博士后文库
中国博士后科学基金资助出版

非线性波动方程适定性新进展

韩 伟 著

科学出版社

博士后文库
中国博士后科学基金资助出版

非线性波动方程适定性新进展

韩 伟 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

非线性波动方程是最重要的偏微分方程之一. 本书主要关心非线性波动方程(小)初值柯西问题(或区域外问题) 经典解生命跨度的上界估计与下界估计, 解的破裂及其解的整体存在性等性质. 全书共八章, 其研究主题是非线性波动方程适定性理论新进展, 系作者博士论文和博士后论文的主要内容, 其中涉及了数学分析的一些基本理论, 尤其是常微分方程与泛函分析, 偏微分方程 Sobolev 嵌入定理以及调和分析等理论. 本书的重点放在处理问题的思想和适定性理论分析上, 对基本内容, 作者力求由浅入深, 让读者既理解掌握知识, 又能体会到问题的本质, 使读者学有所得.

本书可供应用数学专业偏微分方程、动力系统以及非线性分析等方向研究生学习, 也可供从事非线性理论的科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性波动方程适定性新进展/韩伟著. —北京：科学出版社, 2017.1
(博士后文库)

ISBN 978-7-03-051697-8

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①非线性方程-波动方程-研究 Ⅳ. ①O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 022844 号

责任编辑: 李静科 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 2 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 2 月第一次印刷 印张: 9 1/2
字数: 180 000

定价: 58.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《博士后文库》编委会名单

《博士后文库》序言

1985 年，在李政道先生的倡议和邓小平同志的亲自关怀下，我国建立了博士后制度，同时设立了博士后科学基金。30 多年来，在党和国家的高度重视下，在社会各界的关心和支持下，博士后制度为我国培养了一大批青年高层次创新人才。在这一过程中，博士后科学基金发挥了不可替代的独特作用。

博士后科学基金是中国特色博士后制度的重要组成部分，专门用于资助博士后研究人员开展创新探索。博士后科学基金的资助，对正处于独立科研生涯起步阶段的博士后研究人员来说，适逢其时，有利于培养他们独立的科研人格、在选题方面的竞争意识以及负责的精神，是他们独立从事科研工作的“第一桶金”。尽管博士后科学基金资助金额不大，但对博士后青年创新人才的培养和激励作用不可估量。四两拨千斤，博士后科学基金有效地推动了博士后研究人员迅速成长为高水平的研究人才，“小基金发挥了大作用”。

在博士后科学基金的资助下，博士后研究人员的优秀学术成果不断涌现。2013 年，为提高博士后科学基金的资助效益，中国博士后科学基金会联合科学出版社开展了博士后优秀学术专著出版资助工作，通过专家评审遴选出优秀的博士后学术著作，收入《博士后文库》，由博士后科学基金资助、科学出版社出版。我们希望，借此打造专属于博士后学术创新的旗舰图书品牌，激励博士后研究人员潜心科研，扎实治学，提升博士后优秀学术成果的社会影响力。

2015 年，国务院办公厅印发了《关于改革完善博士后制度的意见》（国办发〔2015〕87 号），将“实施自然科学、人文社会科学优秀博士后论著出版支持计划”作为“十三五”期间博士后工作的重要内容和提升博士后研究人员培养质量的重要手段，这更加凸显了出版资助工作的意义。我相信，我们提供的这个出版资助平台将对博士后研究人员激发创新智慧、凝聚创新力量发挥独特的作用，促使博士后研究人员的创新成果更好地服务于创新驱动发展战略和创新型国家的建设。

祝愿广大博士后研究人员在博士后科学基金的资助下早日成长为栋梁之才，为实现中华民族伟大复兴的中国梦做出更大的贡献。

杨卫

中国博士后科学基金会理事长

前　言

非线性波动方程刻画了现实世界中许多重要的物理现象, 是重要的偏微分方程之一. 本书主要关心非线性波动方程 (小) 初值 Cauchy 问题 (或区域外问题) 经典解生命跨度的上界估计与下界估计, 解的破裂及其解的整体存在性等性质. 近年来, 在国家自然科学基金支持下, 在非线性波动方程适定性理论方面进行了一些研究工作, 本书是我们最近几年在学习和研究工作上的总结.

全书共八章. 第 1 章简要介绍非线性波动方程 (小) 初值问题解的生命跨度、破裂性态、整体存在性以及渐近行为的历史发展和研究进展, 前人在处理与本书有关的非线性波动方程问题方面的相关工作及研究经典解的适定性理论的方法; 进一步我们对非线性波动方程小初值的相关问题的提法及处理上的大体思路给出简要说明; 同时还简单陈述了本书的主要结果. 第 2 章介绍外区域上变系数的且带次临界指数的高维空间中半线性波动方程的初边值问题解的破裂性质. 第 3 章介绍外区域上变系数的且带次临界指数的二维空间的半线性波动方程的初边值问题解的破裂性质. 第 4 章介绍外区域上变系数的且带次临界指数的一维空间中半线性波动方程初边值问题解的破裂性质. 第 5 章介绍外区域上变系数的且带次临界指数的 n 维空间中的导数半线性波动方程的初边值问题解的破裂性质. 第 6 章介绍外区域上一般形式的一维拟线性波动方程 $u_{tt}-u_{xx}=b(u,Du)u_{xx}+2a_0(u,Du)u_{tx}+F(u,Du)$ 的初边值问题, 研究在小初值、零边值的条件下, 该类初边值问题解的生命跨度的精确下界估计, 且得到的结果与初值问题情形的相应结果不同. 第 7 章将证明一般的非线性波动方程在 $n=2$ 维以及三次非线性项的情形下带有小初值的 Cauchy 问题的经典解的生命跨度的精确下界估计 (问题参见文献 [43]). 第 8 章研究高维情形 ($d\geqslant 6$) 的 Wave-Hartree 方程 $u_{tt}-\Delta u+(|x|^{-\gamma}*|u|^2)u=0$ 的整体适定性和散射理论.

本书的研究主题是非线性波动方程适定性理论新进展, 系作者博士论文和博士后论文的主要内容, 其中涉及数学分析的一些基本理论, 尤其是常微分方程与泛函分析, 偏微分方程 Sobolev 嵌入定理以及调和分析等理论. 本书的重点放在处理问题的思想和适定性理论分析上, 对基本内容, 作者力求做到由浅入深, 让读者既理解掌握知识, 又能体会到问题的本质, 使读者学有所得. 本书可供数学偏微分方程、动力系统以及非线性分析等方向研究生学习, 也可供从事非线性理论的科研工作者参考.

本书能得以完成和出版, 得到了国家自然科学基金和科学出版社的大力支持, 并得到了国内外同行的帮助和鼓励, 特别是我的研究生路飞、祝倩倩、吕淑佳等帮助修改书稿, 在此表示感谢.

由于时间仓促, 书中不妥之处在所难免, 望读者不吝指出.

韩　伟

2016 年 8 月于中北大学理学院

目　　录

第 1 章　绪　　论

1.1　发展历史与研究现状

波动方程刻画了现实世界中许多重要的物理现象，是最重要的偏微分方程之一. 对非线性波动方程的研究是国际前沿的研究方向，而非线性波动方程解的生命跨度估计、解的破裂、整体存在性以及解的渐近行为（散射理论）是这方面一个重要的研究课题. 所谓问题的经典解的 "生命跨度"$T(\varepsilon)$ 是指经典解的最大存在时间高度. 本书将讨论非线性波动方程 (小) 初值 Cauchy 问题 (或区域外问题) 经典解生命跨度的上界估计与下界估计、解的破裂以及解的整体存在性等，有如下五方面的结果: ①将常系数半线性波动方程和 Strauss 猜想有关的次临界指数时解的破裂结果推广到外区域及变系数的情形. ②得到了外区域上所有空间维数的变系数的导数半线性波动方程问题解的破裂结果并给出了生命跨度的上界估计. ③得到了一般形式的一维拟线性波动方程的初边值问题经典解的生命跨度的精确下界估计，所得到的估计与 Cauchy 问题是不同的，说明不是 Cauchy 问题的平凡推广. ④得到了一般形式拟线性波动方程小初值 Cauchy 问题在二维及三次非线性情况下，李大潜院士和陈韵梅教授的书中[43] 生命跨度结果的下界估计的精确性. ⑤得到了高维情形 $(d \geqslant 6)$ 的带有非局部卷积型非线性项的波动方程解的整体适定性和散射理论. 为了清楚地叙述它们，下面分别对其进行介绍.

首先，关于常系数的半线性波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \Box u = |u|^p, (x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,+\infty), \quad n \geqslant 1, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x), u_t(0,x) = \varepsilon g(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中，$\Box = \partial_t^2 - \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$ 是一个波算子，$\varepsilon > 0$ 是一个小的参数. 其中初值 (f,g) 是具有紧支集的非负的函数. 对于常系数的半线性波动方程的 Cauchy 问题，已经有大量的文献做了研究，详细内容可以参见文献 [13]~[15],[21],[25],[26],[43],[53],[57],[62]~[65],[70], [72]~[76].

一般地，当 $n=1$ 时，$p_1(1) = +\infty$; 而当 $n \geqslant 2$ 时，令 $p_1(n)$ 是如下二次方程

$$(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$$

的正根. 这个数 $p_1(n)$ 是半线性波动方程问题 (1.1.1) 的临界指数，它来源于迭代

过程中的一个权重函数 $(1+|t-|x||)^{(n-1)p/2-(n+1)/2}$ 的可积性，而这个权重函数是由自由波动方程解的衰减 $(1+t+|x|)^{(n-1)/2}$ 的时空积分得到的. 由于它把区间 $(1,+\infty)$ 分成了两个子区间, 使得: 如果 $p\in(1,p_1(n))$(次临界情形), 则带有非负初值的解必将在有限时间内破裂; 如果 $p\in(p_1(n),+\infty)$(超临界情形), 则对于小初值 (且有足够的正则性) 问题的解必将整体存在 (可以参看文献 [63]), 关于问题的整体解的存在性与不存在性的问题有时也称为 Strauss 猜想[62]. 关于这个猜想的证明有一段有趣且激动人心的历史, 它横跨三十多年. 这里我们仅仅给出一个简要的总结, 更详细的讨论读者可以参看文献 [14],[19],[41],[63] 以及其中的相关文献.

对于常系数的半线性波动方程问题 (1.1.1), 在 $n=3$ 的情形首先由 F.John 在 1979 年做了研究[21], 他证明了: 如果 $p>p_1(3)=1+\sqrt{2}$, 而且初值充分小, 则问题的整体解总是存在的. 然而, 如果 $1<p<p_1(3)=1+\sqrt{2}$, 则对于任何非平凡的初值 f 和 g, 问题没有整体解存在, 即问题的解总在有限时间内破裂. 这个数 $p_1(3)=1+\sqrt{2}$ 最初是在 Strauss 的关于非线性 Klein-Gordon 方程的低能量散射的研究工作[62] 中出现的. 这使得他猜想：当 $n\geqslant 2$, 当初值充分小, 且当 p 大于临界指数 $p_1(n)$ 时, 问题 (1.1.1) 的整体解总是存在的. 这个猜想当 $n=2$ 的情形已经由 R.T.Glassey 给出证明[15]. 对于高维空间的情形, 当维数 $n=4$ 时由周忆教授[75] 证明了整体存在性, H.Lindblad 和 C.D.Sogge 教授在文献 [49] 中证明了维数为 $3\leqslant n\leqslant 8$ 时的整体存在性. 并且 V.Georgiev, H.Lindblad 和 C.D.Sogge [13] 证明了当空间维数 $n\geqslant 4$ 并且 $p_1(n)<p\leqslant\dfrac{n+3}{n-1}$ 时, 对于小初值的情形, 问题 (1.1.1) 存在整体解 (另外还可以参见文献 [38],[49]). 后来, 对于 $p>p_1(n)$ 且 $n\geqslant 4$ 的情形, D.Tataru[69] 给出了简单的证明. R.T.Glassey[14] 和 T.C.Sideris[57] 对于 $1<p<p_1(n)$ 且 $n=2$ 和所有 $n\geqslant 4$ 的情形分别得到了有关的破裂结果. Sideris 的破裂结果的证明是非常精细且需要技巧的，他使用了包括球调和函数和其他特殊函数的复杂的计算. 他的证明被 M.A.Rammaha[52] 和 H.Jiao 和 Z.Zhou[19] 做了简化. 2005 年, B.Yordanov 和 Q.S.Zhang[70] 利用一个简单的试探函数, 对 Sideris 的证明方法进一步做了简化, 更重要的是, 他们利用这个方法对于常系数且带有势函数的波动方程 (1.1.1) 建立了有关的破裂现象. 另一方面, 对于临界的情形 $p=p_1(n)$, J.Schaeffer[53] 对于小初值在 $n=2,3$ 的情形下证明了临界指数也属于破裂情形 (参考文献 [64],[73],[74]). B.Yordanov 和 Q.S.Zhang[71] 和周忆教授[77] 分别利用不同的方法独立地把 Sideris 的解的破裂结果推广到对所有的 $n\geqslant 4$ 时, $p=p_1(n)$.

近年来, 对于初边值问题 (1.1.1) 在空间维数 $n=3,4$ 的情形, 当 $p>p_1(n)$ 时, K. Hidano 等[16] 建立了整体存在性. 相关结果可以参考 C.D.Sogge 和 C.B.Wang 的工作[60]. 然而, 就我们所知, 还没有文献考虑在外区域上变系数的半线性波动方

程初边值问题解的破裂性质.

本书研究了如下外区域上变系数的带次临界指数的 n 维空间中半线性波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = |u|^p, (x,t) \in \Omega^c \times (0,+\infty), \quad n \geqslant 2, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x), u_t(0,x) = \varepsilon g(x), \quad x \in \Omega^c, \\ u(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{对于} t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

这里 $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ 表示一个关于变量 $x \in \Omega^c$ 的光滑的实函数构成的实对称 $n \times n$ 矩阵, 而且存在某个正常数 $C > 0$, 使得

$$C^{-1}|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant C|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n, x \in \Omega^c,$$

这里以及以后使用爱因斯坦记号，重复指标表示求和, 并且 $a_{ij}(x)$ 满足

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad \text{当} |x| \geqslant R,$$

其中 δ_{ij} 表示 Kronecker Delta 函数. Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个光滑的紧的障碍 (区域), Ω^c 是它的补集.

当空间维数为 $n \geqslant 2$ 时, 不失一般性, 我们假定 $0 \in \Omega \subset\subset B_R$, 其中 B_R 是一个以原点为中心，以 R 为半径的球, 并且 $\mathrm{supp}\{f,g\} \subset B_R$, 且指数 $p \in (1, p_1(n))$. 其中 $p_1(n)$ 是二次方程 $(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$ 的正根, 这个数 $p_1(n)$ 是半线性波动方程 (1.1.2) 的临界指数 (参看文献 [63]). 关于问题 (1.1.2)，我们考虑具有紧支集的非负的初值 $(f,g) \in H^1(\Omega^c) \times L^2(\Omega^c)$,$n \geqslant 2$ 且满足

$$f(x) \geqslant 0, g(x) \geqslant 0, \text{a.e.}, f(x) = g(x) = 0, \quad \text{当} |x| > R, \text{ 且 } f(x) \not\equiv 0. \tag{1.1.3}$$

当空间维数为 $n = 1$ 时, 外区域上的初边值问题退化为半无界区域 $[0, +\infty)$ 上的初边值问题, 我们研究了如下外区域上变系数的且带次临界指数的一维空间中的半线性波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - \partial_x(a(x)\partial_x u) = |u|^p, \quad x > 0, t > 0, n = 1, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x), u_t(0,x) = \varepsilon g(x), \quad x > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad \text{对于} t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.1.4}$$

其中, $a(x)$ 是关于变量 $x \in (0, +\infty)$ 的一个光滑的实函数, 使得存在某个正常数 $C \geqslant 1$,

$$C^{-1} \leqslant a(x) \leqslant C, \quad \forall x > 0,$$

且

$$a(x)=1,\quad 当x\geqslant R.$$

当 $n=1$ 时, 不失一般性, 我们假定 $\operatorname{supp}\{f,g\}\subset\{x|0<x\leqslant R\}$. 对于问题 (1.1.4), 我们考虑维数 $n=1$ 且指数 $p\in(1,+\infty)$, 其中 $p_1(1)=+\infty$. 这个数 $p_1(1)=+\infty$ 称为一维半线性波动方程 (1.1.4) 的临界指数 (参考文献 [63]). 在一维情形时, 半线性波动方程 (1.1.4) 的临界指数为 $p_1(1)=+\infty$. 且关于问题 (1.1.4), 我们考虑 $n=1$ 时具有紧支集的非负的初值 $(f,g)\in H^1((0,+\infty))\times L^2((0,+\infty))$, 并且满足

$$f(x)\geqslant 0, g(x)\geqslant 0, \text{a.e.}, f(x)=g(x)=0,\quad 当x>R, 且\ f(x)\not\equiv 0. \tag{1.1.5}$$

对于不同空间维数的情形, 关于变系数的半线性波动方程外问题解的生命跨度的结果不尽相同, 分别叙述如下:

i) 在高维的情形, 即当 $n\geqslant 3$ 时, 我们得到如下结果:

定理 1.1.1　若 $(f,g)\in H^1(\Omega^c)\times L^2(\Omega^c)$ 且满足 (1.1.3), $\partial\Omega$ 是光滑的, 空间维数 $n\geqslant 3$. 假定问题 (1.1.2) 有一个解 $(u,u_t)\in C([0,T),H^1(\Omega^c)\times L^2(\Omega^c))$ 使得

$$\operatorname{supp}(u,u_t)\subset\{(x,t):|x|\leqslant t+R\}\cap(\Omega^c\times\mathbf{R}^+).$$

如果 $1<p<p_1(n)$, 则 $T<\infty$, 并且存在一个与 ε 无关的正常数 A_1, 使得

$$T(\varepsilon)\leqslant A_1\varepsilon^{-\frac{2p(p-1)}{2+(n+1)p-(n-1)p^2}}. \tag{1.1.6}$$

ii) 当空间维数 $n=2$ 时, 有如下结果:

定理 1.1.2　若 $(f,g)\in H^1(\Omega^c)\times L^2(\Omega^c)$ 且满足 (1.1.3). $\partial\Omega$ 是光滑的, 空间维数 $n=2$. 假定问题 (1.1.2) 有一个解 $(u,u_t)\in C([0,T),H^1(\Omega^c)\times L^2(\Omega^c))$ 使得 $\operatorname{supp}(u,u_t)\subset\{(x,t):|x|\leqslant t+R\}\cap(\Omega^c\times\mathbf{R}^+)$. 如果 $1<p<p_1(2)=(3+\sqrt{17})/2$, 则 $T<\infty$, 且存在一个与 ε 无关的正常数 A_1, 使得

$$T(\varepsilon)\leqslant A_1T_1(\varepsilon^p), \tag{1.1.7}$$

其中函数 $T_1(\delta)$ 满足如下的方程:

$$\delta^{2(p-1)}\cdot[\ln T_1(\delta)]^{-2(p-1)}\cdot T_1(\delta)^{2+3p-p^2}=1. \tag{1.1.8}$$

iii) 当空间维数 $n=1$ 时, 对于问题 (1.1.4), 得到如下的结果:

定理 1.1.3　令 $(f,g)\in H^1(0,+\infty)\times L^2(0,+\infty)$ 且满足 (1.1.5), 空间维数 $n=1$. 假定问题 (1.1.4) 有一个解 $(u,u_t)\in C([0,T),H^1(0,+\infty)\times L^2(0,+\infty))$ 使得

$$\operatorname{supp}(u,u_t)\subset\{(x,t):0\leqslant x\leqslant t+R,\ t\geqslant 0\}.$$

如果 $1 < p < p_1(1) = +\infty$, 则 $T < \infty$, 并且存在一个与 ε 无关的正常数 A_1, 使得

$$T(\varepsilon) \leqslant A_1 \varepsilon^{-\frac{p(p-1)}{2}}. \tag{1.1.9}$$

其次, 关于常系数的导数半线性波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \Box u = |u_t|^p, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,+\infty), n \geqslant 1, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x), u_t(0,x) = \varepsilon g(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{1.1.10}$$

其中, $\Box = \partial_t^2 - \sum\limits_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ 是一个波算子, $\varepsilon > 0$ 是一个小的参数. 关于问题 (1.1.10), 我们考虑具有紧支集的非负的初值 (f,g).

一般地, 对于维数 $n \geqslant 1$, 令 $p_2(n) = \dfrac{2}{n-1} + 1$, 这个数 $p_2(n)$ 是导数半线性波动方程问题 (1.1.10) 的临界指数 (参看文献 [63]). 关于问题 (1.1.10), 我们考虑具有紧支集的光滑的初值 $f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

关于常系数的导数半线性波动方程问题 (1.1.10), 在维数 $n=3$ 的情形, 解的破裂部分的结果首先由 F.John 于 1981 年在文献 [23] 中证明. 而 $n=3$ 时关于整体存在性的结果首先由 T.C. Sideris 于 1983 年在文献 [58] 中得到. 在 $n=5$ 情形时解的破裂部分结果以及整体存在性的结果都是首先由 J.Schaeffer 于 1983 年在文献 [54] 中得到的. 当 $n=2$ 且 $p=p_2(2)$ 时, 解的破裂结果首先由 Schaeffer [55] 于 1986 年得到证明. 后来, R.Agemi[6] 于 1991 年通过利用与 J.Schaeffer[55](1986 年) 不同的方法证明了当维数 $n=2$, $1 < p \leqslant p_2(2)$ 时解的破裂性态. 在 $n=1$ 的情形, 其本质上来源于 K.Masuda[50], K.Masuda 教授证明了在 $n=1,2,3$ 且 $p=2$ 的情形时解的破裂结果. 后来, 周忆教授于 2001 年在文献 [76] 中给出了当 $n \geqslant 1, p \leqslant p_2(n)$ 时解的破裂结果的一个简单证明.

本书研究了如下外区域上变系数的带次临界指数的 n 维空间中的导数半线性波动方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = |u_t|^p, \quad (x,t) \in \Omega^c \times (0,+\infty), n \geqslant 1, \\ u(0,x) = \varepsilon f(x), u_t(0,x) = \varepsilon g(x), \quad x \in \Omega^c, \\ u(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{对于} t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.1.11}$$

这里 $A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ 表示一个关于变量 $x \in \Omega^c$ 的光滑的实函数构成的实对称 $n \times n$ 矩阵, 而且存在某个正常数 $C > 0$, 使得

$$C^{-1}|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant C|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n, x \in \Omega^c,$$

这里以及以后我们使用爱因斯坦记号，重复指标表示求和, 并且 $a_{ij}(x)$ 满足

$$a_{ij}(x) = \delta_{ij}, \quad \text{当} |x| \geqslant R,$$

其中, δ_{ij} 表示 Kronecker Delta 函数. Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个光滑的紧的障碍 (区域), Ω^c 是它的补集.

我们考虑方程 (1.1.11) 空间维数为 $n \geqslant 1$. 不失一般性, 假定 $0 \in \Omega \subset\subset B_R$, 其中 B_R 是一个以原点为中心, 以 R 为半径的球, 并且 $\operatorname{supp}\{f,g\} \subset B_R$. 对于问题 (1.1.11), 我们考虑维数 $n \geqslant 1$, 且指数 $p \leqslant p_2(n)$, 其中 $p_2(n) = \dfrac{2}{n-1} + 1$, 这个数 $p_2(n)$ 是导数半线性波动方程 (1.1.11) 的临界指数 (参看文献 [63]). 我们考虑具有紧支集的光滑的非负初值 $f, g \in C_0^\infty(\Omega^c), n \geqslant 1$ 且满足

$$f(x) \geqslant 0, g(x) \geqslant 0, f(x) = g(x) = 0, \quad 当 |x| > R 且 g(x) \not\equiv 0. \tag{1.1.12}$$

对于问题 (1.1.11), 得到如下结果:

定理 1.1.4 令 f, g 是具有紧支集的光滑函数, 即 $f, g \in C_0^\infty(\Omega^c)$ 且满足 (1.1.12), 空间维数 $n \geqslant 1$. 假定问题 (1.1.11) 有一个解 $(u, u_t) \in C([0,T), H^1(\Omega^c) \times L^q(\Omega^c))$, 其中 $q = \max(2, p)$ 使得

$$\operatorname{supp}(u, u_t) \subset \{(x,t) : |x| \leqslant t + R\} \cap (\Omega^c \times \mathbf{R}^+).$$

如果 $p \leqslant p_2(n)$, 则 $T < \infty$, 而且, 我们有关于问题 (1.1.11) 解的生命跨度 $T(\varepsilon)$ 的如下的上界估计:

(i) 若 $(n-1)(p-1) < 2$, 则存在一个与 ε 无关的正常数 A_2, 使得

$$T(\varepsilon) \leqslant A_2 \varepsilon^{-\frac{p-1}{1-(n-1)(p-1)/2}}. \tag{1.1.13}$$

(ii) 若 $(n-1)(p-1) = 2$, 则存在一个与 ε 无关的正常数 B_2, 使得

$$T(\varepsilon) \leqslant \exp(B_2 \varepsilon^{-(p-1)}). \tag{1.1.14}$$

第三, 关于一般形式的一维拟线性波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = b(u, Du)u_{xx} + 2a_0(u, Du)u_{tx} + F(u, Du), & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ t = 0 : u = \varepsilon\varphi(x), u_t = \varepsilon\psi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1.1.15}$$

其中

$$D = (\partial/\partial t, \partial/\partial x), \tag{1.1.16}$$

$$\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \tag{1.1.17}$$

且 $\varepsilon > 0$ 是一个小的参数.

令

$$\widetilde{\lambda} = (\lambda; (\lambda_i), i = 0, 1). \tag{1.1.18}$$

假定在 $\widetilde{\lambda} = 0$ 的一个领域内, 比如 $|\widetilde{\lambda}| \leqslant 1$,(1.1.15) 中的函数 $b(\widetilde{\lambda}), a_0(\widetilde{\lambda})$ 和 $F(\widetilde{\lambda})$ 都是充分光滑的函数且满足

$$b(\widetilde{\lambda}), a_0(\widetilde{\lambda}) = O(|\widetilde{\lambda}|^\alpha), \tag{1.1.19}$$

$$F(\widetilde{\lambda}) = O(|\widetilde{\lambda}|^{1+\alpha}), \tag{1.1.20}$$

且

$$a(\widetilde{\lambda}) = 1 + b(\widetilde{\lambda}) \geqslant m_0, \tag{1.1.21}$$

其中, α 是一个整数 $\geqslant 1$, m_0 是一个正的常数.

在文献[46] 中, 李大潜院士、俞新和周忆教授研究了一般形式的一维拟线性波动方程的初值问题 (1.1.15) 的经典解的生命跨度的下界估计. 我们简述他们的结果如下: 存在一个小的正数 ε_0 使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 生命跨度有如下的下界估计:

(i) 一般情况下

$$T(\varepsilon) \geqslant a\varepsilon^{-\alpha/2}; \tag{1.1.22}$$

(ii) 如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{1.1.23}$$

则

$$T(\varepsilon) \geqslant a\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)}. \tag{1.1.24}$$

(iii) 如果

$$\partial_u^\beta F(0,0) = 0, \quad \forall \alpha + 1 \leqslant \beta \leqslant \beta_0, \tag{1.1.25}$$

则

$$T(\varepsilon) \geqslant a\varepsilon^{-\min\left(\frac{\beta_0}{2}, \alpha\right)}, \tag{1.1.26}$$

其中, a 是一个与 ε 无关的正常数, 且 β_0 是一个整数 $> \alpha$. 当 $\beta_0 \geqslant 2\alpha$ 时, (1.1.26) 式变为

$$T(\varepsilon) \geqslant a\varepsilon^{-\alpha}. \tag{1.1.27}$$

应该指出, 对于所有的整数 $\alpha \geqslant 1$, 这些下界估计都是精确的 (参见文献 [35],[40],[48] 和 [76],[78]).

然而就我们所知, 还没有文献研究外区域上一般形式的一维拟线性波动方程的初边值问题的经典解的生命跨度的下界估计. 在一维的情形, 外区域问题转化为在半无界区域 $[0, +\infty)$ 上的初边值问题. 本书的目的就是要研究初边值问题 (1.1.28) 对于所有整数 $\alpha \geqslant 1$ 的经典解的生命跨度.

在文献 [46] 中, 李大潜院士、俞新和周忆教授获得了一般形式的一维拟线性波动方程初值问题的经典解的生命跨度的下界估计. 他们的文章中所用的一个关键点是利用高阶能量积分公式来得到解的先验估计. 然而, 对于一般形式的一维拟线性波动方程初边值问题来说, 很难得到高阶能量积分公式, 因为解在边界处的空间导数是未知的, 因此它不易被估计.

本书研究了如下一般形式的一维拟线性波动方程带有小初值和零边值条件的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = b(u, Du)u_{xx} + 2a_0(u, Du)u_{tx} + F(u, Du), \quad x > 0, t > 0, \\ t = 0 : u = \varepsilon\varphi(x), u_t = \varepsilon\psi(x), \quad x > 0, \\ x = 0 : u = 0, \quad \text{对于} t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.1.28}$$

其中

$$D = (\partial/\partial t, \partial/\partial x), \tag{1.1.29}$$

$$\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+), \tag{1.1.30}$$

且 $\varepsilon > 0$ 是一个小的参数, 且 $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$.

令

$$\widetilde{\lambda} = (\lambda; (\lambda_i), i = 0, 1)\,. \tag{1.1.31}$$

假定在 $\widetilde{\lambda} = 0$ 的一个领域内, 比如 $|\widetilde{\lambda}| \leqslant 1$, (1.1.28) 式中的函数 $b(\widetilde{\lambda}), a_0(\widetilde{\lambda})$ 和 $F(\widetilde{\lambda})$ 都是充分光滑的函数且满足

$$b(\widetilde{\lambda}), a_0(\widetilde{\lambda}) = O(|\widetilde{\lambda}|^\alpha), \tag{1.1.32}$$

$$F(\widetilde{\lambda}) = O(|\widetilde{\lambda}|^{1+\alpha}), \tag{1.1.33}$$

且

$$a(\widetilde{\lambda}) = 1 + b(\widetilde{\lambda}) \geqslant m_0, \tag{1.1.34}$$

其中, α 是一个整数 ($\alpha \geqslant 1$), m_0 是一个正的常数.

关于问题 (1.1.28), 我们得到了如下结果: 存在一个小的正数 ε_0 使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, 生命跨度有如下的下界估计:

(i) 一般情况下

$$T(\varepsilon) \geqslant a\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)}; \tag{1.1.35}$$

(ii) 如果

$$\partial_u^\beta F(0, 0) = 0, \quad \forall \alpha + 1 \leqslant \beta \leqslant \beta_0, \tag{1.1.36}$$

则

$$T(\varepsilon) \geqslant a\varepsilon^{-\min\left(\frac{\beta_0(1+\beta_0)}{2+\beta_0}, \alpha\right)}, \tag{1.1.37}$$

其中, a 是一个与 ε 无关的正常数, 且 β_0 是一个整数 ($\beta_0 > \alpha$). 当 $\dfrac{\beta_0(1+\beta_0)}{2+\beta_0} \geqslant \alpha$ 时, (1.1.37) 式变为

$$T(\varepsilon) \geqslant a\varepsilon^{-\alpha}. \tag{1.1.38}$$