H^p 空间理论

苏兆龙　邢富冲
郑更新　何希盛　合译
沈燮昌　审校

南京工学院出版社

H^p 空间理论

苏兆龙 邢富冲
郑更新 何希盛 合译
沈燮昌 审校

南京工学院出版社

内容提要

H^p空间理论不仅是函数论、逼近论和调和分析等数学分支的基础之一，而且对概率论、计算数学、应用数学、理论物理学也是必不可少的基础内容。本书对这一理论既讨论了早期成果，又阐述了最新发展，在叙述上深入浅出，言简意赅，层次分明，并以现代观点贯穿全书。本书适用于以上各方向的高年级本科生、研究生作选修课教科书，也可供专门研究者参考之用。

本书责任编辑　周　惠

H^p 空 间 理 论

苏兆龙　邢富冲　郑更新　何希盛　译

沈燮昌　校

南京工学院出版社

南京四牌楼二号

江苏省新华书店发行　通信工程学院印刷厂印刷

开本787×1092毫米32/1　印张11.375　字数265千字

1987年11月　第1版　1987年11月第1次印刷

印数1—2500　册

ISBN7－81023－062(x)/O.62

统一书号：13409·020　定价：1.90

中 译 本 序

杜伦

美国Michigan大学数学系Peter L.Duren教授所著的《H^p空间理论》一书是一本难得的、很有价值的好书。该书不仅追溯了H^p空间理论发展早期的那些出色的成果(如Hardy、Littlewood等数学家的早期工作),而且还系统地论述了H^p空间理论近代发表的一些重要结果。该书在叙述上深入浅出、言简意赅,并以现代观点贯穿全书,极富有启发性。此外,作者还时刻注意所述内容易于让学生理解,这就使得,无论是对H^p空间理论的初学者还是已有一定了解的专门研究人员,都能从该书中得到教益。

当前,H^p空间理论不仅是函数论、逼近论、调和分析等数学分支的基础内容之一,而且,对于概率论、计算数学和应用数学等许多其它方向,也都是必不可少的基础内容。因而《H^p空间理论》这本书对于数学系和应用数学系高年级的本科生及许多方向的研究生都是很宝贵的资料。

我的学生苏兆龙、邢富冲与郑更新、何希盛一起,仔细研读了《H^p空间理论》一书,并将该书译成中文出版,以飨读者。我对全书作了校审,深感译者的工作十分严谨,同时深信这个中译本一定会对我国函数论、函数逼近论、调和分析及一些应用数学学科的普及和发展起到推进作用。

沈燮昌

1985年 5月于北京大学

原　　序

H^p空间理论最初是在四、五十年以前，由G.H.Hardy, J.E.Littlewood, I.I.Privalov, F.Riesz, M.Riesz, G.Szego等数学家所提出的。他们早期的大部分工作着重于研究H^p类中具体函数的性质，因而从本质上来看可以说是经典的。近年来，由于泛函分析的发展，激发了人们把H^p类函数作为线性空间来进行研究的新的兴趣。这种观点提出了许多自然的问题，提供了新的处理方法，导致了H^p空间理论的重要进展。

本书叙述了H^p空间理论经典的和现代的状况，既讨论了这一理论的早期成果(例如Hardy和Littlewood的工作)，也阐述了这一理论的最新发展(这种阐述在本书中是自成体系的)，例如，关于不变子空间的Beurling定理、Macintyre-Rogosinski-shapiro-Havinson的有关极值问题的理论、插值理论、当$p<1$时H^p空间的对偶空间结构理论、在一般区域上的H^p空间以及日冕定理的Carleson证明等等。有一些较古老的结果将用现代的方法加以证明。事实上，本书的显著特点是将“硬”分析与“软”分析相互作用在一起，亦即经典及现代的技巧和观点的结合。

本书适用于科研人员、研究生以及刚刚开始接触这个课题的数学家。阅读本书所需的预备知识只是实分析和复分析的基础知识，包括Lebesgue积分和泛函分析初步。例如，若能掌握Ahlfors或Titchmarsh、Natanson或Royden、Goffman、Pedrick这几本书的内容就足够了(见本书参考书目)。特别是在最后几章中，我们在结合讨论一些最近的结果时，就会给出适当的参考文献。本书基本上是自成体系的，它可以作为二、三年级研

究生课程的教材使用。事实上本书是作者于1964年和1966年在Michigan 大学讲授这门课程时所编讲义的基础上改写而成的，而且在编写过程中充分注意了学生的可接受性。

另一方面，本书的某些章节(例如第 4、6、7、9、10、12章的部分内容)是相当专门化的，因为这主要是为研究人员安排的。这些论题的大部分内容，还是第一次以书本的形式出现。特别应该指出，本书最后一章有关“曰冕定理”的完整证明系专供“成熟者”阅读的。

本书各章均附习题，有容易的，也有较复杂的，少数习题难度较高，题后常附有参考文献可供查阅。不少习题还指出了H^p空间理论可以被推广和应用的一些方向。在本书各章末尾的“说明”中，也进一步地指出了这种方向，同时还给出了一些关于历史方面的附注和参考文献。在本书两个附录中，给出了数学家通常不那么熟悉的一些背景材料。

使用本书可以不必严格按照章节次序进行。例如，第8章和第 9 章仅依赖于前三章(还可作某些取舍)和第 7 章的前两节；又如，第12章可以在第 8 章、第 9 章后面直接阅读。

本书的覆盖面相当宽，但是也有一些可能应该介绍的专题仅在“说明”中提到，或者甚至完全没有被提到。显然我自己的兴趣左右了材料的选取。

这里，我要对曾为本书初稿提出过不少宝贵意见和批评的朋友、学生和同仁们深表谢意。特别要感谢J.Caughran, W. J. Duren, F. W. Gehring, W. K. Hayman, J. Hesse, H.J.Landau, A.Macdonald, B. Muckenhoupt, P. Rosenthal, W.Rudin, J.V.Ruff, D.Savason, H.S.Shapiro, A.L.Shields, B.A.Taylor, G.D.Taylor, G.Weiss, A.Zygmund，同时我也非常感谢我的妻子Gay，因为她认真地为本书作了索引和细心

地校对了全书。也非常感谢Renate McLanghlin对本书的校对。

另外我还要感谢Alfred P.Sloan基金会的支持，因为我在1964～1965学年写本书第一稿时，他们为我能在伦敦大学的帝国学院和巴黎大学的中央学院渡过这一年提供了方便。这本书某些内容得以充实正是我在这几个学院中的教学实践的结果。在1968～1969年，当我离开Michigan大学而在现代研究学院渡休假年时，我又增添了一些章节，并作了最后的修订。我还感谢国家科学基金会在此期间对我的支持。

Peter L.Duren

原作者为中译本写的序

本书于1970年出版以来，H^p空间理论在许多方面已有了重要的发展。C.Fefferman和E.M.Stein在1971年前后发表了几篇重要的论文后，使人们注意到把有界平均振幅函数（BMO空间）作为H^1空间的对偶空间来处理。此外在这些论文中，当把这个理论推广到多变量时，他们论证了BMO空间与Carleson测度和共轭函数算子之间的本质性联系。J.P.Earl在1970年给出了一般插值定理的一个构造性的证明。D.Burkholder、R.Gundy和M.Silverstein在1971年利用概率论的方法（Brown运动）对$0<p<1$的情况得到了关于非切向（角度）极大函数和共轭函数的一个基本的结果。大约从1974年开始，B.Davis应用Brown运动证明了几个具有最佳常数的共轭函数不等式。C.Horowitz在1974年得到了关于Bergman空间(或称为“面积H^p空间”)中的函数零点的一些基本结果。T.Wolff在1979年得到了日冕定理的一个初等而精辟的证明，因而就可以避免象本书第12章中所作的那种相当困难的Carleson构造的描述。B.Muckenhopt描述了关于共轭函数算子(Hilbert变换)的“良权”，并且最后与R.Hunt和R.Wheeden(1973)共同发现了，这些权也是Hardy-Littlewood极大算子的良权。上述这些发展以及其它一些进展，包括Wolff未曾发表过的著作，都在P.Koosis所著的《H^p空间引论》(剑桥大学出版，1980)以及J.B.Garnett所著的《有界解析函数》(学会出版，1981)这些专著中有所阐述。

我非常感谢本书的译者为把本书介绍给中国数学界同仁所作的努力。我们可以期望，这个中译本的出版将会促进H^p空

间理论及其相关学科在中国得到进一步的发展，并且为数学家们和希望将这些结果应用到其它领域去的物理学家们提供一本适当的参考资料。我在西安西北大学讲学时，有幸遇到了译者之一何希盛先生，并且和他讨论了翻译本书的计划。虽然我读不懂中文，但是我非常信赖他们译本的正确性。

英文版的读者曾诚恳地指出了本书中的几个小错误，这些都在中译本中得到了纠正。

Peter.L.Duren

1984年7月于中国西安

译 后 记

当我们于1979—1980年间在北京大学研究生班二年级学习时，沈燮昌教授给我们开设了“H^p空间理论”这门课程。当时沈先生指定了这本由**Peter.L.Duren**教授所著的“Theory of H^p Space”作为主要参考书。在聆听沈先生讲授的过程中，我们通读了全书，发现此书确实是一本在H^p空间理论方面不可多得的著作。它的优点在于：（1） 内容全面，既有经典的又有近代的结果，而以近代的观点通贯全局，以近代的方法处理全书；（2） 起点较低，层次分明，兼顾了不同的面，它既可作为研究生的教材，也可供数学系高年级本科生阅读。诚然，当我们工作了若干年后再读此书时，又得到了不少新的体会。

基于上述原因，我们于学习期间就萌发了把此书译成中文的念头。在1981年秋毕业之后，苏兆龙、邢富冲就开始了本书的翻译工作，随后郑更新、何希盛同志也加入了此项工作，于1983年春完成初稿。初稿译成又几经修改，方才定稿。

在阅读和翻译本书时，我们体会到本书大体上可分为如下三个层次：

第一个层次含：第一章（除§1.6）、第二章、第三章、§4.1、§5.1至§5.3、§6.1和§6.2、§10.1至§10.4及第十一章(不含最后一节)。这些可供高年级本科生阅读，是作为学习这一理论的入门。

第三个层次含：§4.5和§4.6、§7.4和§7.5、§9.5、§10.5、§11.5及第十二章。这些可供有一定数学修养并准备在这个方面作深入研究的专家进行阅读。

其余部分都属于第二个层次。这一部分对于那些在H^p空间理论的基本概念方面已经熟悉，并希望获得此理论的进一步知识的读者来说是颇为有用的，特别对函数论专业的研究生，是一本合适的教材。

在本书的翻译过程中，自始至终都得到了沈燮昌教授的关心和指导，此外，我们还得到本书作者Peter.L.Duren教授给予的很大帮助，他特地为中译本写了序言。在此我们谨向这两位教授表示诚挚的感谢。在翻译过程中得到了工程兵工程学院秦国强副教授的许多指导和帮助，在此表示感谢。

在本书的出版过程中，得到了通信工程学院教材处以及中央民族学院、山西师范学院有关方面的大力支持。南京工学院出版社的同志为本书能和读者早日见面作了大量的工作，在此一并表示感谢。特别要指出的是本书的责任编辑周惠同志，她的卓有成效的工作使本书增色不少。

译　者

1984年12月

目　　录

第一章 调和函数与次调和函数

本章中，我们首先讨论单位圆内某些调和函数类的经典表示定理，以及关于边界性质的一些基本结果。然后对次调和函数作一简单讨论。这两个专题都是H^p空间理论的基础。特别是，利用次调和函数就可以很简单地得到Hardy凸性定理和Littlewood从属性定理，这些将在§1.4和§1.5中给出。最后，应用Hardy—Littlewood极大定理(它的证明在附录B中)建立了关于解析函数的一个重要的极大定理。

§1.1 调和函数

许多分析问题的中心是研究那些在边界附近的增长受到某种限制的解析函数。对在圆内解析的函数，积分平均值

$$M_p(r, f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p}$$

$$(0<p<\infty)$$

$$M_\infty(r, f)=\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|$$

给出了增长的一种度量，并且可由之导出一种具有广泛应用的内容特别丰富的理论。我们称一个在单位圆$|z|<1$内解析的函数$f(z)$属于H^p类($0<p\leqslant\infty$)，如果当$r\to 1$时$M_p(r, f)$保持有界，这样H^∞类就是圆内有界解析函数类，而H^2类是由满足条件$\Sigma|a_n|^2<\infty$的幂级数$\Sigma a_n z^n$所组成的函数类。

同样可以方便地引入类似的调和函数类。我们称一个在 $|z|<1$ 内调和的实值函数 $u(z)$ 属于 h^p 类（$0<p\leqslant+\infty$），如果 $M_p(r, u)$ 是有界的话。因为在 $0<p<\infty$、$a\geqslant0$、$b\geqslant0$ 时我们有

$$a^p\leqslant(a+b)^p\leqslant2^p(a^p+b^p)$$

所以一个解析函数属于 H^p 类的充要条件是它的实部和虚部都属于 h^p 类。这个不等式还说明了 H^p 类和 h^p 类都是线性空间。显然，如果 $0<p<q\leqslant\infty$，则 $H^p\supset H^q$。对于 h^p 空间也有类似的结论。

任何一个在 $|z|<1$ 内调和、在 $|z|\leqslant1$ 上连续的实值函数 $u(z)$ 都可以由它的边界函数通过Poisson积分来表示

$$u(z)=u(re^{i\theta})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r, \theta-t)u(e^{it})\mathrm{d}t \tag{1}$$

其中

$$P(r, \theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

是 Poisson 核。在积分（1）式中用任意一个满足 $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$ 条件的连续函数 $\varphi(t)$ 来代替 $u(e^{it})$，所得的函数 $u(z)$ 仍然在 $|z|<1$ 内调和、在 $|z|\leqslant1$ 上连续，并且有边界值 $u(e^{it})=\varphi(t)$。推广上述思想，我们可以得到Poisson-Stieltjes积分的概念。这是一个形如

$$u(z)=u(re^{i\theta})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r, \theta-t)\mathrm{d}\mu(t) \tag{2}$$