

北京市科学技术委员会
科普专项资助

新体验科普书系

脑洞大开的 微积分

刘祺◎著

数学的精髓不在于知识本身，
而在于数学知识中所蕴含的思想方法

远离“数学过敏症”

复印机里的函数
春运中的极限
厨房里的数学模型
股市里的数学视野
大树里的不定积分
饺子馅里的重积分



化学工业出版社
悦读名品出版公司



化学工业出版社
悦读名品出版公司

·北京·

图书在版编目 (CIP) 数据

脑洞大开的微积分/刘祺著. —北京: 化学工业出版社, 2017.2

ISBN 978-7-122-28859-2

I. ①脑… II. ①刘… III. ①微积分—普及读物
IV. ①O172-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 006354 号

责任编辑: 罗 琨
责任校对: 吴 静

装帧设计: 韩 飞

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)
印 装: 三河市双峰印刷装订有限公司
710mm×1000mm 1/16 印张 14 字数 151 千字
2017 年 5 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888(传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899
网 址: <http://www.cip.com.cn>
凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 39.80 元

版权所有 违者必究

其实在学生时代，数学是我非常讨厌的课程，是典型的“数学过敏症”的患者。当听到数学老师说“这又是一道送分题”的时候，我就在内心暗暗地说：“要不起。”

当得知要为这样一本书作序的时候，我只是觉得又要有一本我看不懂的大学教材缩印本将在不久的将来被印刷出来了。但是当我看到本书的目录时，这种念头就突然消失了。我想：这也许是一本我能看得懂的数学书。

这本书一上来就是讨论我抵触的函数，但是作者却没有用教科书式的口吻来讲解函数。而是把我领入了一个真实的情景中。碰巧，第1章所说的情景正是我开始阅读这本书的当天所经历过的，所以它一下就激发起了我的兴趣。这本书也许正是改变人们对数学刻板印象的末班车。

在过去的很长一段时间里，数学（奥数）一直作为小升初和中、高考的加分项。数学教育一直被家长的功利心所辖制，数学教师更是本着“勤能补拙”的信条搞题海战术、竞赛轰炸。然而，随着近年来数学（奥数）不再享受加分政策，家长和教师马上就转移了阵地。开始大搞加分补习和特长补习。一旦抛开功利，那么人们还有多少对数学的热爱呢？

现代社会对人的数学素养要求越来越高。自第二次世界大战之后，几乎全世界都认为美国在新科技发展中有着领先地位。实际上这些科技创新都依赖于美国在数学和科学教育上的一骑绝尘。换句话说，如果想培养创新型人才，就必须重视数

学教育。

随着科技的发展和社会的进步，数学不再只是工程学技术的基础课程，而会与越来越多的新领域相互渗透，形成交叉学科。

时至今日，对能够熟练应用数学科学劳动者的需求与日俱增。“高新技术的本质就是数学技术”的观点已经被越来越多的人所接受。然而，对数学、科学以及工程学学位的授予比例却在逐渐减少。一项报告指出，有超过 22% 的大学低年级学生需要接受数学方面的补习。而真正能达到毕业所需数学水平的大学生人数不足一半。

这本书抛开了传统的大学教材式的思路，而是通过场景化和生活化的实例，来向读者展示什么是微积分、微积分如何学习以及如何解决微积分题目。这是一本手把手教你数学思考过程的神奇之书，而不是单纯地证明公式和使用公式。而作者的口语化行文也让这本书简单易读。

另外，这本书对读者的数学水平要求并不高，却能大幅度提升读者的数学素养。像我这种自从高中毕业就再也没怎么学习过数学的人，也可以通过自学本书达到大学本科生的平均水平。

传统的数学教材无疑是偏重让学生掌握准确快捷的计算方法和严谨的逻辑推理，而这本书则是培养读者使用数学工具分析和解决实际问题的意识和能力。

大多数本科生所使用的是经典的《高等数学》这本教材，和其他的典型教材一样它也是按照数学的逻辑思路来写的。但是对于丝毫没有学习数学兴趣的读者而言，这样的教材就很可能读不下去。而这本书和教材最大的不同就是，它总是先展示

一个生活中常见的问题，再顺理成章地解释它背后的数学原理，最后归纳出严谨的数学定理。这正是这本书最为引人入胜的地方。

在阅读这本书之前，我也是认为“数学只要学到够买菜计数的程度就行”中的一员。而这本书超越了我从小学到高中毕业的所有对数学的认识。虽然这本书只有十章的内容，可它带来的效果却超过了之前十二年的数学教育。

如果现在你还认为“数学只需要学会加减乘除”的话，我推荐你看一看这本书，它将会颠覆你对数学的认识。

那么，你准备好了吗？

北京源智天下科技有限公司
CEO 魏少华

推荐序二

我们都曾在打印店打印过很多次，算是打印店的常客了。可是你有没有发现打印店的老板在打印和缩印操作中的秘密？你有没有想过缩印中包涵的数学问题呢？那么你平时买东西的时候呢？又有没有仔细思考其中的数学方法是什么？当你面对春运的时候，难道你只是在抱怨人多吗？你有没有尝试着发掘其中的数学问题呢？

当然，你可能会认为，这些问题这么简单，不可能有什么数学方法。或者说，高等数学和微积分这么抽象的东西，怎么可能在这些小问题中体现呢？如果是这样的话，你可真是错得有些离谱。其实数学问题都是源于生活但又高于生活的，把数学和生活彻底分开是不合理的且不可能的。当然了，数学也并不是完全枯燥无味的，只是你还没有找到一个适合自己的学习方法。

从翻开这本书的初稿开始，我就对它充满了期待。这本书稿将数学完美地融入到了日常生活之中，让你在体会平日里生活的同时，感受到数学那独有的魅力。这本书稿里的内容将会重新唤醒你对于数学的热爱，让数学不再是你学习的梦魇。

作为一名理科专业的大学老师，我非常怕被新进校园的同学们问：“怎样才能学好高数”。因为高等数学和微积分的一部分内容，无论是文科生还是理科生，在高二时就已接触过一部分了。在我们看来，同学们都是有一定基础的，而忽略了同学们为了应试，对数学大都囫圇吞枣，而大学里的数学教学也有课时限制，老师往

往不能帮同学们温故知新。所以期末考试所有学生几乎都靠背公式、例题，因此同学们似乎进入了一个无法逃脱的怪圈——“考前背、考后忘、就怕下届学弟问”。

当我第一次看见这本书稿的时候，我是开心的。因为当时我们的高等数学刚好也教到了重积分，对上学期就没有扎实积分功底的同学来说，高数课就是“老师在讲，自己在看书”，而且有些同学的进度慢了不止一两节。所以我立刻分享了这本书稿的部分内容给同学们，希望他们可以通过这本书提高学习数学的兴趣，补习一些数学基础。

或许你们会想问：“有关积分的课本那么多，为什么要分享作者这一本呢？”市面上除了那些高数课本以外，的确还有很多的教辅书，可是这些书都是通俗易懂、结合生活的吗？而本书只通过十个例子，就给我们讲解（普及）了高等数学中的很大一部分知识，也巧妙避开了那些枯燥的证明过程。这本书稿诠释了“数学的精髓不在于知识本身，而在于数学知识中所蕴含的思想方法”的道理。在我看来，教科书是让你通过期末考试，而《脑洞大开的微积分》则是让你会使用微积分。

这本书稿帮助我的学生打破了之前对数学的一种认识——数学越学越枯燥。不仅如此，受到这本书稿的启发他们反而觉得数学越读越有趣。特别是这本书的第7章，让同学们站在微积分的高观点上俯视初等数学，让同学们终于弄懂了那些抽象的面积公式是怎么证明出来的。让同学们开始关注那些“想当然”的东西背后的数学原理，而这正是站在微积分的数学山峰上才能看到的壮美风景。

《脑洞大开的微积分》真的会让你的脑袋“开个大洞”，它会

为你打开通往数学世界的崭新大门。只要将这本书作为你的大学数学入门书籍，相信你一定会爱上数学。如果你还没有准备好，那么现在就跟随这本书，一起进入数学的世界吧！

清华大学土木系教授
周 虎

能翻开这本书的大多数人，想必对数学都有浓厚的兴趣。现在有很多年轻人都在学习奥数，然而除去奥数在升学中的加分，他们对数学的挚爱又有多少呢？最近，当我逛书店的时候，余光所及的几排书架上全部都是有关数学的书籍，从小学数学辅导到考研数学模拟题应有尽有。当我取下一本的时候，里面枯燥乏味的证明过程让我的心瞬间凉了一半。那些数学带给我的快乐仿佛一下子消散了。现在的中学数学教科书几乎都是为考试而编写的。

在今年的寒假，我一直在给很多孩子做答疑。绝大多数孩子还是在问我各自所在年级的数学题，而有几个今年即将参加高考的孩子引起了我的特别注意。其中有一个孩子到期末考试的时候，数学还没有及格。我听到他一直在抱怨自己数学底子薄，不擅长学理工科。我像往常那样安慰他、鼓励他，同时也不得不告诉这个孩子，哪个知识点往常都出了什么样的题型，这类题应该怎么做，怎么复习，等等。可以预见的是，等到高考以后，他就会完全忘记学到的数学知识。他只会记得数学是一门令他头疼的课程，还有一个喋喋不休的数学老师。

不过，当你阅读这本书的时候，魔王一样的数学就会和你成为朋友了。那时，你也将会拥有那些生活中由数学带来的快乐和美好的记忆。同时，这本书把那些冗长而无趣的证明过程都换成了更接地气的生活中的常见现象。所以它很适合你在碎片时间阅读。

此外，这本书开创了一种新的高等数学讲解方法。通过十个生活中常见的示例，你就可以掌握相当于大学本科水平的数学知识。但是，我们并没有涉及那些繁杂又毫无用途的证明过程。所以，这本书是学习数学的一条捷径。

冯·诺依曼^①曾说过：“如果人们不相信数学是简单的，只是因为他们还没有体会到生活的复杂。”如果你认为生活中的柴米油盐要比数学还要简单的话，只可能是你没有掌握学习数学的方法。

所以读者朋友们，不要一看见数学就觉得头疼。实际上学习微积分不需要很高深的数学知识，可以说微积分和我们在中学时代学习的数学差不多；只需要会加减乘除，并且学会怎么求一些简单的几何图形的面积，就完全可以跟着这本书学懂微积分。



冯·诺依曼



斐波那契兔子问题

^① 冯·诺依曼（1903年至1957年），20世纪最重要的数学家之一，在现代计算机、博弈论、核武器和生化武器等诸多领域内有杰出建树的最伟大的科学全才之一，被后人称为“计算机之父”和“博弈论之父”。

数学是有趣的。从斐波那契^①的兔子问题到“猴子也能写出莎翁^②的《罗密欧与朱丽叶》”的无穷猴子悖论，再从莱布尼茨和牛顿的微积分到神奇的莫比乌斯带^③，都诠释出了数学的无穷乐趣。就如同微分几何之父陈省身^④教授生前所说的那样——数学好玩。

中国人自古以来就有“尚用”的精神，即“什么有用干什么，什么有用学什么”。而数学就是最有用的东西之一。你可能会说：“数学怎么可能会在生活中有用呢？我生活中最多也就是加减乘除，那些高深的定理公式和我有什么关系？”相信当你读完这本书的时候就会发现，学数学像吃饭：你过去吃了什么你可能不记得了，但是它们中的一些长成了你身体的一部分；学数学也是一样，学了什么定理你可能不记得了，但是它背后的思想会变成你灵魂的一部分。有不少人这样问过我：“怎么能最快速提高自身整体气质？”“怎样能锻炼一个好脾气？”我的回答都是：“那就学数学吧！”

在现在鱼龙混杂的网络世界中，数学可以借你一双慧眼识破谣言，解密真相；在竞争激烈的职场中，数学是你专业的敲门砖。如果你坚持认为只要掌握加减乘除就足以应付日常生活琐事的话，那么这本书将会颠覆你这一想法；如果你认为数学枯燥无趣的话，这本书也将会一改你对数学的印象。

① 斐波那契（1175年至1250年），意大利数学家，将现代书写数和乘数的位值表示法系统引入欧洲。

② 威廉·莎士比亚（1564年4月23日至1616年4月23日），英国文学史上最杰出的戏剧家，同时是欧洲文艺复兴时期最重要、最伟大的作家，全世界最卓越的文学家之一。

③ 奥古斯特·费迪南德·莫比乌斯（1790年11月17日至1868年9月26日），德国数学家、天文学家。被认为是拓扑学的先驱。莫比乌斯最著名的成就是发现了莫比乌斯带。莫比乌斯带是三维欧几里德空间中的一种奇特的二维单面环状结构。

④ 陈省身（1911年10月28日至2004年12月3日），生于浙江嘉兴秀水县，美籍华裔数学大师，20世纪最伟大的几何学家之一，生前曾长期任教于美国加州大学伯克利分校。

本书全部内容由刘祺编写。其中，特别感谢谭宽先生对第 10 章中涉及的医学知识的详细说明，也要感谢魏少华先生和周虎先生为本书作序，还要感谢在本书背后默默奉献的编辑，以及在本书创作期间给予帮助的前辈、同行、朋友。

我相信，读完这本书你会发现，原本数学里那些让人云里雾里的名词，实际上都是一碰就倒的“纸老虎”而已。

限于笔者水平和时间仓促的缘故，书中不免存在不严谨和疏漏之处，还请广大读者批评指正。

编者

第 1 章 缩印需要多少纸	1
1.1 打印店情景重现	2
1.2 打印店中的函数和映射	2
1.3 精通多元函数的慷慨老板	8
1.4 花哨小店与集合论	10
1.5 圆珠笔到底是笔还是塑料	14

第 2 章 火车与春运	21
2.1 从春运说起	22
2.2 从行车轨迹到函数图像	22
2.3 火车与对称	29
2.4 数列的极限	31
2.5 巴塞尔问题	32
2.6 两个重要极限之一	33
2.7 无穷小的比较	35
2.8 两个重要极限之二	37

2.9 重要极限为何重要	39
--------------	----

第3章 计算面团的大小	45
--------------------	-----------

3.1 厨房数学二三事	46
3.2 建立数学模型	46
3.3 假说演绎法	47
3.4 直觉和运气	49
3.5 面团的模型	50
3.6 导数公式	52
3.7 导数公式推导示例	54
3.8 导数的运算法则	55
3.9 再战! 复合函数	56
3.10 反函数与反函数求导	57
3.11 中文房间与黑箱模型	59

第4章 弹珠的运动	63
------------------	-----------

4.1 拨开历史的迷雾	64
4.2 导数存在的准则	64
4.3 罗尔定理	66
4.4 拉格朗日中值定理	68
4.5 伽利略的困惑	69

4.6 泰勒展开	70
4.7 泰勒其人其事	73

第5章 股市的预测	79
------------------	-----------

5.1 证券交易市场的起起落落	80
5.2 曲线的拟合	80
5.3 再探函数	81
5.4 一般的直线和竖直线	82
5.5 圆	84
5.6 从圆到椭圆	85
5.7 三次样条线	87
5.8 函数的单调性和驻点	89
5.9 极值点	91
5.10 更好的股票：凸凹性	93

第6章 桥洞的设计	101
------------------	------------

6.1 从赵州桥说起	102
6.2 另外的拟合	102
6.3 初识积分表	104
6.4 模块化的思维与不定积分定义推广	105
6.5 积分公式证明	107

6.6 积分表再扩展	108
------------	-----

第7章 做一件大褂需要多少布	121
-----------------------	------------

7.1 DIY的潮流	122
7.2 再探不定积分	122
7.3 常数 C 可写可不写吗	124
7.4 从不定积分到定积分	125
7.5 加法的方向	129
7.6 过去的面积公式	131
7.7 高观点下的面积公式	132
7.8 再探圆和椭圆	133
7.9 神奇的直角三角形	135
7.10 “万变不离其宗”的四边形	140
7.11 曲边梯形的面积	144

第8章 包饺子需要多少馅	147
---------------------	------------

8.1 多包一些还是少包一些	148
8.2 从圆面积到圆周长	148
8.3 弧长公式	150
8.4 弧长公式的检验	151
8.5 表面积	153