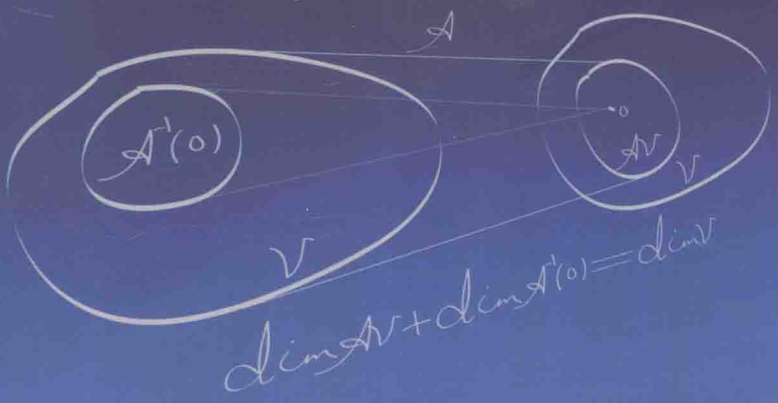
# 高等代数

# Advanced Algebra

葛志宏 居腾霞 编




科学出版社

# 高等代数

葛志宏　居腾霞　编

科学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书主要介绍了高等代数的一些最常见并且最基本的理论和方法, 主要内容包括一元多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、$\lambda$-矩阵和欧氏空间. 本书在注重基本理论和方法的同时, 尤其强调矩阵初等变换的应用, 精选了一定数量的基本练习题和总复习题, 后者可供考研学生复习使用. 本书起点低, 便于读者自学.

本书可供普通高等学校数学类各专业本科生参考, 也可以作为教师的教学参考书以及考研学生的复习用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

高等代数/葛志宏, 居腾霞编. —北京: 科学出版社, 2016.6

ISBN 978-7-03-048129-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①葛… ②居… Ⅲ. ①高等代数 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 090136 号

责任编辑: 罗 吉 许 蕾 孙 静 / 责任校对: 杜子昂

责任印制:张 伟 / 封面设计: 许 瑞 葛志宏

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 6 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2016 年 6 月第一次印刷 印张: 22 3/4

字数: 460 000

**定价: 49.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前　言

高等代数是数学类各专业必修的基础课程, 其线性代数部分也已成为高等学校理工、经管等学科本科生的一门重要的数学基础课程. 随着信息与计算机技术的飞速发展, 高等代数中许多内容, 如矩阵、线性方程组、多项式等如同微积分一样应用于科学、技术、工程、经济等众多领域, 该课程的重要性不言而喻. 编者在教学中不断发现, 一些入学不久的初学者便对高等代数产生畏惧感, 感觉该课程较为抽象, 对所学概念及其之间的相互关系很难做到融会贯通. 为了有效帮助初学者克服学习中的困难, 编者凭借多年来积累的一点教学经验, 通过适当调整教学内容、增加对一些概念的注释、详解基础训练的例题、增添一些阅读材料等方法编写了本书, 希望能够对初学者理解和掌握高等代数的基本内容有所帮助.

本书是在编者多年从事高等代数教学的基础上, 又经过两轮试用的讲义改编而成的, 它比较适合于全国普通高等学校数学类各专业的学生, 它的特点如下.

(1) 与国内常见的一些教材不同, 不把高等代数中一些最重要的概念与内容自成体系单独介绍, 而是将它们混合起来. 例如, 在讲授行列式前就介绍了矩阵的概念, 指出行列式是“矩阵的行列式”, 它是方阵集合到所在域的映射; 向量空间与线性方程组合在一起讲授, 自然将齐次线性方程组的解集看作子空间, 有利于学生理解齐次线性方程组的解的结构定理. 我们认为这些基本概念的融合有利于学生理解与综合运用这些知识处理问题.

(2) 对一些学生易于误解的结论与内容, 教材中做了一定的解释. 例如, 一子空间的直和补未必唯一, 教材中给出反例加以说明. 对某些计算过程教材给出了详细描述, 如一元多项式的带余除法, 教材给出竖式的计算过程, 接中学课程的地气, 便于学生真正掌握.

(3) 教材的针对性比较明确, 即面向普通高等学校的数学专业的本科生(含二本招生的院校), 为将高等代数的基本内容讲深讲透, 而一些较深的内容放在阅读材料中, 供有能力的学生自学, 并不要求所有的学生掌握. 教材提供了很多阅读材料, 这些阅读材料有的能拓宽学习者的视野, 有的能提高学生学习的积极性, 有的能帮助读者进一步理解正文中的相关内容.

(4) 教材中列举较多数量的(甚至很几何直观的)例子及解答过程, 每节后都配有习题, 每章结束后有总习题, 从简到难, 使得学生有较多的练习机会, 做到有利于学生自学、掌握、巩固和思考. 同时, 一些例题还为学生课后作业提供了方法.

本书第 1～4 章由居腾霞老师编写, 第 5～9 章以及有关附录、习题和部分习题

参考答案或提示等由葛志宏老师编写,最后由葛志宏老师负责统稿,王林峰老师、李洵老师负责审阅,编写过程中,还听取了同事涂文彪老师的许多中肯的建议和意见.

最后,在即将付梓之际,为了保证书稿的质量,主编还麻烦全国教学名师——游宏教授审阅了本书,他为本书提出了许多弥足珍贵的意见和建议,谨此向游宏教授表示由衷感谢!

编者还应感谢卢柏良老师的联系和科学出版社编辑许蕾、孙静老师以及南通大学教务处、理学院等部门有关领导,没有他们的大力支持和热心帮助,本书难以与读者见面.

由于编者水平有限,不足之处在所难免,恳望读者批评指正.

编 者

2016 年 2 月

# 目　录

# 第 1 章　一元多项式

一般认为，高等代数主要包括多项式代数与线性代数，而其中多项式代数自身有着相对的独立性和一套完整的理论，同时也为今后准确理解抽象的线性空间概念提供了很好的原型. 因此，认真学好多项式代数这部分内容，对于读者今后的进一步学习有着重要的意义.

## 1.1　数环与数域

众所周知，**数**是数学中最基本的研究对象，**集合**（今后简称**集**）则是现代数学研究的基础. 顾名思义，**数集**就是由一些数构成的集，它理所当然是数学的重要研究对象之一，但是，随着学习的不断深入，我们会发现，研究对象不再限于数集，而是更广泛、更抽象的一些集合. 例如，多项式的集合、向量的集合、矩阵的集合等. 本节，我们主要谈谈数集，并在此基础上给出数环与数域等代数基本概念. 先看看数集的例子.

例如，方程 $x^2=-1$ 的实数解不存在，亦或者说在实数范围内它的解集不含任何元素，像这样不含任何元素的集合称为**空集**，用 $\varnothing$ 表示；又例如，方程 $x^2=1$ 的解集可以记作 $\{-1,1\}$，它就是由 $-1$ 和 $1$ 这两个数构成的数集.

比较常见的数集有：

**全体整数集**，用 $\mathbb{Z}$ 表示，即 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n,\cdots\}$.

**全体非负整数集**或者说**全体自然数集**（注：现在普遍都把常数 0 也算作自然数），用 $\mathbb{N}$ 表示，即 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

**全体正整数集**（注：这是过去的自然数集），用 $\mathbb{N}^+$ 表示，即 $\mathbb{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

另外，还分别用 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 表示**全体有理数集**、**全体实数集**、**全体复数集**. $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 是今后常用的数集.

有趣的是，数集 $\{-1,1\}$ 关于乘法运算是封闭的. 一般地，我们给出如下定义.

**定义 1.1.1**　设 $P$ 是一给定集，且 $P\neq\varnothing$，“$\cdot$”是 $P$ 中任意两个元素（可以相同）之间的一种二元运算：对于 $a,b\in P$，将其运算结果记作 $a\cdot b$. 如果非空集 $P$ 满足：对于任意 $a,b\in P$，都有 $a\cdot b\in P$，那么，**称集 $P$ 关于运算“$\cdot$”是封闭的**.

读者注意，这里定义**一个集合关于某个运算封闭**，既没有要求这个集合一定是数集，也没有要求运算一定是乘法. 换句话说，集合可以是其他任意抽象集合，运算也可以是其他任意规定的运算.

不难看出，数集 $\{-1,1\}$ 关于乘法运算就是封闭的，实际上，它关于除法运算也

是封闭的. 但是, 数集 $\{-1,1\}$ 关于加法运算不封闭, 因为 $(-1)+1=0\notin\{-1,1\}$.

显然, $\mathbb{Z}$ 关于加法、减法、乘法三种运算都是封闭的, 而 $\mathbb{N},\mathbb{N}^+$ 仅仅关于加法与乘法封闭.

又显然, $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 关于加法、减法、乘法、除法(除数不为零)四种运算都是封闭的. 由此, 读者看到, 有些数集能够做到关于加法、减法、乘法、除法(除数不为零)四种运算都封闭, 而有些数集仅能做到关于加法、减法、乘法三种运算封闭, 甚至还有的数集仅仅关于加法、乘法两种运算封闭. 为此, 给出如下数环和数域的概念.

**定义 1.1.2** 设 $P$ 是由**一些复数**组成的**非空数集**, 即设 $P\subset\mathbb{C}$, 且 $P\neq\varnothing$, 如果 $P$ 关于通常的加法、减法、乘法三个运算是封闭的, 那么, 称 $P$ 为一个**数环**; 进一步, 如果 $P$ 还一定含有**非零复数**(确保可以作除法), 即存在 $c\in P$, 且 $c\neq 0$, 并且 $P$ 关于通常的加法、减法、乘法、除法(除数不为零)四则运算是封闭的, 那么, 称 $P$ 为一个**数域**.

显然, 数环中必然包含数 0, 进一步, 数域中必然包含数 0 与 1.(想一想, 为什么?)又显然, $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是数域, 今后分别称为**有理数域**、**实数域**、**复数域**. $\mathbb{Z}$ 不是数域, 因为 $\mathbb{Z}$ 关于除法运算不封闭, 不过, 由于 $\mathbb{Z}$ 关于加法、减法、乘法三个运算是封闭的, 因此, $\mathbb{Z}$ 是一个数环, 称为**整数环**.

在整个高等代数研究中, 数域(尤其是 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$)是基本的也是常用的概念, 关于数域, 不难证明以下定理.

**定理 1.1.1** 任意数域 $P$ 都包含有理数域 $\mathbb{Q}$ 作为它的一部分, 即总有 $\mathbb{Q}\subset P$.

数域的例子绝不仅限于上述三个常用数域 $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$. 例如, 读者不难验证, 所有形如 $a+b\sqrt{2}$ (其中 $a,b\in\mathbb{Q}$ 是任意有理数)的数所构成的数集, 记作 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 即 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid\forall a,b\in\mathbb{Q}\}$ 也是一个数域(见习题 1.1 5 题).

今后, 在高等代数问题讨论中, 如果不必明确具体数域, 通常用符号 $P$ 泛指一个不特别指定的数域. 并且, 按数域定义, 我们所考虑的任一数域 $P$ 总是复数域 $\mathbb{C}$ 的一部分(子域), 当然最大(小)情况下可等于 $\mathbb{C}(\mathbb{Q})$.

## 习 题 1.1

1. 按定义 1.1.2, 验证仅含一个整数 0 的非空数集 $P=\{0\}$ 构成一个数环.

2. 取定自然数 $m\in\mathbb{N}$, $P=\{nm\mid\forall n\in\mathbb{Z}\}$, 证明: $P$ 构成一个数环.

3. 证明: 全体偶数集合关于通常加法、减法、乘法构成一个数环. 问: 全体奇数集合关于通常加法、减法、乘法是否构成一个数环, 为什么?

4. 证明: $\mathbb{Z}(\mathrm{i})=\{a+b\mathrm{i}\mid\mathrm{i}=\sqrt{-1},\forall a,b\in\mathbb{Z}\}$ 构成一个数环, 俗称**高斯整数环**.

5. 证明: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid\forall a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域, 同理可证, 对于任意素数 $p\in\mathbb{N}^+$, $\mathbb{Q}(\sqrt{p})=\{a+b\sqrt{p}\mid\forall a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域.

6. 设 $P(\subset\mathbb{C})$ 是一个含有非零复数的数集, 并且满足: ① $\forall a,b\in P$, 有 $a-b\in P$; ② $\forall a,b\in P$, $b\neq 0$, 有 $\dfrac{a}{b}\in P$, 证明: $P$ 是一个数域.

7. 证明: 任一数域 $P$ 都包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

## 1.2　一元多项式及其运算

**声明**　从本节开始, 包括今后的很多情况下, 除非特别说明, 我们均按照 1.1 节约定, 假设 $P$ 是一个不特别指定的数域, 而把讨论对象放在数域 $P$ 中考虑.

**定义 1.2.1**　设 $P$ 是一个数域, $n\in\mathbb{N}$, $x$ 是一个“文字”或“符号”(又称“不定元”, 也简称“元”), 则把表达式:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \tag{1.2.1}$$

称为**系数在数域 $P$ 中的一元多项式**, 简称为**数域 $P$ 上的一元多项式**, 而 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$ 称为多项式(1.2.1)的**系数**. 今后常用 $f(x),g(x),\cdots$, 或更简单地用 $f,g,\cdots$ 来表示多项式.

在式(1.2.1)中, $a_ix^i$ 称为 $i$ **次项**, $a_i$ 称为 $i$ **次项系数**, 按理说, $a_0$ 称为**零次项系数**, 但通常把 $a_0$ 称为**常数项**. 系数(包括常数项)全为零的多项式称为**零多项式**, 记作 0. 并且它就是数域 $P$ 中的数 0. 如果 $a_n\neq 0$, 那么 $a_nx^n$ 称为多项式(1.2.1)的**首项**, $a_n$ 称为**首项系数**, $n$ 称为多项式(1.2.1)的**次数**. 非零多项式 $f(x)$ 的次数通常记作 $\partial(f(x))$, 简记作 $\partial(f)$.

按照上述定义, 零多项式是没有首项的, 因此, 首项系数、次数等概念对于**零多项式**而言均无意义.

例如, $\partial(x^2-1)=2$, $x^2-1$ 的首项为 $x^2$, 首项系数为 1.

又例如, 设 $f(x)=ax^2-2x+b$, 则当 $a\neq 0$ 时, $\partial(f(x))=2$, $f(x)$ 的首项为 $ax^2$, $f(x)$的首项系数为 $a$; 而当 $a$=0 时, $\partial(f(x))=1$, $f$ 的首项为 $-2x$, $f(x)$的首项系数为–2.

数域 $P$ 中任一非零常数 $a_0$ (也应当看成)是一个多项式, 并且这个多项式是零次的, 换句话说, 任一非零常数就是一个**零次多项式**(读者必须注意它与零多项式的区别).

为了方便, 常用 $P[x]$ 表示数域 $P$ 上全体一元多项式构成的集合, 这样, 符号语言: “$f(x),g(x)\in P[x]$”的含义不指自明. 显然有 $0\in P[x]$, $P\subset P[x]$, 实际上, 可以认为数域 $P$ 恰好是由零多项式与所有零次多项式构成的, 即 $P=\{0\}\cup(P-\{0\})$.

有必要强调一下, 我们所定义的多项式是文字或符号“$x$”的**形式表达式**. 这里所强调的“形式”当然是针对具体“内容”而言的, 我们会发现, 随着学习的不断深入, 将文字或符号“$x$”可以但绝不限于只取某个数集中的数, 在高等代数里, 还将用其他各种具体的内容(例如, 矩阵、线性变换等)去替代“$x$”的位置, 得到具体含义的多项式. 正因为这样, 才使得关于形式多项式的研究以及相关结论更具有普遍意义和价值.

利用**连加号**(也称**求和号**): “$\sum$”, 多项式(1.2.1)又可以简记作:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{1.2.2}$$

**定义 1.2.2** 设 $f(x), g(x) \in P[x]$, 如果 $f(x), g(x)$ 满足: 除系数为零的项外, 所有同次项系数都相等, 那么, **称多项式 $f(x), g(x)$ 相等**, 记作 $f(x) = g(x)$.

按定义, 任意两个零多项式总是相等的, 换句话说, **零多项式是唯一的**.

**例 1.2.1** 设 $f(x) = ax^2 - 2x + b, g(x) = cx^3 + x^2 + dx + 1$, 问: $a, b, c, d$ 满足怎样的条件时才有 $f(x) = g(x)$?

**解** 当且仅当 $a = b = 1, c = 0, d = -2$ 时, 才有 $f(x) = g(x)$.

多项式作为一类特殊的整式, 在中学阶段的初等代数里, 我们已经会对两个(或两个以上)多项式进行加法、减法和乘法运算. 例如, 设 $m, n \in \mathbb{N}$, 并且不妨设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in P[x].$$

那么,

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \pm \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) x^i, & n > m, \quad \text{令 } b_{m+1} = \cdots = b_n = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) x^i, & n = m, \\ \sum\limits_{i=0}^{m} (a_i \pm b_i) x^i, & n < m, \quad \text{令 } a_{n+1} = \cdots = a_m = 0, \end{cases}$$

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{s=0}^{m+n} \left( \sum_{i+j=s} a_i b_j \right) x^s.$$

显然, 任意两个一元多项式经过加法、减法、乘法运算后, 所得结果仍然是一元多项式. 换句话说, $P[x]$ 关于加法、减法、乘法三种运算是封闭的, 因此, 通常也把 $P[x]$ 称为**数域 $P$ 上的一元多项式环**, 这时, $P$ 称为 $P[x]$ **的系数域**.

为了今后的需要, 我们再定义一下数域 $P$ 中的数与多项式的乘法, 简称**数乘**, 其实它是两个多项式乘法的特例, 因此在某种意义上是多余的.

**定义 1.2.3** 设 $k \in P$, $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in P[x]$, 规定: $kf(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} (ka_i) x^i$.

显然有 $kf(x) \in P[x]$. 引入数乘多项式有两个简单应用:

(1) 负多项式概念, 通常把 $(-1)f(x)$ 称为**多项式 $f(x)$ 的相反多项式**, 或称为**多项式 $f(x)$ 的负多项式**, 记作 $-f(x)$;

(2) 对于任意**非零多项式**, 我们总可以将它进行所谓**首一化**, 具体地说, 设 $f(x) =$

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i (\neq 0)$, 且首项系数 $a_n \neq 0$, 又如果 $a_n \neq 1$, 用 $f(x)$ 的首项系数 $a_n$ 的倒数去乘以 $f(x)$, 得到新的多项式记作 $g(x)$, 那么有 $g(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$, 显然 $g(x)$ 的首项系数就是 1.

通常把上述由 $f(x) \neq 0$ 出发, 经过乘以 $f(x)$ 的首项系数 $a_n$ (一般 $a_n \neq 1$, 否则无须这样做) 的倒数得到首项系数是 1 的多项式 $g(x)$ 的过程称为**非零多项式 $f(x)$ 的首一化**, 并把 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的**首一化多项式**. 特别地, 如果一个非零多项式首项系数已是1, 则直接称为**首一多项式**.

显然, **任一非零多项式都可以进行首一化, 任何两个非零多项式如果仅相差一个任意非零常数倍**(这样的两个多项式称为相伴的), **那么它们的首一化一定是同一个多项式**. 特别地, 任意一个**零次多项式的首一化都是** 1.

**例 1.2.2**　$f_1(x) = -2x^2 + 4x - 5$, $f_2(x) = 4x^2 - 8x + 10$, 则 $f_1(x) = \frac{1}{-2} f_2(x)$, 而 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的首一化多项式均为

$$g(x) = \frac{1}{-2} f_1(x) = \frac{1}{4} f_2(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{2}.$$

按照定义 1.2.2, 一元多项式环 $P[x]$ 具有以下性质.

**性质 1.2.1**　对 $\forall k, l \in P$, $\forall f(x), g(x), h(x) \in P[x]$,

**多项式乘法交换律**　即有: $f(x)g(x) = g(x)f(x)$;

**多项式乘法结合律**　即有: $\big(f(x)g(x)\big)h(x) = f(x)\big(g(x)h(x)\big)$.

**推论 1.2.1**　**多项式乘法关于数因子的结合律**　即有

$$\big(kf(x)\big)g(x) = k\big(f(x)g(x)\big) = f(x)\big(kg(x)\big);$$

**多项式乘法关于加法的分配律**　即有

$$\big(f(x) + g(x)\big)h(x) = f(x)h(x) + g(x)h(x).$$

此外, 关于加法与数乘, 还特别满足以下 8 条规律.

(1) **加法交换律**　即有: $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$;

(2) **加法结合律**　即有: $\big(f(x) + g(x)\big) + h(x) = f(x) + \big(g(x) + h(x)\big)$;

(3) $P[x]$ 中**存在零元素**(即零多项式) 0, 满足: $f(x) + 0 = f(x)$;

(4) $P[x]$ 中**在一元素 $f(x)$, 存在负元素**(即负多项式) $-f(x)$, 满足:

$$f(x) + (-f(x)) = 0;$$

(5) $1 \cdot f(x) = f(x)$;

(6) **数乘关于数因子的结合律**　即有: $(kl)f(x) = k(lf(x))$;

(7) **数乘关于数的加法的分配律**　即有: $(k + l)f(x) = kf(x) + lf(x)$;

(8) **数乘关于多项式加法的分配律**　即有: $k(f(x) + g(x)) = kf(x) + kg(x)$.

之所以单独强调这 8 条规律, 是为今后理解抽象的线性空间概念的需要, 读者暂时不必过分在意它.

**性质 1.2.2**（零因子律） 如果 $f(x)g(x)=0$, 那么 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$.

**推论 1.2.2** 如果 $kf(x)=0$, 那么 $k=0$ 或 $f(x)=0$.

**推论 1.2.3**（消去律） 如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$, 且 $f(x)\neq 0$, 那么 $g(x)=h(x)$.

关于次数、首项以及首项系数, 不难证明以下性质.

**性质 1.2.3** 如果 $f(x)g(x)\neq 0$, 且 $f(x)\pm g(x)\neq 0$, 那么,

$$\partial\big(f(x)\pm g(x)\big)\leqslant \max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\};$$

$$\partial\big(f(x)g(x)\big)=\partial(f(x))+\partial(g(x));$$

$$\partial\big(kf(x)\big)=\partial\big(f(x)\big)(k\neq 0).$$

**性质 1.2.4** 如果 $f(x)g(x)\neq 0$, 那么, 乘积 $f(x)g(x)$ 的首项(首项系数、常数项)分别等于因子 $f(x)$ 的首项(首项系数、常数项)与 $g(x)$ 的首项(首项系数、常数项)的乘积.

性质 1.2.4 可以推广至两个以上非零多项式乘积的情形, 但对于中间项或者中间项系数一般不成立.

**例 1.2.3** 设 $f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$, 这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是数域 $P$ 中的常数, 求 $f(x)$ 的次数、首项、首项系数、次高次项、次高次项系数以及常数项.

**解** 展开 $f(x)$ 得

$$f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)=x^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

故 $f(x)$ 的次数为: $\partial(f(x))=n$, 首项为: $x^n$, 首项系数为: 1, 次高次项为: $-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)x^{n-1}$, 次高次项系数为: $-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$, 常数项为: $(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

## 习 题 1.2

1. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 就系数 $a,b,c$ 的不同取值进行讨论, 给出多项式 $f(x)$ 的次数、首项、首项系数以及常数项.

2. 设 $f(x)=c$, 这里 $c(c\in P,c\neq 1)$ 是非零常数, 试将 $f(x)$ 首一化.

3. 分别给出满足 $\partial\big(f(x)+g(x)\big)\leqslant\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$ 中等于号和小于号的多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的例子.

4. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$, 若满足: $[f(x)]^2=x[g(x)]^2$, 证明: $f(x)=g(x)=0$.

## 1.3 多项式的带余除法与整除概念

一元多项式环 $P[x]$ 与整数环 $\mathbb{Z}$ 类似, 表现在它们对加法、减法、乘法三种运算都封闭. 此外, 两个整数还可以作除法, 当然, 两个整数相除(除数不为 0)未必能

够除尽, 与之类似地, $P[x]$ 中也可以引入除法运算, 更类似的是, 两个多项式相除(除式不为零多项式)同样未必能够除尽. 实际上, 关于多项式除法, 有(证明详见本节阅读材料)如下定理.

**定理 1.3.1**（带余除法定理）　设 $f(x),g(x)\in P[x]$, 且 $g(x)\neq 0$, 那么存在唯一确定的 $q(x),r(x)\in P[x]$, 使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x) \tag{1.3.1}$$

成立, 其中 $r(x)$ 要么为 0, 要么满足 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$.

通常把(1.3.1)中的 $q(x)$ 称为**用多项式 $g(x)$ 除 $f(x)$**(也说成用多项式 $f(x)$ 除以 $g(x)$)时的**商式**, 简称**商**; 而把 $r(x)$ 称为用多项式 $g(x)$ 除 $f(x)$ 时的**余式**, 简称**余**.

这很像整数除法的情况: $7\div 2=3\cdots\cdots 1$; $6\div 2=3\cdots\cdots 0$, 它们实际上可以分别写成: $7=3\times 2+1$; $6=3\times 2+0$, 不仅如此, 而且多项式的除法, 也有着类似整数除法的竖式运算方法.

**例 1.3.1**　设 $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3$, $g(x)=2x^3-5x^2-4x+3$, 试求: 用多项式 $g(x)$ 除 $f(x)$ 时的商和余.

**解**　利用下面的竖式除法,

$$\begin{array}{r}
\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\\
2x^3-5x^2-4x+3\overline{)\,x^4-2x^3-4x^2+4x-3}\\
\underline{x^4-\dfrac{5}{2}x^3-2x^2+\dfrac{3}{2}x}\\
\dfrac{1}{2}x^3-2x^2+\dfrac{5}{2}x-3\\
\underline{\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{5}{4}x^2-\ x+\dfrac{3}{4}}\\
-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{7}{2}x-\dfrac{15}{4}
\end{array}$$

计算可得: $g(x)$ 除 $f(x)$ 时的商: $q(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$, 余: $r(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{7}{2}x-\dfrac{15}{4}$, 即有

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)g(x)+\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{2}x-\frac{15}{4}\right).$$

从这个例子, 读者应该看到, 我们为什么把一元多项式的系数范围放大到数域 $P$ 上? 是因为两个整系数多项式, 要想顺利进行除法运算, 限制在整系数范围内是不现实的.

**定义 1.3.1**　设有 $f(x),g(x)\in P[x]$, 如果存在 $h(x)\in P[x]$, 使得 $f(x)=g(x)h(x)$, 那么称**多项式 $g(x)$ 整除 $f(x)$**, 记作 $g(x)\mid f(x)$; 如果这样的 $h(x)$ 不存在, 那么称**多**

**项式** $g(x)$ **不能整除** $f(x)$，记作 $g(x)\nmid f(x)$. 进一步，如果 $g(x)|f(x)$，那么也称**多项式** $g(x)$ **是** $f(x)$ **的因式**，相应地，把多项式 $f(x)$ 称为 $g(x)$ **的倍式**.

**注** 定义 1.3.1 中并未要求 $g(x)\neq 0$.

事实上，如果 $f(x)=0$，那么对于任意 $g(x)$（包括 $g(x)=0$），总存在 $h(x)\in P[x]$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，只需取 $h(x)=0$ 即可. 因此，可以认为**零多项式是任意多项式的倍式**，这又相当于说**零多项式有着任意的因式**，特别地，$0|0$.

但是，如果 $f(x)\neq 0$，而 $g(x)=0$，那么这时一定不存在 $h(x)\in P[x]$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，因此，可以认为**零多项式不能整除任意非零多项式**，这是符合常理的，因为 **0 的倍式只能是 0**.

总之，零多项式的因式任意，零多项式的倍式为 0. 换句话说，如果 $f(x)|0$，那么 $f(x)$ 任意；如果 $0|f(x)$，那么 $f(x)=0$.

如果定义 1.3.1 中 $g(x)\neq 0$，那么，根据带余除法定理，容易得到如下**整除性判别法**.

**定理 1.3.2** 设有 $f(x),g(x)\in P[x]$，且 $g(x)\neq 0$，那么 $g(x)|f(x)$ $\Leftrightarrow$ 用多项式 $g(x)$ 除 $f(x)$ 时的余式 $r(x)=0$.

最后，我们罗列一下整除性的一些常用性质. 声明：以下性质中所涉及的多项式均属于一元多项式环 $P[x]$，所涉及系数或者常数均属于数域 $P$.

**性质 1.3.1** 若 $0|f(x)$，则 $f(x)=0$；若 $f(x)|a(a\in P,a\neq 0)$，则 $f(x)\in P, f(x)\neq 0$.

性质 1.3.1 后半是说，非零常数（即零次多项式）的因式只能是非零常数.

**性质 1.3.2** 对于任意 $f(x)\in P[x]$，总有 $f(x)|f(x), f(x)|0$.

**性质 1.3.3** 对于任意 $f(x)\in P[x]$，任意 $a\in P,a\neq 0$，总有

$$a|f(x),\quad af(x)|f(x),\quad f(x)|af(x).$$

**推论 1.3.1** 在 $P[x]$ 中，可以认为，任意两个整数（均视为多项式）总是可以整除（除数不为 0）的.

例如，$2|3$. 这是因为 $P\subset P[x]$，而 $P$ 是一个数域，事实上，存在 $\frac{3}{2}\in P[x]$，使得：$3=2\cdot\frac{3}{2}$，按定义 1.3.1，即知. 当然，如果限制于整数或者整系数多项式范畴，我们依然认为 $2\nmid 3$.——此乃立场不同，观点不一也.

**性质 1.3.4** 对于任意 $f(x),g(x)\in P[x]$，如果既有 $f(x)|g(x)$，又有 $g(x)|f(x)$，那么必有 $f(x)=cg(x)$，这里 $c$ 是数域 $P$ 中的非零常数.

性质 1.3.4 表明，互为因式的两个多项式至多相差一个非零常数倍. 常把这样的两个多项式称为**相伴多项式**.

**性质 1.3.5**（整除关系具有传递性） 设 $f(x),g(x),h(x)\in P[x]$，如果既有 $f(x)|g(x)$，又有 $g(x)|h(x)$，那么必有 $f(x)|h(x)$.

**性质 1.3.6**　设 $f(x)|g_i(x)(i=1,2,\cdots,r)$, 那么对于任意 $u_i(x)\in P[x]$, 总有

$$f(x)\left|\sum_{i=1}^{r}u_i(x)g_i(x).\right.$$

通常把 $\sum_{i=1}^{r}u_i(x)g_i(x)$ 称为**多项式 $g_1(x),g_2(x),\cdots,g_r(x)$ 的一个组合**, 当然它也是多项式 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_r(x)$ 的一个组合.

**推论 1.3.2**（整除关系具有可加性、可乘性）　**可加性**　对任意 $f(x),g(x),h(x)\in P[x]$, 如果既有 $f(x)|g(x)$, 又有 $f(x)|h(x)$, 那么必有 $f(x)|[g(x)+h(x)]$.

**可乘性**　对任意 $f(x),g(x)\in P[x]$, 如果 $f(x)|g(x)$, 那么对任意 $h(x)\in P[x]$, 有 $f(x)|[g(x)h(x)]$.

**例 1.3.2**　当 $m,p,q$ 满足什么条件时？有: $x^2+mx+1\,|\,x^3+px+q$.

**解**　方法一: 用例 1.3.1 的方法计算可得: 余式 $r(x)=(p-1+m^2)x+(q+m)$, 令 $r(x)=0$, 得

$$\begin{cases}p-1+m^2=0\\ q+m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=1-m^2,\\ q=-m.\end{cases}$$

方法二: 由于被除式是 3 次的, 而除式是 2 次的, 因此商式应该是 1 次的; 另外, 由于被除式和除式都是首一的, 因此商式也应该是首一的, 故可设商式为 $x+a$($a$待定), 于是有等式:

$$x^3+px+q=(x^2+mx+1)(x+a),$$

即: $x^3+px+q=x^3+(m+a)x^2+(1+ma)x+a$, 根据多项式相等定义, 得

$$\begin{cases}m+a=0\\ 1+ma=p\\ a=q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=1-m^2,\\ q=-m.\end{cases}$$

最后, 我们有必要指出, 两个多项式之间的**整除关系不因系数域的扩大而改变**.

## 阅读材料 1　带余除法定理证明

关于一元多项式的**带余除法定理**: 对于任意 $f(x),g(x)\in P[x]$, 并且 $g(x)\neq 0$, 则 $\exists q(x),r(x)\in P[x]$, s.t. $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$. 这里 $q(x)$ 是多项式 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商式, $r(x)$ 是多项式 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的余式, 其中, $r(x)=0$, 或者 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$.

为了简洁, 以下证明中所涉及的多项式均类似于 $f(x)$ 简写成 $f$ 一样进行缩写.

**证**　不妨设

$$f=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad g=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0.$$

**存在性**　兹作如下讨论: