后，剩下的 n 个顶点中任何一个都与其余 $n-1$ 个顶点（不包括 A）都有边相连，这个子图就是 K_n。例如图 2.7 中 K_4 去掉任一顶点以及与它相连的三条边后是子图 K_3，即连结 3 个顶点的三角形。

（5）图论发展简史

图论的最早研究，可以追溯到瑞士数学家欧拉（E. Euler）在 1736 年发表的讨论“七桥难题”（见上一章智力游戏（3），详见后面第 6 章）的论文。早期的一些与图论有关的研究，几乎都像“七桥难题”一样，与有趣的智力游戏有关。例如 1859 年英国数学家哈密尔顿发明的“环球旅行”（见上一章智力游戏（5），详见后面第 9 章），就是后来图论中“哈密尔顿问题”与“货郎担问题”的起源。这类问题是思想的体操，很能推动人们去思索。它们的解法，常常是机智巧妙，引人入胜。

德国物理学家克希荷夫（Gustay Kirchoff）为求解电网络方程，在 1847 年发表了关于树的第一篇论文，这是图论发展的重要标志。现代电网络的拓扑分析方法就是在他开创的方法基础上发展起来的。

英国数学家凯莱（Arthur Cayley）在 1857 年利用树的概念研究有机化合物的分子结构。1878 年，凯莱的一位朋友雪尔佛斯脱（J. Sylvester）在英国《自然》杂志上发表一篇论文，首次正式使用“图”这个名词。

英国人古思里（Francis Guthrie）在 1852 年提出著名的四色猜想：任何一

张平面地图，都可以用四种颜色来染色，使得任何相邻的地区所染的颜色不同（见上一章智力游戏（8），详见后面第 11 章）。此后一百多年，一代接一代的数学家，都致力于四色猜想的研究。

一般认为，系统地研究图的性质的第一人是匈牙利数学家哥尼格（D. König）。他在 1936 年发表了第一本图论专著《有限图与无限图的理论》。从 1736 年欧拉发表讨论“七桥难题”的论文到 1936 年哥尼格的专著出版，这前后二百年标志着图论发展的漫长历程。

20 世纪以来，在电子计算机蓬勃发展的大力推动下，图论作为组合数学的一个分支，新军突起，异常活跃。过去的趣味数学，也被赋予新的严肃的科学目的。今天，图论已在运筹学、电路网络、计算机科学、开关理论、编码理论、计算机辅助设计，甚至化学、社会学等许多领域得到日益广泛的应用，并且成效卓著。在读者对图论有了清晰的轮廓以后，我们会在最后一章再作简单的回顾。

本节的最后，我们用一个智力测验题来说明，如何把一些二元关系的问题巧妙地化为图论问题来解。

例 2.10 《美国数学月刊》上登载过这样一道智力测验题：任何六个人的集会上，以下两种情况至少有一种必然发生：或有三个人彼此认识，或有三个人彼此不认识。

解： 它不是代数题，也不是几何题。仔细分析，它是讨论两人认识不认识的关系，也就是二元关系，所以可以归结为图论问题。按照前面对图的定义，一个图只表示一种二元关系，所以需要画两个图。都用顶点代表人，第一个图中，两人认识的连一条边；而第二个图中，两人不认识的才连一条边。我们在图的概念上，再加一个“染色”的概念，就可以把两个图画在一起。

以六个顶点代表六个人，两人互相认识的，在相应的两顶点间连一条红色边（图 2.8 中以实线表示），两人互不认识的，连一条蓝色边（以虚线表示）。由于两个顶点之间不是以红色边相连，就是以蓝色边相连，所以全部红、蓝边一起构成一个完全图 K_6。若有三个人彼此认识，则图中应该出现一个红边三角形；若有三个人彼此不认识，则图中应该出现一个蓝边三角形。因此，原问题就化为下列问题：

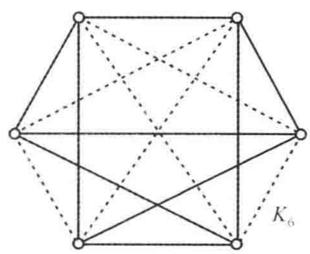

图 2.8　Ramsey 问题的染色图

完全图 K_6 的任一边染成红色或蓝色之一，则其中必出现一个红边三角形（K_3 子图）或一个蓝边三角形（K_3 子图）。

图 2.8 中出现两个蓝边三角形。读者自己可以画画试试。上述结论可以严格证明如下。

证明：从六个顶点中任何一个 A 开始考虑（见图 2.9），有五条边以 A 为一个端点。这五条边中至少有三条边染同样的颜色（反证：如果染每种颜色的边都不超过 2，则总边数不超过 4，矛盾），不妨设为红色（如果是三条蓝色边，也可类似证明）。这三条红色边的另一端记为 B、C、D。现在考察△BCD（即这 3 个顶点的子图 K_3），若它三边全染为蓝色，则已证得图中有一个蓝边三角形。否则，它总有一边为红色。若边 DC 为红色，则△ACD 就是一个红边三角形；若其他两边中 BD 或 CB 为红色，同样图中出现红边三角形 ABD 或 ABC。

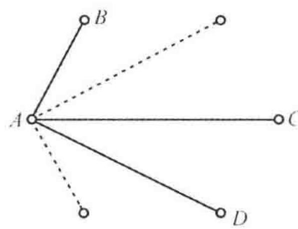

图 2.9　Ramsey 问题的证明

类似的智力游戏题还有：

“在 10 个人集会时，必有三个人彼此认识，或四个人彼此不认识。”

“在 20 个人集会时，必有四个人彼此认识，或四个人彼此不认识。”

现在，你一定会把它们“翻译”成图论的问题。这一类问题在图论中称为拉姆齐问题。它们是由年轻的英国数学家、哲学家兼经济学家拉姆齐（F. P. Ramsey，1903—1930）首先研究的。可惜他宏才远志，厄于短年，1930 年去世时，还不到 27 岁。

第 2 章习题

习题 2.1　证明：在 10 个人集会时，必有三个人彼此认识，或四个人彼此不认识。（本题可以在读完这本小册子后再做）

提示：问题化为“完全图 K_{10} 的任一边染成红色或蓝色之一，则其中必出现一个红边三角形（K_3 子图）或一个蓝边 K_4 子图。”

从 10 个顶点中的任何一个顶点 A 开始考虑，从它出发的 9 条边中分“（1）至少 6 条边为蓝色”或“（2）少于 6 条边为蓝色”两种不同情况讨论。情况（1）：考察这 6 条蓝色边另一端点 B、C、D、E、F、G 为顶点所构成的完全子图 K_6。按照例 2.10 的结论，其中必定出现一个红边三角形或一个蓝边三角形，从而得证。情况（2）：考察有 4 条红色边的另一端点所构成的完全子图 K_4。分“它的所有 6 条边全为蓝色”或“至少有一边为红色”来证明。