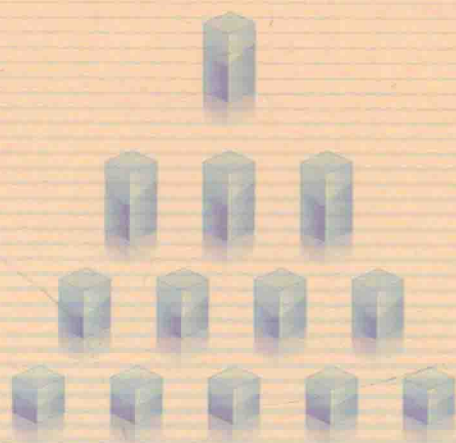




数学素养的内涵、 测评与发展研究

黄友初 著



科学出版社

数学素养的内涵、测评 与发展研究

黄友初 著

教育部人文社会科学青年基金项目(批准号: 14YJC880022)

温州大学出版资助项目

科学出版社

北 京

内 容 简 介

数学素养是目前国内外学者、数学教师所关注的热点之一,如何在数学教育中提升学生的数学素养,已成为各国数学课程改革的重要目标。尽管数学素养一词已耳熟能详,但是何为数学素养?它的内涵是什么,该如何测量学生的数学素养,又该如何才能更好地发展学生的数学素养?这些问题十分重要,目前国内对这方面的研究还不多。本书对国内外的数学素养发展和内涵进行了较为深入的梳理和分析,然后对 PISA 的数学素养测评进行研究,探讨 PISA 数学素养测试的理论基础、试题编制过程和标准、测评过程和结果分析等内容,并对上海和台湾在 PISA 数学素养测评中的结果进行分析和比较。研究认为,数学课程标准和教师的课堂教学是影响学生数学素养发展的两个关键因素研究,对我国数学课程标准进行分析并提出若干建议,并构建了基于数学素养发展的数学课堂教学模式。这对于职前和职后教师的数学教学、数学素养研究者都具有重要的参考价值。

本书可作为高等院校师范生、相关专业的研究生、在职教师和数学教育研究者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学素养的内涵、测评与发展研究/黄友初著. —北京:科学出版社,2016.6
ISBN 978-7-03-049261-6

I. ①数… II. ①黄… III. ①数学教学-教学研究 IV. ①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 144267 号

责任编辑:胡海霞 王胡权/责任校对:张凤琴

责任印制:徐晓晨/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 7 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2016 年 7 月第一次印刷 印张:16 1/2

字数:330 000

定价:59.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

一直以来，教育的主要目的就是培养社会发展所需要的人才，但是在不同的社会背景下，对人才的要求标准是不一样的。数学，是一门基础学科，在教育中占有非常重要的地位，在农耕社会和工业社会中，数学大多扮演着工具性的角色。而随着社会的发展，数学的应用越来越广泛，不但各个领域都直接或者间接用到数学知识，而且它也直接或间接地影响着人们的日常生活。不仅出行、消费、理财、保险都需要用到数学，各类数量、图表和几何信息也充斥着报纸、电视和网络等新旧媒体，如果不能读懂这些信息将会是现代社会意义上的“文盲”。这种现象下，仅仅把数学视为一种工具是不够的，社会的发展对人才所需要的数学提出了新的要求。现代社会所需要的人才不仅要具备一定的数学知识，掌握一定的数学技能，还要有灵活而严密的数学思维，能用数学眼光看待问题，用数学思想形成问题，用数学方法解决问题，这些就是个人的数学素养。可以说，无论是在工作上，还是在个人的日常生活中，现代社会都需要公民具备一定的数学素养。

提倡数学素养，这不仅是社会对人才的需求，在教育体系的内部发展也需要推行数学素养教育。很多学者的研究都已经表明了，考试是目前学生学习数学的重要动力来源。但是，随着教育的普及化，很多时候学生都不需要靠考试成绩进入下一阶段的学习。在这种教育背景下，吸引学生学习数学的只能是数学本身。为此，需要在数学教育中让学生意识到数学的价值，让他们了解到数学对个体发展的重要性，数学在日常生活的的作用，数学对社会发展的价值，这样才能促使他们自发地学习数学。而这就需要推行数学素养教育，让学生在学校的数学学习中，学到真正有价值的数学知识、数学技能和数学思想。而且，随着义务教育的深入开展，未来可能推行十二年义务教育，那么在没有升学考试的情况下，各学校的数学教育质量将会与学生的数学素养监测结果相挂钩。因此，无论是社会的外部还是教育的内部，都需要在学校的数学教育中发展学生的数学素养。

自 20 世纪末以来，各国的数学课程改革都将数学素养作为重要的指导思想。2000 年以来，我国推行的数学课程改革十分重视数学素养，在课程标准中多次提到要在数学教学中发展学生的数学素养。但是，无论是数学课程标准，还是各种纲领性文件中都没有明确阐述数学素养的内涵。在学者的研究文献中，虽然较多论述了数学素养的重要性，但很少就数学素养的内涵进行深入探讨，而数学素养的测评和

发展的研究文献则更少。但是,数学素养的内涵、测评和发展的研究对推行数学素养教育有着十分重要的作用。内涵是实施教育和后续研究的基础,只有厘清了数学素养的内涵才能有目的地实施针对性的数学教育,才能明确测评的目标,而数学素养的测评是检验教学效果的必要手段,也是反馈教育和教学的重要方式。因此,在数学素养的研究中,内涵、测评和发展是三个关键的要素,其中内涵是基础,发展是目的,测评是监控的手段。所以,有必要就数学素养的内涵、测评和发展进行专门的、深入的探讨。

本书首先分析国内外的数学素养发展,然后重点探讨了各种数学素养的内涵,包括国内外数学素养内涵的发展过程、内涵的分类,以及内涵所对应的核心要素等。研究发现,PISA 的数学素养内涵,是一个基于外部联结的个体内部反应的概念,它基于个体终身学习的视角,聚焦于个体在真实世界中的工作和生活。该内涵的阐述对各国的数学素养研究都有着重要的影响,而 PISA2012 中的数学素养内涵比起以往更加具体、更贴近现实生活。随后,本书对国内外的数学素养测评进行梳理和分析,研究发现国内的数学素养测评更多的是基于经验和理论的分析,而国外的研究比较注重方法的科学性,因此研究结果一般具有较强的说服力。鉴于 PISA 研究在国际上的影响,本书重点介绍 PISA 数学素养测量中试题开发的原则、开发过程、题目类型、试题难度,以及测评的结果与数据处理,并对上海和台湾在 PISA 数学素养测量中的结果进行评价和分析。

最后,本书从数学课程改革和数学课堂教学两个视角分析如何在数学教育中更好地发展学生的数学素养。在数学素养与数学课程改革的研究中,对美国、德国、英国、芬兰、澳大利亚、日本、新加坡、南非等主要国家数学课程改革和课程标准中的数学素养情况进行了分析。在论述我国数学课程改革的历程后,对目前的数学课程标准进行分析,指出若干不足,并提出一些建议。在数学素养与数学教学的研究中,从教师教学知识和教师的教学理念入手,在阐明教学知识对教师教学的影响之后,从教学设计和教学过程两个方面对以人为本的数学教学理念进行阐述,并构建基于数学素养发展的数学教学模式。最后,在研究中分别展示小学、初中和高中三个阶段的数学教学案例,用于说明如何在数学教学中更好地发展学生的数学素养。

本书可以为我国数学素养的数学素养教育和深化研究提供理论基础,包括如何构建合理化的数学素养测评体系,如何在数学教育中推行有针对性的课程改革,如何在学校教育中实施有效的课堂教学等,都可以从本书中获取有价值的参考。本书对国内外数学素养的发展情况和研究现状作较为全面的梳理和分析,尤其是对 PISA 中数学素养内涵、测评工具和测评结果的介绍和分析,是目前国内比较全面的文献之一,也是目前国内为数不多,专门阐述数学素养的著作。本书不仅适合数学教育方向的本科生、硕士生和博士生,以及数学教育研究者阅读,也适合从事中

小学数学教学的教师阅读。

本书的撰写过程中得到很多老师和学生的帮忙，在此对他们表示最真挚的谢意！尤其是在台湾访学期间，有幸参与到李国伟教授和刘柏宏教授等所主持的“提升国民素养实施方案数学素养计划”项目研究中，这也激发了作者研究数学素养的热情。虽然作者在该研究团队的时间不长，但是各位学者严谨的治学态度，扎实的学术功底，给作者很大的启发和帮助，在此表示感谢！本书的出版得到温州大学学术著作出版经费的资助，在此表示感谢！最后，感谢科学出版社胡海霞和王胡权的辛勤工作！著书是一项永远都会存在遗憾的工作，尽管耗费了作者大量的精力，但每次阅读时总觉得还有值得完善的地方。

由于能力有限，本书一定还存在诸多不足之处，敬请读者给予批评和指正。

黄友初

2015年10月

目 录

前言

第 1 章	绪论	1
1.1	研究背景	1
1.1.1	数学素养的价值	1
1.1.2	数学素养的缺失	3
1.2	研究问题和意义	5
1.2.1	研究问题	5
1.2.2	研究意义	6
1.3	本书的框架结构	8
第 2 章	我国的数学素养研究	9
2.1	我国数学素养的发展过程	9
2.1.1	政策的引导过程	9
2.1.2	研究文献的特点	13
2.1.3	教育实施的过程	17
2.2	文献中的数学素养内涵	18
2.2.1	无直接阐述时期	18
2.2.2	内涵的组合说和发展说时期	19
2.2.3	内涵阐述的多元化时期	20
2.3	大陆数学素养的测评与发展研究	26
2.3.1	理论探讨	26
2.3.2	实证研究	28
2.4	台湾数学素养的测评与发展研究	31
2.4.1	数学素养的测评	32
2.4.2	数学素养的发展	44
2.5	数学素养研究趋势分析	52
2.5.1	数学素养内涵的研究趋势	53
2.5.2	数学素养研究发展趋势分析	54
2.6	本章小结	56
第 3 章	国外的数学素养研究	58
3.1	数学素养术语的发展	58

3.1.1	《克劳瑟报告》和《考克罗夫特报告》中的数学素养	58
3.1.2	欧美其他文献中的数学素养	60
3.2	不同术语数学素养的各自内涵	62
3.2.1	Numeracy 的内涵	62
3.2.2	Quantitative Literacy 的内涵	65
3.2.3	Mathematical Literacy 的内涵	69
3.2.4	Mathematical Proficiency 的内涵	74
3.2.5	Matheracy 的内涵	79
3.2.6	数学素养内涵的归类	80
3.3	数学素养的测评与发展研究	85
3.3.1	数学素养与个人发展研究	85
3.3.2	个体数学素养测评研究	86
3.3.3	数学素养的发展研究	90
3.4	本章小结	92
第4章	PISA 的数学素养	94
4.1	PISA 简介	94
4.1.1	PISA 的测评对象和方式	94
4.1.2	PISA 的测评科目和目标	98
4.1.3	PISA 的学生抽样和问卷设计	101
4.2	PISA 的数学素养内涵	106
4.2.1	DeSeCo 的核心能力研究	106
4.2.2	PISA 的数学素养定义	109
4.2.3	PISA 数学素养的能力表现	115
4.3	PISA 的数学素养测评	119
4.3.1	试题的编制	119
4.3.2	测评结果的处理	123
4.3.3	试题的类型和分析	133
4.4	我国学生在 PISA 数学素养测评中的表现	141
4.4.1	上海学生在 PISA 数学素养测评中的表现	141
4.4.2	台湾学生在 PISA 数学素养测评中的表现	144
4.4.3	PISA2012 中数学素养与学生、学校、家庭的关系	149
4.5	本章小结	157
第5章	数学素养与数学课程	158
5.1	国外数学课程中的数学素养	158
5.1.1	欧美重视数学素养教育的背景	158
5.1.2	国外对数学素养教育的研究	160
5.1.3	主要国家课程标准中的数学素养	162

5.2 我国数学课程中的数学素养	178
5.2.1 我国数学课程的改革历程	179
5.2.2 数学素养对数学课程改革的影响	184
5.3 基于数学素养的数学课程标准	187
5.3.1 数学课程标准的若干不足	187
5.3.2 数学课程标准修订的若干建议	191
5.4 本章小结	197
第 6 章 数学素养与数学教学	198
6.1 扎实全面的数学教学知识	198
6.1.1 数学教学知识的内涵	198
6.1.2 基于教学知识的数学素养教学	203
6.2 以人为本的教学理念	206
6.2.1 智情结合的教学设计	206
6.2.2 灵活多变的教学过程	211
6.3 教学案例展示	214
6.3.1 小学数学教学案例展示	215
6.3.2 初中数学教学案例展示	220
6.3.3 高中数学教学案例展示	226
6.4 研究总结与展望	232
6.4.1 研究结论与启示	233
6.4.2 研究局限与展望	238
参考文献	240

第1章 绪 论

素养的英文名称为 literacy，它来自拉丁文的 literatus，从中世纪开始便有学者对其进行不同层面的解释，其中最普遍的是认为素养是一种读写算的能力，是日常生活中的一种基本能力(倪惠玉，1994)。随着社会的发展，人们对应具备的素养要求也日益提升。1943年后，“素养”一词开始出现在其他领域，很多专业名词的后面都被加上了“素养”一词，用于表示该专业领域的最基本技能 (Gal, 2002)。自20世纪50年代开始，数学素养逐渐成了数学教育研究的热点，并逐渐成了欧美国家数学课程改革的重要指导，也成了教师采取数学课堂教学方式重要的理论依据。

但是，数学素养的内涵是什么？该如何测评一个人的数学素养？如何在数学教育中发展学生的数学素养？大多数人对这些问题是缺乏了解的。这不仅导致了滥贴数学素养标签的现象，在教育实践中也出现了偏离数学素养本质的倾向。因此，为了更好地研究数学素养，也为了更好地发展学生的数学素养，有必要对这些问题进行探索。本书将就国内外的数学素养内涵研究进行分析，对各种数学素养的测评研究和测量工具进行梳理，并从数学课程改革和数学课堂教学两个方面就如何发展数学素养进行探讨。本章主要就研究背景、研究问题和意义做简单论述。

1.1 研究背景

1.1.1 数学素养的价值

一直以来，教育的根本目的就是促进个体的发展，但是在不同的国家、不同的社会背景下，教育的指导思想是不同的，教育的具体目的也是有区别的。数学，作为一门基础学科，在教育中占有非常重要的地位，尽管在农耕社会和工业社会中数学大多扮演着工具性的角色，但如今，在信息化社会中，它对人的影响是全方位的。目前现在绝大多数的国家都已将数学素养作为国民综合素养的一个重要指标，发展学生的数学素养也成了数学教育的主要目的。研究数学素养不仅是社会发展的需要，也是教育自身发展的需求所在。

1. 社会发展需要数学素养

数学在社会各领域的广泛应用，已被人所熟知。无论是建筑、通信和机械，

还是金融、生物和交通，各领域的发展都离不开数学。数学不仅给人提供了可以直接用到的知识和技能，还训练了人的逻辑思维，培养了人的数学思想，这些都可以间接地影响人们分析问题和处理问题。如果没有一定的数学基础，学生毕业后很难在社会上找到适合自己的工作，即使找到工作了，薄弱的数学基础也会限制个人在事业上的发展。例如，现在的农民也需要用计算机网络来寻找市场，用电脑软件来分析土壤、调节土壤的营养与种子的数量；护士需要用计量单位的转换来确定药剂用量的准确性；生物学家需要用数学模型来刻画生物现象，也需要发展计算机语言来绘制人类的基因；投资者需要用统计数据来分析和预测市场发展；律师需要用概率和统计结果来提供证据，需要严密的逻辑思维来推理和分析等。

不仅在工作上，随着科技的发展，如今我们的日常生活也离不开数学，出行、消费、理财、保险都需要用到数学。数量、图表和几何信息充斥着报纸、电视和网络等新旧媒体，如果不能读懂这些信息将会是现代意义上的“文盲”。《美国学校数学教育的原则和标准》中指出的：在这不断更新的社会里，那些懂得且能运用数学的人们，大大提高了规划他们未来的机会和选择。对数学的精通，为他们打开了通向美好未来之门。相反，这美好之门对缺乏数学能力之人是关闭的。而且，一个只有少数人懂的数学在经济、政治和科学研究中所扮演主要角色的社会与一个民主社会的价值以及经济的需要是不相吻合的（全美数学教师理事会，2004）。

我们应该看到，用数学描述各种现象的数量关系，并通过建构模型进行分析和预测，这种思想是任何学科都难以取代的。而要具备这种能力不是掌握多少数学知识就可以衡量的，也不是会处理多么烦琐的计算就可以达到的，这不仅需要数学知识、数学技能，也需要数学思想，这就是数学素养的体现。随着时代的发展，社会对普通公民的数学提出了新的要求。如今很多不用复杂思维的工作已被自动化所代替，电脑和机器人有效地取代了这些工作，这种情形下，很多工作或情境中的数学是隐含着的，只有具备一定数学素养的人，才能了解不同工作中所需要的数学。因此，未来的社会需要的是具备较高数学素养的人才，他们能用数学的观点看待问题，用数学的思想分析问题，用数学知识和技能解决问题。可以说，无论是在工作上，还是在个人的日常生活中，社会都需要公民具备一定的数学素养。

2. 数学教育需要数学素养

在数学教学中，我们常看到这样一种现象：讲台上教师口沫横飞地讲解和演算，认真的同学努力地抄写或盯着老师的每一个步骤，生怕漏了重要的解法；而对基础较差的同学，不是昏昏欲睡就是双眼茫然。在目前，很多学校所热衷的学习文化其本质上就是要求学生能专心听讲、认真背诵、然后就是不断地做练习和考试。那么，

教师真正的教学目的又是什么呢?难道就是为了让学生能考个好成绩吗?这种学习方式下能真正学到数学的本质吗?我们的数学教育是为培养数学家、数学机器,还是为一般公民能更好地生活和工作提供数学基础?

应该看到,随着社会的发展,必然会从英才教育的模式过渡到大众教育的模式,在全民义务教育的模式下,为考试而学习的现象将会得到改变,吸引学生学习数学的只能是数学的社会价值和数学本身的魅力,而这些都属于素养的范畴;为了学生未来的进一步发展,也需要在数学教育中发展学生的数学素养。例如,孔企平(2002)指出,在过去只要掌握熟练的运算技能就被认为具有数学素质,而在不断信息化发展的社会状况下,许多机械的工作都已经交给计算机处理,对于运算技能的要求在逐步降低,而对采集信息、处理信息的能力,以及运用数学知识解决实际问题等数学素质的要求却在逐步提高。曹才翰和章建跃(2006)认为,数学素质与具有数学的头脑是差不多的,归根到底是指学生要有数学思维方式,能从数学角度出发进行理性思考,有寻求一般性模式、追求简洁与形式完美的思维方式和习惯、追求逻辑的严谨性和结论的可靠性的意识等。朱德全和宋乃庆(2000)指出,随着社会的发展,数学科学不再局限于人们所设想的理性思辨科学,数学教育的任务也不再局限于以传授知识、培养能力为重要理想,在现代大教育观的规范下,数学教育应当着力于以现代数学思想方法观去改造传统的数学形式教育观,力求体现出它的时代文化特征,而这需要教师树立正确的素质教育观。

综上所述可看出,发展学生的数学素养已成为数学教育的主要目的,而如何在具体的教育实践中培养学生的数学素养,是今后各国数学教育需要解决的主要任务。因此,数学教育需要数学素养,需要用数学素养指导数学教育改革,指导学校的数学教学,从而能在数学教育中更好地发展学生的数学素养。

1.1.2 数学素养的缺失

1. 数学素养在数学教育中的缺失

尽管从20世纪80年代开始,我国就提出了素质教育的口号。在1988年颁布并实施的《九年义务教育全日制初级小学数学教学大纲》中将数学看成是一种素养(课程教材研究所,2001)。在1992年颁发实施的《初级中学数学教学大纲》里,首次出现了数学素养一词。2000年以后所推出的各种数学课程标准中,更是将培养学生的数学素养作为重要的教育目标。但是,数学素养在我国数学课程改革中的体现还是不足的,在数学素养的指导下,如何处理“双基”和“四基”的联系,如何体现不同人对数学的不同需求,这些都有待于进一步的商榷;而在缺乏教学指导的情况下,一些教师的数学课堂教学更是偏离了发展学生数学素养的教育目标,要么过于注重学生的获得和过程体验,而忽视了知识的系统性,导致数学学习见木不见林;

要么偏重应试教育,将数学素养等同于数学成绩。

为了提高考试成绩,一些教师在数学教学中采用了大运动量的“题型+解法”的解题训练,学生被逐步训练成了反应灵敏的“解题机器”。在这种背景下,学生的数学智能被降低为解题技能,甚至沦为了一种本能,学生仅能对熟悉的题型产生本能的反应,而对陌生的题型束手无策,无法灵活运用已有数学知识分析和解决问题。虽然说这种应试教育也不自觉地培养了学生的综合素质,但它培养出的综合素质是不全面的,也是不系统的(郑正亚和石循忠,2001)。邹云志和王宝富(2004)指出,目前的数学教育,在内容上缺乏时代感,教学手段仍没有脱离应试、解题的模式,学生参与少,难以唤起学生积极性,而且教学的评估还比较落后。

由此可看出,数学素养在我国的数学教育中还是缺失的。虽然,新课程改革将数学素养上升到了一个很高的高度,但是很多后续的配套措施和研究都还没有跟上。无论是在理论阐述上,还是在教师培训方面,都未能清晰地阐明数学素养的内涵,以及说明基于数学素养的数学教育理念应该为何。这也导致了很多人对数学素养的理解不清晰,要么将其理解为降低知识难度的活动和推行讨论式的课堂教学,乱贴数学素养教育的标签;要么还是坚持原来的教学理念和教学方式。很多学者(肖绍菊,2006;刘和景,2006;全光淑,2014)的调查都表明了,一线数学教师的教学理念和教学方式和新课程的要求还存在不小的差距。而出现这种现象,与我国对数学素养的研究还不够深入也是不无关系的,尤其是对数学素养内涵、测评和发展的研究。

2. 数学素养在教育研究中的缺失

研究数学素养的主要目的,就是希望能认清数学素养的本质特征,把握关键要素,从而实施更为合理的数学教育,通过学校的课堂教学更好地发展学生的数学素养。在这个过程中,数学素养的内涵是基础,只有厘清数学素养的内部生成过程和外部表现,才能有针对性地开展数学教育;但是数学素养发展的效果如何需要通过测评才能检验,也只有通过测评才能找出哪些环节比较薄弱,在这种反馈的基础上进一步发展学生的数学素养。因此,可以认为数学素养的内涵、测评和发展是研究数学素养的三个关键要素。但是,目前国内对这三个要素的研究还是比较缺乏的。

虽然,有关数学素养的研究论文数量众多,但是这其中有很多文献都是探讨数学素养的价值,说明推行数学素养教育的意义,缺乏深入分析数学素养的内涵。黄秦安(2001)指出,虽然从研究现状看,作为整个教育思想,素质教育的各种研究已是硕果累累,然而各门学科的素质教育研究却显得比较薄弱,已有的一些研究成果也存在就事论事、缺乏理论高度等不足。出现数学素养研究数量较多这种现象,和

国家提倡素质教育有很大关系,而出现研究文献缺乏深度,多以论述数学素养的重要性,这和数学素养或数学素质一词出现之后并没有做严格的论证,导致数学素养或数学素质成了一个约定俗成的用语有关。一些学者,尤其是一线数学教师,认为既然不能以应试教育作为数学教育的主要目的,也不能将题海战术作为数学学习的主要方法,也没有明确地告知数学素养教育应该怎么实施,那么只能从自身的经验出发思考数学素养,按照自己的理解实施数学教育。这也导致了一些数学教学偏离了课程标准的要求。

与探讨数学素养的教育价值,以及基于自身经验分析数学素养内涵的文献相比,有关数学素养的测评和学生数学素养的发展方面的文献还比较少。虽然近年来有学者开始关注如何在数学教学中发展学生的数学素养,但是这类研究多以理论分析为主,一些所谓的实证研究,在研究方法上也是值得商榷的。而且,目前专门探讨数学素养的著作还十分缺乏。作者在当当网和淘宝网上输入“数学素养”作为关键词进行搜索,均没有发现有专门研究数学素养的著作。这些都表明了,数学素养虽然是目前数学教育的热点之一,但是对数学素养的研究还是比较缺乏,尤其是深入地探讨数学素养的内涵、规范化的数学素养测评体系,以及合理化的数学素养发展模式。这些都给本书留下了进一步深化和拓展的空间,也凸显了本书的价值。

1.2 研究问题和意义

1.2.1 研究问题

我国的很多数学素养研究文献都已论述了数学素养的价值,这可认为是数学素养研究的第一阶段,主要是为了引起各界对数学素养的重视。但是,研究数学素养的主要目的是为了能更好地在教育中发展学生的数学素养,为此,首先需要了解数学素养的内涵是什么,哪些数学知识与数学素养关系最为密切,数学素养都会体现在学生的哪些数学能力上等。只有把这些关系厘清了,才能有针对性地通过课堂教学发展学生的数学素养。那么教学效果如何,该怎么检验,如何根据检验效果来调整教学,这些问题又需要通过发展数学素养的测评来解决。因此,数学素养的内涵、测评与发展是紧密结合的。

在数学素养内涵的指导下,可以有针对性地开展基于数学素养的数学教育,并构建数学素养测评体系。在数学教育的过程中,应当运用数学素养的测评体系来检验教育效果,通过检测结果的反馈来调整数学教育,当然测评体系的完善也需要数学教育的支持。而对数学素养教育和测评的分析,可以进一步深化数学素养内涵的梳理。因此,可以将数学素养的内涵、测评和发展视为数学素养研究的三个关键要

素，它们之间的相互联系，如图 1-1 所示。

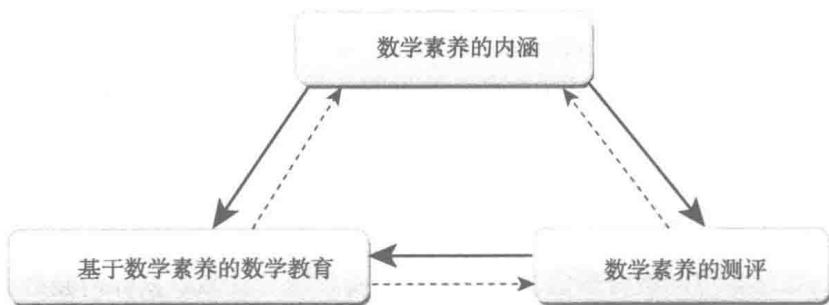


图 1-1 数学素养内涵、测评与发展的联系结构图

综上所述，将本研究主要聚焦于以下三个方面：

- (1)国内外研究中对数学素养的内涵都有着怎样的论述？
- (2)国内外对学生数学素养都进行怎样的测评？
- (3)如何在数学课程改革和数学教学中更好地发展学生的数学素养？

其中，前两个方面的问题主要在第 2~4 章中，分别从国内、国外和 PISA(Program for International Student Assessment)三个方面的研究中进行分析和阐述；而第三个问题主要在第 5 章和第 6 章，分别从数学课程改革和数学教学两个方面进行探讨和分析。

1.2.2 研究意义

1. 为教育教学提供必要参考

虽然在 2000 年以后所推出的几份数学课程标准中，都突出了数学素养的重要性，明确提出了要在数学教育中发展学生的数学素养。例如，在《义务教育数学课程标准》(教育部，2001)的前言部分就提出了“数学是人类文化的重要组成部分，数学素养是现代社会每一个公民应该具备的基本素养”；并在实施建议部分指出“数学活动经验的积累是提高学生数学素养的重要标志”“(教师)要不断提高自身的数学素养，善于挖掘教学内容的教育价值”；在课程资源的开发和利用部分指出“(课程资源)为学生提供探索复杂问题、多角度理解数学的机会、丰富学生的数学视野、提高学生的数学素养”。在《普通高中数学课程标准》(教育部，2003)中共有 9 处提到了数学素养，有 1 处提到了数学素质。其中在《普通高中数学课程标准》的前言部分，就指出“数学素质是公民所必须具备的一种基本素质”；在课程的基本理念部分，指出“(高中数学教育)为学生适应现代生活和未来发展提供更高水平的数学基础，使他们获得更高的数学素养”；在课程目标部分，指出“高中数学课程的总目标是：使学生在九年义务教育数学课程的基础上，进一步提高作为未来公民所必要的数学素养，以满足个人发展与社会进步的需要”。

但是,这两份课程标准都没有给出数学素养的具体内涵,它们由哪些核心要素组成,具备高数学素养学生都会体现出哪些能力,该如何进行基于数学素养的数学教学,以及该如何检验基于数学素养的数学教育效果。本书在介绍了国内外的数学素养发展情况后,将重点对国内外的数学素养内涵进行梳理和分析,厘清了数学素养所对应的核心知识和所体现的主要数学能力,这些对教师理解数学素养有着十分重要的帮助。在研究中,还介绍了国内外的数学素养测评,尤其是 PISA 的数学素养测评,并展示了不同知识类别、不同难度和不同背景的 PISA 测试题目。这些内容不仅可以帮助更好地了解数学素养的表现,教师也可以将这些测试题目作为教学例题,来检验学生的学习效果。本书还从数学课程改革和数学课堂教学两个方面入手,分析了如何在数学教育中更好地发展学生的数学素养。这部分研究成果对教师的教学更是具有现实的参考价值。

因此,本书中无论是数学素养的内涵阐述、测评分析和教学中发展数学素养的探讨,对一线教师的教学都具有借鉴和启发价值,对数学课程改革和数学教育的深化也都具有重要的指导意义。

2. 为后续研究提供理论基础

我国的数学素养研究文献虽然数量较多,但是在内容上大多是论述数学素养的重要性,对数学素养的内涵、测评和发展的探讨还比较少。这其中的一个重要原因,就是缺乏研究的理论基础,尤其是来自国外的数学素养研究资料,使得他们的研究和分析只能基于自身的经验,而不能深入地、科学地进行研究和探索,尤其是实证的研究。

在本书中,将对国内、国外的资料进行较为详细的收集和分析,论述国内外的数学素养发展情况,对国外不同数学素养术语的异同进行辨析,对国内外有关数学素养的重要文献和纲领进行评述。尤其是对近几年 PISA 测评中的数学素养理论框架,测评结果进行介绍、比较和分析,包括数学素养试题的编制原则、题目内容构成、测试结果的规范化处理等。这些都可以为后续的数学素养内涵和测评研究,提供重要的参考。而且,本书将对欧洲、美洲、亚洲、澳洲和非洲的一些国家中,数学素养在国家数学课程改革中的作用分别进行论述,并将其与我国数学课程改革相比较,这对我国的数学课程改革具有重要的参考价值。在基于数学素养的数学课堂教学方面,本书从教师教学知识和教学理念两个方面入手探讨教师的课堂教学。在详细论述之后,构建基于数学素养发展的数学课堂教学模式,该模式可以为教师的教学提供依据。这些研究和探索虽然是基于理论的,但是这种阐述和分析是十分必要的。本书比较全面地梳理了国内外的数学素养研究文献,尤其是 PISA 的数学素养研究,这些都可以对我国后续的数学素养研究提供必要的理论支撑,这也是本书

的另一个价值和意义所在。

1.3 本书的框架结构

本书围绕着数学素养的内涵、测评和发展的主题而展开，共分为 6 章。

第 1 章是绪论，主要介绍本书的研究背景、研究问题和意义。

第 2 章是我国的数学素养研究。首先，从教育政策、研究文献和教育实施这三个方面论述我国数学素养的发展过程。其次，分析我国文献中的数学素养内涵的探讨情况，认为可以将其分为无直接阐述时期、内涵的组合说和发展说时期，以及内涵阐述的多元化时期三个部分。在分别介绍大陆和台湾的数学素养测评和发展研究以后，从数学素养的内涵和研究发展趋势两个部分对数学素养的研究趋势进行分析。

第 3 章是国外的数学素养研究。由于各国采用不同的术语表示数学素养，因此本书首先对数学素养术语的发展做简介，然后对 Numeracy、Quantitative Literacy、Mathematical Literacy、Mathematical Proficiency 和 Matheracy 等若干常用数学素养术语所表示的内涵分别进行分析，并对国外数学素养的测评和发展进行论述。

第 4 章是 PISA 的数学素养。先从测评对象和方式、测评科目和目标、测评的学生抽样和问卷设计三个方面对 PISA 的研究和实施情况进行介绍。然后对 PISA 的数学素养内涵进行分析。接着，从试题的编制、结果的处理等方面介绍 PISA 的数学素养测评，并对上海和台湾学生在 PISA 数学素养测评中的表现进行介绍，也对数学素养与学生、学校、家庭之间的联系进行分析。

第 5 章是数学素养与数学课程，从课程改革的视角探讨学生数学素养的发展。首先从数学素养教育背景、数学素养教育的研究和课程标准中的数学素养三个方面分析国外数学课程中的数学素养；其次分析我国的数学课程改革，并从数学素养的视角对目前的课程标准进行评述，在指出不足的同时，也给出若干的建议。

第 6 章是数学素养与数学教学，从课堂教学的视角探讨学生数学素养的发展。研究认为，教师教学知识和教师的教学理念是影响数学素养教育的两个重要方面。研究还指出，首先要在课堂教学中发展学生的数学素养必须要求教师具有扎实的教学知识和以人为本的教学理念，并构建基于教学知识的数学素养教学模式。其次按照小学、初中和高中三个不同学习阶段分别展示数学教学案例，供读者参考。最后对本书的主要研究结果进行总结，在指出本书的若干不足之后，也对后续研究进行展望。