

振动信号处理与 数据分析

徐 平 郝旺身 编著



科学出版社

振动信号处理与数据分析

徐 平 郝旺身 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以工程振动信号为研究对象,以信号的采集到后续的处理为主线,从振动信号拾取出发,依次对获得的数字信号进行时域、频域以及时频域的处理。介绍经验模态分解和全矢谱融合等新的处理算法和思想,有针对性地结合振动信号监测处理而组织编写内容,兼顾传承与发展,探讨振动信号处理算法及原理。本书涉及相关知识要点:傅里叶级数展开、离散傅里叶变换、Z变换、快速傅里叶变换、时域统计特征、EMD分解、全矢谱技术等理论及其在工业现场的应用案例。

本书可作为普通高等院校理工科相关专业本科生教材,也可作为研究生、工程技术人员的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

振动信号处理与数据分析 / 徐平, 郝旺身编著. —北京: 科学出版社, 2016.8
ISBN 978-7-03-049479-5

I. ①振… II. ①徐… ②郝… III. ①机械振动—信号处理②机械振动—振动分析 IV. ①TH113.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 179925 号

责任编辑: 毛 莹 张丽花 / 责任校对: 桂伟利

责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 8 月第 一 版

开本: 787×1092 1/16

2016 年 8 月第一次印刷

印张: 14

字数: 330 000

定价: 42.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

振动是自然界中广泛存在的物质系统的一种普遍运动形式,通常指一个物理量在某量值(平衡值)附近随时间而往复变化的过程。自然界中,大至宇宙,小至微观粒子无不存在振动。各种形式的物理现象(发热、发声、发光、电和磁的运动等)都包含振动。

随着科学技术、生产和国防建设事业的发展,以及人类各种生产活动和社会活动的现代化,每时每刻都需要发生、传递和记录大量的振动信号和信息。因此,必须对大量的包含着无穷信息的各种各样的信号(数据、波形和图像等)进行快速处理,去伪存真,提取有用的信息并找出它们的规律。本学科的应用领域十分广泛,如机械工程、交通工程、宇航工程、土木建筑工程、电信和电力工程、声学工程、地球物理和地质工程、生物医学工程、核工程和军事科学、天文气象、海洋科学等几乎所有的科学部门和工程部门都要应用它,甚至在人类活动中的各种现象也能用信号处理的方法加以分析和寻找规律。由此可见,振动数据分析和信号处理的重要性与日俱增。因此,掌握振动数据分析与信号处理的理论和方法,在现代科学技术领域中已十分必要。

本书从时域分析入手,深入到频域分析,进而叙述数字信号处理,试图建立起这三个方面的有机联系。书中叙述了模拟信号处理和数字信号处理的主要内容,从实际应用出发,由浅入深,在兼顾数学推理的基础上,通过大量的图解说明,强调物理概念和实际应用知识,作为学习信号处理理论和应用的基础。

本书是作者长期从事振动的教学、科研及产品开发研究工作的结晶。本书原稿是作者根据长期从事的振动波形分析、频谱分析和信号处理实际工作经验并参阅国内外文献而编写而成的讲义。作者自2007年以来,曾以此在郑州大学给本科生授课,并在郑州恩普特科技股份有限公司举办的多次全国设备振动监测培训班上做过交流和介绍。随后作者根据多方面提出的意见和建议,对原稿又进行了若干次修改和补充,遂编写成此书。本书内容包括:离散时间信号和系统、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换的计算、数字滤波器设计方法、时频域信号处理、经验模态分解方法、全矢谱技术及理论等。

本书共9章,第1、2、7章由郑州大学徐平副教授编写,第3、4、8章由郑州大学郝旺身博士编写,第5章由郑州大学铁瑛副教授编写,第6章由河南工程学院李凤琴副教授编写,第9章由郑州大学李凌均副教授编写。研究生赵伟杰、林辉翼、王洪明、官振红、马艳丽、胡鑫、岳佳佳、张学欣参与了资料收集、文字录入等工作。

本书得到国家自然科学基金(聚氨酯高聚物材料应用于被动隔振的试验研究与理论分析(No.51278467))、河南省高校科技创新人才支持计划(混凝土空心墙的被动隔振机理研究(No.14HASTIT050))、河南省自然科学基金重点项目(基于模糊可靠性的混流泵设备评价策略研究(No.13A460673))、郑州大学校级教材建设项目的资助,在此表示诚挚的感谢!

上海交通大学朱训生教授、河南理工大学赵波教授对本书进行了细致的审阅，并提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中若存在不妥和疏漏之处，恳请读者批评指正。

作 者

2016年4月

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 DSP 的基本概念	1
1.2 DSP 系统及其实现	2
1.3 振动信号及其基本描述	3
1.3.1 周期振动信号的合成和分解	4
1.3.2 非周期振动信号的性质	10
1.4 信号处理的应用	11
1.4.1 在结构振动和设计中的应用	11
1.4.2 在产品质量和自动控制中的应用	11
1.4.3 在结构监测和故障诊断中的应用	12
第 2 章 信号的分类与测量	13
2.1 振动信号处理的基本概念和作用	13
2.2 信号的分类	14
2.3 信号的测量	15
2.3.1 传感器的分类	16
2.3.2 传感器的选择原则	17
2.3.3 常见振动信号测试传感器	17
习题	21
第 3 章 振动信号的处理	22
3.1 信号的放大	22
3.1.1 运算放大器	22
3.1.2 测量放大器	23
3.1.3 电荷放大器	24
3.2 信号的滤波	25
3.2.1 理想模拟滤波器	25
3.2.2 实际模拟滤波器及其基本参数	27
3.3 信号的调制与解调	29
3.3.1 幅度调制	29
3.3.2 频率调制	34
3.4 信号的数字化方法	36
3.4.1 采样、混频和采样定理	36

3.4.2	量化和量化误差	38
3.4.3	截断、泄漏和窗函数	38
3.4.4	选择模/数转换模块的基本技术指标	40
习题		41
第4章	线性信号分析算法	43
4.1	傅里叶变换	43
4.1.1	傅里叶级数	43
4.1.2	傅里叶积分	44
4.1.3	离散傅里叶变换的性质	45
4.1.4	卷积与相关函数	49
4.2	快速傅里叶变换	51
4.2.1	时间抽取基-2FFT 算法	51
4.2.2	频率抽取基-2FFT 算法	56
4.2.3	基-4FFT 算法	58
4.2.4	分裂基 FFT	60
4.2.5	进一步减少运算量的措施(蝶形算法)	63
4.3	序列的 Z 变换	64
4.3.1	Z 变换的定义	64
4.3.2	序列特征对收敛域的影响	65
4.3.3	逆 Z 变换	68
4.3.4	Z 变换的性质	72
4.4	希尔伯特变换	74
4.4.1	希尔伯特变换的定义	74
4.4.2	希尔伯特变换的性质	76
4.4.3	希尔伯特变换表	77
习题		79
第5章	振动信号的时域处理	82
5.1	时域波形的合成分解	82
5.1.1	稳态分量与交变分量	82
5.1.2	偶分量与奇分量	83
5.1.3	实部分量与虚部分量	83
5.1.4	正交函数分量	84
5.2	时域统计特征参数处理方法	84
5.2.1	有量纲型的幅值参数	84
5.2.2	无量纲型参数	85
5.2.3	高阶统计量指标	87
5.3	信号的幅值分布特性	89
5.3.1	概率密度定义	89

5.3.2 二维联合概率密度函数	91
5.3.3 典型信号的概率密度函数	92
5.4 相关分析方法及其应用	95
5.4.1 相关函数	95
5.4.2 自相关函数性质及其应用	97
5.4.3 互相关函数性质及其应用	99
习题	101
第 6 章 振动信号的频域处理方法及其应用	102
6.1 频谱分析方法	102
6.1.1 确定性信号的频谱	102
6.1.2 离散傅里叶变换与快速傅里叶变换	109
6.1.3 随机信号的功率谱密度	112
6.2 功率谱方法的应用	117
6.2.1 从经典谱估计到现代谱估计	117
6.2.2 谱估计的参数模型方法	118
6.2.3 AR 模型的 Yule-Walker 方程	121
6.2.4 AR 模型的稳定性及其阶的确定	122
6.2.5 AR 谱估计的性质	125
6.2.6 AR 模型参数提取方法	130
6.2.7 MA 和 ARMA 模型谱估计	135
6.3 倒频谱分析方法	138
6.3.1 倒频谱的概念	138
6.3.2 倒频谱与解卷积	139
6.3.3 倒频谱的应用	140
6.4 细化谱分析方法	141
习题	143
第 7 章 振动信号的时频域分析方法及其应用	144
7.1 时频分析的基本概念	144
7.2 信号的时宽与带宽	146
7.2.1 时宽和带宽的概念	146
7.2.2 不确定原理	148
7.3 信号分解	149
7.3.1 信号分解的概念	149
7.3.2 信号的正交分解	151
7.4 短时傅里叶变换	152
7.4.1 连续信号的短时傅里叶变换	152
7.4.2 离散信号的短时傅里叶变换	154

7.5 小波分析方法及其应用	155
7.5.1 小波变换的定义	155
7.5.2 小波变换的特点	157
7.5.3 离散小波变换	160
7.5.4 振动信号处理中常用的小波	160
习题	163
第8章 振动信号的其他处理方法及其应用	164
8.1 经验模式分解方法	164
8.1.1 EMD 的基本概念	164
8.1.2 EMD 方法原理	166
8.1.3 EMD 方法的特点	168
8.1.4 EMD 方法的应用	170
8.2 循环统计量方法	171
8.2.1 振动信号的非平稳性和循环平稳性	172
8.2.2 循环平稳过程及其描述	174
8.2.3 循环谱与功率谱和时频分布的关系	176
8.2.4 二阶循环统计特性及其应用	179
8.3 盲源分离方法	185
8.3.1 概述	185
8.3.2 独立分量分析	187
8.3.3 ICA 快速算法	191
8.3.4 ICA 的应用	192
习题	195
第9章 全矢谱算法概述	196
9.1 平面全矢谱分析与方法	196
9.1.1 旋转机械的动态检测现状	196
9.1.2 全矢谱技术基础	199
9.1.3 全矢谱数值计算方法	203
9.2 基于非平稳信号的全矢谱技术	205
9.2.1 全矢短时傅里叶变换及其应用	205
9.2.2 短时傅里叶变换定义	207
9.2.3 短时傅里叶变换窗函数的选择	207
9.2.4 全矢短时傅里叶变换的分析与计算	208
9.3 全矢谱分析的工程应用实例	209
参考文献	212

第1章 绪 论

数字信号处理(Digital Signal Processing, DSP)是一门涉及许多学科且广泛应用于众多领域的新兴学科。自从1965年库利(Cooley)和图基(Tukey)在《计算数学》(Mathematics of Computation)一书中发表了“用机器计算复数序列傅里叶级数的一种算法”,即“快速傅里叶变换算法”以来,随着信息科学与计算机技术的不断发展,数字信号处理逐渐成为一门具有完整理论体系和丰富研究领域的新兴学科,在通信、工业控制与自动化、消费电子、国防、军事、医疗等领域得到了广泛的应用。

1.1 DSP 的基本概念

1. 信号的概念

信号是承载、传输信息的媒介或者物理表示,它随时间或空间的变化而变化,是可测量的。信号是信息的载体,几乎所有的工程技术领域都要涉及信号问题。常见信号的表现形式可以是声、光、电、磁、热、机械等,而本书在研究过程中所“感兴趣”的有用信号,常常是与其他同类或是异类信号混合在一起的。通俗地讲,信号就是消息,而信息是包含在信号或消息中的未知内容。例如,上面这段文字就是信号,而其所表达的意思就是信息。信号可以按照性质的不同进行分类。例如,按照维数可以将语音信号划分为一维信号,而把图像划分为二维信号;按照周期特征又可以分为周期信号和非周期信号;但从信号处理的角度看,一般将信号划分为模拟信号、离散信号和数字信号三大类。

(1)模拟信号:信号随时间(空间)连续变化,幅值是连续的。自然界中大部分信号是模拟信号。

(2)离散信号:信号随时间(空间)以一定的规律离散变化,幅值是连续的。自然界中这样的信号很少,一般通过对模拟信号的采样形成,故又称采样信号。离散信号是本书进行理论分析的主要研究对象。

(3)数字信号:信号随时间(空间)以一定的规律离散变化,幅值是量化的,一般可通过对离散信号进行量化编码得到。

2. 信号处理

信号处理的目的是就要从一大堆混合的、杂乱的信息中提取或增强有用的信息。实质上,信号处理就是提取、增强、存储和传输有用信息的一种运算。信号处理的内容主要包括滤波、变换、频谱分析、压缩、识别与合成等。

针对不同的信号(模拟信号、离散信号、数字信号)有不同的处理方式。一般来说,数字系统处理的对象是数字信号,模拟系统处理的对象是模拟信号,但是,如果系统中增加了模/数转换器(Analog-to-Digital Converter, A/D)和数/模转换器(Digital-to-Analog

Converter, D/A), 则数字系统可以处理模拟信号, 而模拟系统也可以处理数字信号。两种系统不同之处是对信号处理的方式不同。数字系统采用数值计算的方法, 完成对数字信号的处理(采集、变换、分析、综合、估值与识别等); 而模拟系统则通过一些模拟元器件, 如电阻、电容、电感等无源器件和运算放大器等有源器件组成电路, 来完成对信号的处理。

3. 数字信号处理

数字信号处理是把信号用数字或符号表示的序列, 通过计算机或通用(专用)的信号处理设备, 用数字的数值计算方法处理(滤波、变换、压缩、增强、估值与识别等), 以达到提取有用信息便于应用的目的。数字信号处理的效果, 或是通过滤波消除噪声, 或是进行频谱分析, 或是用以提取特征参数, 或是进行编码压缩等。完成不同目的所采用的计算方法(统称算法)也不同, 可以说, 数字信号处理的实现就是算法的实现。采用数字信号处理, 相对于模拟信号处理(Analog Signal Processing, ASP)有很大的优越性, 其优越性表现在软件可实现、精度高、灵活性好、可靠性高、易于大规模集成、设备尺寸小、造价低、速度快等方面。随着人们对实时信号处理要求的不断提高和大规模集成电路技术的迅速发展, 数字信号处理技术也在发生着日新月异的变革, 实时数字信号处理技术的核心和标志是数字信号处理器。

1.2 DSP 系统及其实现

数字信号处理系统并不是孤立的数字系统, 一般是以数字处理系统为核心, 结合 A/D 和 D/A 转换器、滤波和放大器等子系统构成。其处理内容主要包括滤波、变换、频谱分析、压缩、估计与识别等。数字信号处理过程中必定包含数字化处理系统, 由数字化处理器或程序完成对数字信号的处理。图 1-1 所示为一个典型的模拟信号数字处理系统, 即实时处理时域连续信号的数字信号处理系统。

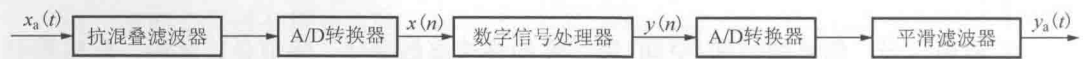


图 1-1 模拟信号的数字处理系统框图

图 1-1 中, 抗混叠滤波器(Antialiasing Filter)又称预滤波器, 是用以将输入模拟信号 $x_a(t)$ 中高于折叠频率(在数值上等于采样频率 f_s 的一半)的分量滤除掉, 以免信号经过采样后发生频谱混叠, 造成信息丢失。平滑滤波器(模拟低通滤波器), 又称抗镜像滤波器(Anti-image Filter), 是用以完成模拟信号的重建, 即消除 D/A 转换器“阶梯状”输出所造成的高频噪声, 从而得到波形平滑的输出模拟信号 $y_a(t)$ 。

典型模拟信号的处理过程一般分为三个环节。

- (1) 模拟输入信号 $x_a(t)$ 经过抗混叠预处理后被采样、量化为有限位, 这个过程可看成是模拟前端处理, 其核心是 A/D 转换器。
- (2) 已经数字化的信号 $x(n)$, 经过数字信号处理器处理后输出数字信号 $y(n)$, 这是整个系统的核心环节。

(3) 利用 D/A 转换器, 经平滑滤波, 将处理结果平滑成所需要的模拟信号送到输出。

一般情况下, 在实际数字处理系统中, 图 1-1 中的每一个环节都不是必要的。例如, 有时要处理的输入信号本身已经是数字信号, 则图中的 A/D 转换器部分就可以去掉; 有些系统只要求数字输出, 如用于打印、显示、存储等, 则图中的 D/A 转换器部分就可以去掉; 纯数字系统则只需要数字信号处理器这一核心部分就行了。

数字信号处理的实现, 大体上可以分为三大类, 即软件实现法、硬件实现法以及软硬件结合的实现方法。

(1) 软件实现法: 是按照数字信号处理的原理和算法, 编写程序或利用现有程序在计算机上实现的, 其中 Mathworks 公司的 MATLAB 软件(一种交互式 and 基于矩阵体系的软件, 主要用于科学工程数值计算和可视化)是这方面成功的范例。当前, 国内外研究机构、公司不断推出不同用途的数字信号处理软件包, 如美国 National Instruments 公司的信号测量与分析软件 LabVIEW、Cadence 公司的信号和通信分析设计软件 SPW, 以及 TI 公司的 DSP 等。这种实现方法速度较慢, 但经济实用(可重复使用), 因此多用于教学和科研方面。

在许多非实时的应用场合, 可以采用软件实现法。例如, 处理一盘混有噪声的录像(音)带, 可以将图像(声音)信号转换成数字信号并存入计算机, 用较长的时间一帧帧地处理这些数据。处理完毕后, 再实时地将处理结果还原成一盘清晰的录像(音)带。普通计算机即可完成上述任务, 而不必花费较大的代价去设计一台专用数字计算机。

(2) 硬件实现法: 是按照具体的要求和算法设计硬件结构图, 用乘法器、加法器、延时器、控制器、存储器以及 I/O 接口部件实现的一种方法。其特点是运算速度快, 可以达到实时处理的要求, 但是不灵活。

(3) 软硬件结合的实现方法: 首先可以利用单片机的硬件环境配以恰当的信号处理软件来实现, 可以直接用于工程实际, 如数控机床、医疗仪器设备等。其次, 可以使用专用数字信号处理芯片, 即数字信号处理器(Digital Signal Processing, DSP), 经过简单编程来实现。这种方法目前发展最为迅速, 常用的 DSP 专用芯片较之单片机有着更为突出的优点, 例如, DSP 内部有专用的乘法器和累加器并采用流水线工作方式及并行处理结构, 总线多、速度快, 内嵌有信号处理的常用指令。

目前, DSP 专用芯片正高速发展, 它速度快、体积小、性能优良且价格不断下降, 用 DSP 专用芯片实现数字信号处理的技术已成为工程技术领域的主要方法。

1.3 振动信号及其基本描述

振动学是一门交叉理论学科, 它以数学、物理、实验和计算技术为基础, 研究各种振动现象的机理、共性、特性, 阐明振动的基本规律。现已成为声学、光学、电工学、无线电学、近代物理学以及化学、生物学、气象学等学科中必不可少的理论基础。振动的研究在日常生活、生产中得到广泛的应用。例如, 利用振动制成了按摩器、减肥器等医疗器械。偏心振动机(俗称蛤蟆夯)和振捣器是建筑工人必不可少的振动机械。

1.3.1 周期振动信号的合成和分解

1. 简谐振动及其表示

简谐振动是最简单的振动形式，也是最重要的振动形式。物体作简谐振动时，位移 x 和时间 t 的关系可用三角函数表示为

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-1)$$

图 1-2 所示的波形表示了式 (1-1) 所描述的运动，它可以看成是左边半径为 A 的圆上一点作等角速度运动时矢径在 x 轴上的投影。

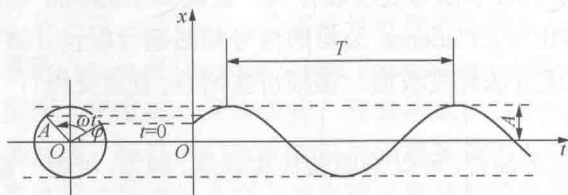


图 1-2 物体的简谐振动

简谐振动的速度和加速度就是位移表达式 (1-1) 关于时间 t 的一阶和二阶导数：

$$v = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) = \omega A \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-2)$$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi + \pi) \quad (1-3)$$

可见，若位移为简谐函数，则其速度和加速度也是简谐函数，且与位移具有相同的频率，但在相位上，速度和加速度分别比位移超前 $\pi/2$ 和 π ，如图 1-2 所示。

由式 (1-1) 和式 (1-3) 可以看出：

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1-4)$$

这表明在简谐振动中，加速度的大小和位移成正比，而方向和位移相反，始终指向平衡位置。

2. 周期振动信号及其分解

简谐振动是一种最简单的周期振动，实际中更多的是非周期振动。

周期振动只要满足一定条件，就可以分解为简谐振动，条件如下。

(1) 函数是在一个周期内连续或者只有有限个间断点，而且间断点上的函数的左右极限都存在。

(2) 在一个周期内只有有限个极大值和极小值。

把一个周期函数展开成傅里叶级数，即展开成一系列简谐函数之和，称为谐波分析。谐波分析对于分析振动位移、速度和加速度的波形具有重要意义，如图 1-3 所示。

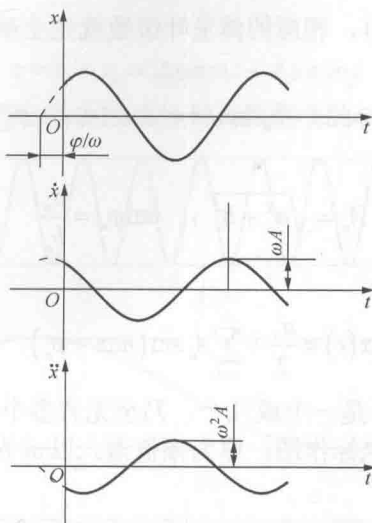


图 1-3 简谐振动的位移、速度和加速度

假定 $x(t)$ 为满足上述条件、周期为 T 的周期振动函数，则可展开成傅里叶级数的形式：

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)
 \end{aligned} \quad (1-5)$$

式中， $\omega = 2\pi/T$ ， a_0 、 a_n 、 b_n 均为待定常数。

由三角函数的正交性

$$\begin{cases} \int_0^T \cos m\omega t \cos n\omega t dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \end{cases} \\ \int_0^T \sin m\omega t \sin n\omega t dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \end{cases} \\ \int_0^T \sin m\omega t \cos n\omega t dt = \int_0^T \cos m\omega t \sin n\omega t dt \end{cases} \quad (1-6)$$

和关系式

$$\begin{cases} \int_0^T \cos n\omega t dt = 0, & n \neq 0 \\ \int_0^T \sin n\omega t dt = 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-7)$$

可得到

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t dt, & n = 1, 2, 3, \dots \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt, & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (1-8)$$

将 a_0 、 b_0 和 b_n 代入式 (1-5)，相应的傅里叶级数就完全确定。

对于特定的 n ，有

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (1-9)$$

式中

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan \varphi_n = \frac{a_n}{b_n} \quad (1-10)$$

于是式 (1-5) 又可表示为

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (1-11)$$

以上分析表明，周期信号是一个或几个，乃至无穷多个简谐信号的叠加。

以 ω 为横坐标、 A_n 为纵坐标作图，称为幅值谱。以 ω 为横坐标、 φ_n 为纵坐标作图，称为相位谱。

由于 n 为正整数，所以各频率成分都是 ω 的整数倍。各频率成分所对应的谱线是离散的，称为线谱，如图 1-4 所示。

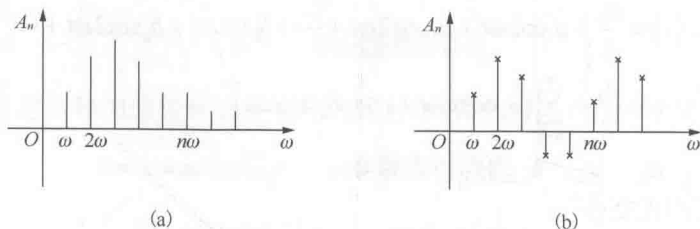


图 1-4 简谐信号的线谱

通常，称 ω 为基频，而称 $n\omega$ 为 n 次谐波。

3. 简谐振动的合成

1) 同方向振动的合成

(1) 同频率振动信号的合成。设有两个频率相同的简谐振动信号：

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1-12)$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (1-13)$$

合成后也是相同频率的简谐振动：

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-14)$$

式中，

$$A = \sqrt{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2} \quad (1-15)$$

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (1-16)$$

(2) 不同频率振动信号的合成。设有两个不同频率的简谐振动：

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t, \quad x_2 = A_2 \sin \omega_2 t \quad (1-17)$$

若 $\omega_1 < \omega_2$ ，则合成为

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t \quad (1-18)$$

其波形如图 1-5 所示，其合成运动的性质好似高频振动的轴线被低频所调制。

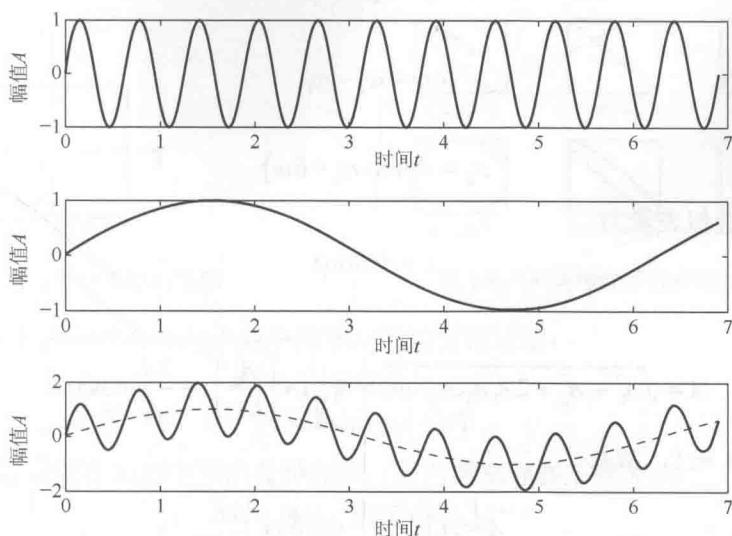
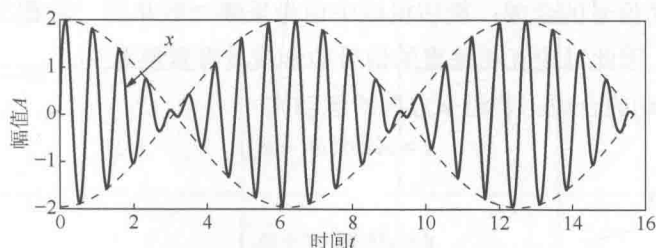


图 1-5 频率不同的简谐信号合成

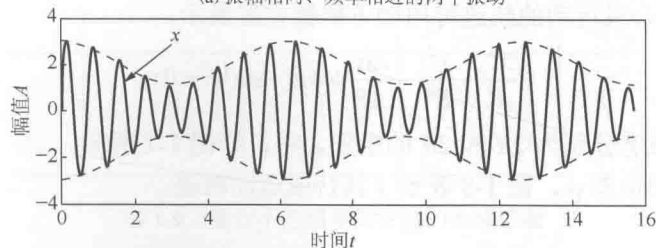
若 $\omega_1 \approx \omega_2$ ，且 $A_1 = A_2 = A$ ，有

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t = 2A \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \quad (1-19)$$

显然，合成运动的振幅以 $2A \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right)$ 变化，出现了“拍”波现象，其波形如图 1-6(a) 所示，其中拍频为 $\omega_2 - \omega_1$ 。



(a) 振幅相同、频率相近的两个振动



(b) 振幅不同、频率相近的两个振动

图 1-6 有拍频的振动波形

若 $A_2 \ll A_1$ ，设

$$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t \quad (1-20)$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t \quad (1-21)$$

令

$$\delta \omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (1-22)$$

则

$$x_2 = A_2 \sin(\omega_1 + \delta \omega) \quad (1-23)$$

则合成运动可近似表示为

$$x = A \sin \omega_1 t \quad (1-24)$$

式中，

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \delta \omega t} = A_1 \sqrt{1 + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + \frac{2A_2}{A_1} \cos \delta \omega t} \quad (1-25)$$

由于 $A_2 / A_1 \ll 1$ ，故有

$$A \approx A_1 \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \cos \delta \omega t \right) \quad (1-26)$$

这时，合成运动可近似的表示为

$$x = A_1 \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \cos \delta \omega t \right) \sin \omega_1 t = A_1 (1 + m \cos \delta \omega t) \sin \omega_1 t \quad (1-27)$$

该合成信号的最大振幅为 $A_{\max} = A_1 + A_2$ ，最小振幅为 $A_{\min} = A_1 - A_2$ 。其“拍”波波形如图 1-6(b) 所示。

2) 垂直方向振动的合成

垂直方向振动信号的合成：旋转机械中信号采集一般从同一轴截面互相垂直的方向上的两个点取得，因此讨论互相垂直的信号合成具有重要意义。

(1) 同频率振动的合成：若沿 x 方向的运动为

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1-28)$$

沿 y 方向的运动为

$$y = B \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (1-29)$$

设 $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ，则合成运动的轨迹可用如下椭圆方程表示：

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi - \sin^2 \varphi = 0 \quad (1-30)$$

合成运动将位于长宽分别为 $2A$ 和 $2B$ 的矩形之中，如图 1-7 所示。

对于不同的相位差 φ ，图 1-8 表示了其合成运动轨迹。