

高等学校物理实验教学示范中心系列教材

# 普通物理实验

◎主编 郝晓辉 梁伟华 张庆荣

◎副主编 庞学霞 周阳 许龙飞 张金平

高等教育出版社

高等学校物理实验教学示范中心系列教材

# 普通物理实验

Putong Wuli Shiyān

◎主编 郝晓辉 梁伟华 张庆荣

◎副主编 庞学霞 周阳 许龙飞 张金平

高等教育出版社·北京

## 内容提要

本书依据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理实验课程教学基本要求》(2010年版)编写而成。全书内容分为力学和热学实验、电磁学实验、光学实验三部分,共收入46个实验。本书在每部分之前,都介绍了相关的实验基础知识,在每个实验后均配有思考题。

书中所编入的实验,有多年来普通物理实验中的经典实验题目,也有近年来出现的较新的实验题目和内容,力求能够反映当前主流的普通物理实验理论、技术和方法,适用性较好。在编写过程中,作者根据国家有关标准和规范,统一了物理学名词、计量单位及其符号,力求使教材标准化和规范化。

本书可作为综合性大学物理类专业普通物理实验课程的教材,也可作为理工科大学非物理类专业大学物理实验课程的教材。各校可以根据教学时数的要求,选用其中的内容。

## 图书在版编目(CIP)数据

普通物理实验/郝晓辉,梁伟华,张庆荣主编. —  
北京:高等教育出版社,2016.3

ISBN 978-7-04-044742-2

I. ①普… II. ①郝… ②梁… ③张… III. ①普通  
物理学-实验-高等学校-教材 IV. ①O4-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第020954号

策划编辑 张海雁  
插图绘制 杜晓丹

责任编辑 张海雁  
责任校对 陈旭颖

封面设计 张申申  
责任印制 毛斯璐

版式设计 于 婕

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
印 刷 国防工业出版社印刷厂  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 17.25  
字 数 310千字  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>  
<http://www.hepmall.com>  
<http://www.hepmall.cn>  
版 次 2016年3月第1版  
印 次 2016年3月第1次印刷  
定 价 29.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物 料 号 44742-00

# 前 言

本书依据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会编制的《理工科类大学物理实验课程教学基本要求》(2010年版),为适应当前对学生能力培养的需求,结合我校多年物理实验课程教学改革的经验及现有仪器设备而编写,可作为综合性大学物理类专业普通物理实验课程的教材,也可供理工科非物理专业选用。

随着科学技术的发展和实验教学改革的深入,普通物理实验课程的教学从实验内容到实验技术都在不断地变化。本书力求反映当前主流的实验理论、技术和方法,与传统的物理实验教材相比,增添了一些新的实验内容,在一些传统的实验中也使用了新的实验仪器和新的实验技术。

本书按照力学和热学、电磁学、光学的顺序编入46个实验,在每部分实验之前,都介绍了相关的实验基本知识。其内容充分体现了我校多年来大学物理实验课程改革及实验室建设的成果,是普通物理实验室全体教师和实验技术人员(包括已经离开本室的一些同志)集体智慧和共同劳动的结晶。

编写本书的具体分工:梁伟华编写了力学和热学实验部分中的力学和热学实验基本知识、实验二、实验五、实验六、实验八、实验十一、实验十三、实验十四、实验十五、实验十六;庞学霞编写了力学和热学实验部分中的实验一、实验三、实验四、实验七、实验九、实验十、实验十二;郝晓辉编写了电磁学实验部分中的实验一、实验二、实验三、实验四、实验八、实验九、实验十、实验十三;周阳编写了电磁学实验部分中的电磁学实验基本知识、实验五、实验六、实验七、实验十一、实验十二;张庆荣编写了光学实验部分中的光学实验基本知识、实验三、实验四、实验七、实验八、实验九、实验十、实验十二、实验十六,并完成光学实验部分的绘图;张金平、许龙飞共同编写了光学实验部分中的实验一、实验二、实验五、实验六、实验十一、实验十三、实验十四、实验十五、实验十七。此外,对几十年来在河北大学普通物理实验教学中做出过贡献的所有老师一并感谢,这本教材中也有他们多年的劳动和奉献。另外,褚立志、段书兴、王晓菲三位老师也为本书的编写付出了辛勤的劳动,对此我们表示衷心的感谢。

本书在编写过程中参阅了一些兄弟院校的教材和仪器厂家的说明书,在此致以深切的谢意。

由于编写时间紧迫以及水平所限,书中若有不当之处,恳请读者批评指正。

编 者

2015年7月

# 目 录

绪论 .....	(1)
----------	-----

## 力学和热学实验部分

力学和热学实验基础知识 .....	(5)
一、误差理论基础 .....	(5)
二、有效数字 .....	(20)
三、作图法 .....	(23)
四、算术平均值的标准误差的估计 .....	(31)
五、 $\sigma$ 的意义及其统计规律 .....	(32)
六、有限次测量中误差的分布函数 .....	(34)
实验一 基本量的测量(长度和固体密度测量) .....	(36)
实验二 用焦利秤测弹簧的劲度系数 .....	(44)
实验三 用伸长法测定钢丝的杨氏模量 .....	(47)
实验四 用超声波测定空气中的声速 .....	(51)
实验五 气垫导轨上直线运动的研究 .....	(56)
实验六 牛顿第二定律的验证及液体黏度的测量 .....	(59)
实验七 刚体转动实验 .....	(63)
实验八 气轨上弹簧振子的振动 .....	(68)
实验九 受迫振动 .....	(73)
实验十 液体黏度的测量 .....	(79)
实验十一 用拉脱法测定液体的表面张力系数 .....	(85)
实验十二 测定金属的线膨胀系数 .....	(89)
实验十三 用稳态平板法测量不同材料的 导热系数 .....	(94)
实验十四 动量守恒定律 .....	(100)
实验十五 单摆耦合振动的研究 .....	(102)
实验十六 气轨上弹性振子的非线性效应 .....	(104)

## 电磁学实验部分

电磁学实验基础知识 .....	(111)
一、电学量具及仪表 .....	(111)
二、电学量测量方法 .....	(117)
三、万用表的使用 .....	(119)
四、分压、限流电路 .....	(121)

实验一	非线性电阻特性曲线的测定	(126)
实验二	静电场的描绘	(130)
实验三	检流计工作常量的测定	(134)
实验四	电位差计测量电池的电动势和内阻	(140)
实验五	示波器的使用	(143)
实验六	测量磁性材料的磁滞特性	(148)
实验七	直流电桥	(153)
实验八	电子束的偏转和聚焦	(163)
实验九	电阻温度特性的研究	(171)
实验十	$RLC$ 串联电路的暂态过程	(175)
实验十一	$RLC$ 串联电路的稳态特性	(182)
实验十二	交流电路的谐振现象	(186)
实验十三	电位差计校准电表	(189)

### 光学实验部分

光学实验基础知识	(195)
一、光学实验的特点	(195)
二、一般光学仪器的使用与维护	(195)
实验一 薄透镜焦距的测定	(197)
实验二 迈克耳孙干涉仪	(200)
实验三 分光计的调整及测三棱镜的顶角	(204)
实验四 等厚干涉及测量	(208)
实验五 偏振光的分析	(213)
实验六 用双棱镜测定光波波长	(219)
实验七 衍射光栅	(222)
实验八 单缝衍射的光强分布	(226)
实验九 用阿贝折射仪测定物质的折射率	(231)
实验十 用旋光仪测定旋光物质的旋光度	(236)
实验十一 全息照相	(240)
实验十二 光电效应	(244)
实验十三 乳剂感光特性曲线的测定	(250)
实验十四 阿贝成像原理和空间滤波	(253)
实验十五 照相技术	(257)
实验十六 最小偏向角法测量固体的折射率	(261)
实验十七 迈克耳孙干涉仪测量折射率	(263)

# 绪论

---

物理学的建立和发展都是以生产实践和科学实验为基础的,任何一个物理定律的确立和修正都是以大量的实验材料为依据而归纳总结出来的。因此,物理实验是物理理论的基础,也是检验物理理论的标准,这在物理学史上有许多实例。但是,实验又需要有理论根据和理论指导,所以两者是相辅相成的,不可偏废,唯理论和经验论都是错误的。

自然界发生的物理现象极为复杂,在这复杂的物理现象中,要想深入了解我们所要研究的某一个物理变化规律,就必须在实验室内通过仪器和措施,用人为的方法控制条件,尽量削减存在的次要现象和因素的干扰,集中地对主要现象加以反复观察和测量,找出在一定条件下这一物理变化规律的本质,测量出数量或是物理量之间的关系,这就是我们在实验室中的工作。

同学们将来在今后工作中,不仅应有丰富的理论知识,而且要有熟练的实验技能。实验是物理课中的一个重要学习环节,对实验课必须严肃认真,才能获得应有的学习效果,基础物理实验课的培养目的,主要有以下三方面。

(1) 学习物理实验的基本知识、基本方法和基本的技能技巧,要求掌握有关的实验方法和测量技术,学会使用有关的仪器,学会有效数字的运算和数据处理的方法。

(2) 培养分析问题和解决问题的能力,要求理论联系实际,加深理解物理概念和规律,学会分析、归纳、概括实验结果。对实验出现的问题能根据理论做出正确的分析和判断。

(3) 树立严肃认真的科学态度和工作作风,要求对实验中任一细节都应实事求是,一丝不苟,并严格遵守实验室所定的规章制度。

为了达到实验的预期目的,同学们必须做到以下几点。

(1) 预习实验,写预习报告。每个实验都是由同学独立完成的,在课前必须预习实验教材,明确实验目的,理解实验原理,了解所用的测量仪器、测量方法和具体步骤,在做实验前,一定要心中有数。为了达到此目的,我们将采取各种检查的措施,如检查预习报告,预习报告的成绩占总成绩的10%左右;在实验课上巡回,按计划及时检查某些重要的操作是否正确,并当堂给出每个学生的操作成绩(一般为总成绩的40%)。

预习报告的内容包括:实验题目、实验目的、实验仪器、实验原理(不宜照抄全搬,应善于归纳总结,要求简明扼要,又不失精华)、详细的实验步骤、注意事项、数据表格(自己设计)及思考题。

(2) 做好实验记录和计算的准备。在预习实验时,单独准备一张纸,用于记录实验名称、重要的计算公式和详细的实验步骤,最为重要的是画出测量数

据表格,以免在做实验时将数据随便记在纸上而造成数据紊乱、计算错误,要养成细心记录数据的良好习惯,不能事后凭回忆追记数据,每次实验的原始数据要经过教师检查、签字后方有效,无效的数据不能给成绩,并且生效的原始数据不能有任何涂改(不能用铅笔、红色或其他色等非常用颜色的笔记录数据)。

(3) 熟悉仪器。上课时,首先熟悉仪器的安装、调整和使用方法,然后才能进行实验。实验的顺利与否、实验的成败以及仪器损坏的原因,多是在仪器的安装和调整中有误造成的。仪器的安装和调整,可通过仔细阅读实验教材中仪器简介部分的内容,也可在实验室亲自操作。

(4) 使用对数表或计算器进行计算。初始时可能不习惯,要求逐步练习达到熟练的程度。

(5) 写实验报告。正式的实验报告内容包括有:实验题目、实验目的、实验仪器、实验步骤、数据及处理、思考题及讨论。

实验报告中的字迹要清楚整洁,图表要规格,不整齐和内容不完全的报告要退回重写。

按教师指定时间交实验报告,交实验报告时连同教师签过字的原始数据一起交回。

(6) 在整个实验过程中,保持实验台和地面的整洁。井井有条是保证实验顺利进行的必要条件,否则会带来杂乱、有失公德、妨碍工作甚至损坏仪器,实验完成后,把仪器整理好。

(7) 对各项要求,经教师检查认可后,方能离开实验室。



## 力学和热学实验部分



# 力学和热学实验基础知识

## 一、误差理论基础

### (一) 测量

物理实验不仅要定性地观察物理变化的过程,还要定量地测量物理量的大小。测量就是把待测量与标准量进行比较,待测量是标准量的多少倍,待测量的值就是多少,同时把待测量的单位明确下来。

如果对某一量重复地测量了许多次,而且每次测量的条件都相同(同一观察者、同一仪器、同一方法、同一环境等),因为没有根据能指出哪一次测量比另一次测量更准些,所以每次测量的精确度是相同的,我们把这种测量叫做等精度测量。当测量条件中只要有一个发生了变化,就是不等精度测量。

测量的类别虽然很多,但归纳起来可分为两大类:直接测量和间接测量。

国际单位制所规定的基本量之中,长度、质量、时间、温度、电流和发光强度,是可以由仪器直接测量的,对这些量进行的测量叫直接测量。另外一些量(导出量),如面积、体积、密度等,它们的量值是不能由仪器直接测量得知的,必须将直接测量出的量代入有关公式,通过计算,才能得到,这样的测量过程叫间接测量。例如测量一个圆柱形物体的密度,需要的有关公式是

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi D^2 L}$$

其中, $m$ 是物体的质量, $D$ 是物体的直径, $L$ 是物体的高,这些都是直接测量的量,代入上式即可算出物体的密度 $\rho$ 。

### (二) 测量的误差

误差的定义:某量值的给出值与其客观真值之差为误差。其中,给出值包括测量值、标称值、示值、预置值、计算近似值等非真值,用公式表示为

$$\text{误差} = \text{给出值} - \text{真值}$$

而 
$$\text{修正值} = -\text{误差} = \text{真值} - \text{给出值}$$

一般情况下 
$$\text{真值} = \text{测量值} + \text{修正值}$$

在任何一种测量中,由于测量仪器、感觉器官和测量方法难以达到理想的程度,使测量值和待测量的真值之间总有一个差值,这一差值就是误差。

根据误差产生的原因,误差可以分为三类:过失误差、系统误差和随机误差。

### 1. 过失误差

这种误差是由于实验者的粗心大意或过度疲劳所致,如对仪器的使用不正确,实验方法不合理,违反操作规程,或读错、记错、算错数据等。只要对工作和学习认真负责,这种误差是完全可以避免的。

### 2. 系统误差

系统误差是指实验的全部系统中所出现的误差,包括仪器误差、理论误差、环境误差和个人误差。

(1) 仪器误差 仪器误差是由于仪器本身的缺陷所引起的。例如,温度计的零点不在冰点,仪表的刻度不准确,停表的走快或走慢,天平的两臂不等长,砝码不标准等。

减小这种误差的办法是改进仪器或改进实验方法。

(2) 理论误差 理论误差是由于实验理论和实验方法不够完善所引起的。例如,称量轻物体的质量时,没有考虑空气的浮力;测量热量时,避免不了与周围物质的热交换;测量磁针偏转时,附近有铁器的影响等。

可用改进实验仪器或在计算公式中引入修正项等办法来减少这种误差。

(3) 环境误差 环境误差是由于环境的影响而造成的误差。如外界的温度、气压或气流等的影响。

可在计算公式中引入修正项或改进实验条件来减小这种误差。

(4) 个人误差 个人误差是由于个人习惯或生理(视觉、听觉、身形高矮等)关系所引起的误差。例如,在读刻度数值时,总是偏高或偏低,掐停表时总是较迟或较早等。

经过相当时间的实验训练,注意矫正个人的习惯,就可减小这种误差。

系统误差的特点是:它的出现是有规律的,或是全部测量值都大于真值,或是全部测量都小于真值。掌握它的规律之后,按照误差产生的原因,可以设法校正,使误差减到最小。

增加测量的次数不能减小这类误差。

### 3. 随机误差

在实验时,即使采用了完善的仪器,选择了恰当的方法,经过精心的观测使系统误差减到了最低的程度,还是存在另一类不可避免的误差。这类误差是由于人们的感觉器官的灵敏程度和仪器的准确程度都有一定的限制造成的,对同一目标进行多次测量时,每次得到的数值不可能完全相同,偏高或偏低、误差或正或负纯属是随机性的,这种误差叫做随机误差。有的教材上称为偶然误差。

产生随机误差的原因:

(1) 判断错误 这是由于实验者的眼、耳、手在观测上的限制,或由于疲

劳所引起的。例如,用直尺测量长度时,眼睛最多只能估计到毫米的十分之几,而每一次的估计不一定完全相同,因为估计是不准确的,可能较多些或较少些。又如观测仪表上标尺的刻度时,眼睛的位置偏左或偏右,也使测量的数值时多时少,误差或正或负。

(2) 涨落影响 环境的温度或气压忽升忽降,电源的电压不稳定等,都能使测量值偏大或偏小,出现或正或负的误差。

(3) 干扰影响 外界机械的振动,风的吹动,电磁波的干扰等,也可使测量值有时大有时小,出现或正或负的误差。

在多数实验中,系统误差和随机误差是同时存在的,有时两者可能是同一个来源。

#### 4. 精密度、准确度和精确度

精密度表示各测量值之间的相近程度,它与随机误差的大小有关。准确度表示测量值接近真值的程度,它与系统误差的大小有关。精确度同时表示各测量值之间的相近程度和与真值的接近程度。我们以实弹打靶为例,来说明精密度、准确度和精确度的意义。设有三个射击手各射一批子弹,分别打到三个靶子上(图 1-0-1、图 1-0-2、图 1-0-3)。

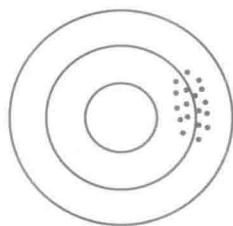


图 1-0-1

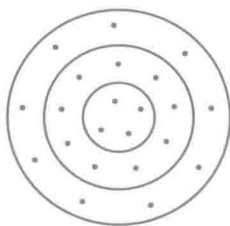


图 1-0-2

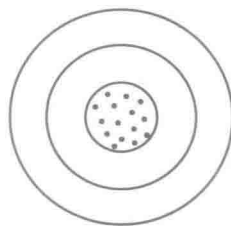


图 1-0-3

在图 1-0-1 中,靶上的弹痕较密集,但偏离靶心的一方,这说明枪上的瞄准系统有问题,或枪身歪斜,或射击手的姿势不正确,使子弹有规律地偏斜,犹如我们在实验过程中发生的系统误差大,准确度低的情况;而弹痕密集,说明射击手观测估计得较好,外界干扰因素影响不大,相当于我们在实验过程中的随机误差小,精密密度高的情况。

在图 1-0-2 中,弹痕基本围绕在靶心的周围,但不密集,相当于实验过程中的系统误差小,准确度高,而随机误差大,精密密度低的情况。

在图 1-0-3 中,弹痕密集于靶心,说明系统误差和随机误差均小,准确度和精密密度均高,通常称为精确度高。

消除系统误差是实验科学的任务之一,减小随机误差是误差理论的任务之一。现在我们所要讨论的误差理论基础是就随机误差而言的。

### (三) 随机误差的特性

在实验过程中,过失误差是不允许存在的,系统误差是可以通过修正减至最小的,而随机误差的产生是不可预料的,也是无法制止的,似乎没有规律,但其实它服从统计规律,并具有以下四点特性。

(1) 在一定测量条件下,误差的绝对值不超过一定的限度(有限性)。

(2) 绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的机会多(单峰性)。

(3) 绝对值相等的正负误差,出现的机会相等(对称性)。

(4) 对于任一量作等精度的测量时,当测量的次数增加到无限多的时候,随机误差的算术平均值趋近于零。

若对某一量进行无限次的重复测量,而在测量中仅有随机误差,则这些测量值的分布曲线如图 1-0-4 所示。其中  $x_i$  为测量值,  $N_i$  为某一测量值在重复测量中出现的次数。

变换一下坐标位置,就可表示误差的分布情况。图 1-0-5 所示曲线称为误差分布曲线,它完全体现了随机误差的四个特性。其中,  $\Delta x_i$  为误差值,  $N_i$  为某一误差值在重复测量中出现的次数。

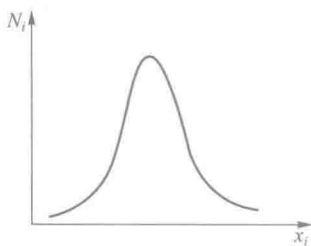


图 1-0-4 测量值的分布曲线

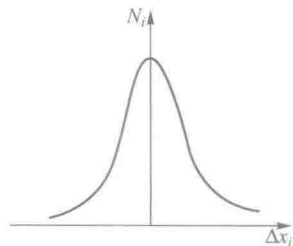


图 1-0-5 误差分布曲线

### (四) 多次直接测量结果的误差计算

由于随机误差存在于每一次测量中,对于随机误差的处理,在一般实验测量中常采用下面的方法。

1. 直接测量的算术平均值——最可靠值

设  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  为  $k$  次直接测量的数值,则全部直接测量数值的算术平均值为

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k}{k} \quad (1-0-1)$$

当系统误差不存在,测量次数  $k$  增至无穷大时,算术平均值  $\bar{x}$  等于待测量

的真值。在一般情况下测量的次数  $k$  是有限的,因此,算术平均值只是接近于真值的近似值。因为它与直接测量中出现次数最多的测量值很相近,较为可靠,故也把算术平均值叫做最可靠值或最佳值。

直接测量值与真值的差叫做真误差,直接测量值与最可靠值的差叫做残差。

## 2. 算术平均误差

设每次直接测量的误差的绝对值(严格地讲,这是残差  $v_i = x_i - \bar{x}$  的绝对值)为

$$\Delta x_i = |x_i - \bar{x}|, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

则误差绝对值的算术平均值为

$$\Delta x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| \quad (1-0-2)$$

称为算术平均误差。

**例 1:**用千分尺测量一金属丝的直径,反复进行五次,测得数据是  $d_1 = 0.3235 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 0.3232 \text{ cm}$ ,  $d_3 = 0.3236 \text{ cm}$ ,  $d_4 = 0.3233 \text{ cm}$ ,  $d_5 = 0.3231 \text{ cm}$ 。最可靠值是

$$\bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{5} = 0.32334 \text{ cm}$$

每次测量的误差绝对值是

$$\Delta d_1 = |d_1 - \bar{d}| = 0.00016 \text{ cm}$$

$$\Delta d_2 = |d_2 - \bar{d}| = 0.00014 \text{ cm}$$

$$\Delta d_3 = |d_3 - \bar{d}| = 0.00026 \text{ cm}$$

$$\Delta d_4 = |d_4 - \bar{d}| = 0.00004 \text{ cm}$$

$$\Delta d_5 = |d_5 - \bar{d}| = 0.00024 \text{ cm}$$

算术平均误差是

$$\Delta d = \frac{\Delta d_1 + \Delta d_2 + \Delta d_3 + \Delta d_4 + \Delta d_5}{5} = 0.00017 \text{ cm} \approx 0.0002 \text{ cm}$$

对金属丝直径测量的结果是

$$d = (0.3233 \pm 0.0002) \text{ cm}$$

这结果表明金属丝的真实直径比  $0.3235 \text{ cm}$  大的可能性很小,比  $0.3231 \text{ cm}$  小的可能性也不大,即金属丝直径在  $0.3231 \text{ cm}$  到  $0.3235 \text{ cm}$  之间的可能性最大。

有时误差可多保留一位数字,将测量的结果写为

$$d = (0.32334 \pm 0.00017) \text{ cm}$$

## 3. 标准误差

标准误差又称均方误差或均方根误差,定义为各次测量值误差平方和的平均值的平方根,即

$$\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_k^2}{k}} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i^2} \quad (1-0-3)$$

式中,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$  为各次测量的误差,  $k$  为测量次数。

上述标准误差的定义,是对一组测量中各测定值(有的书上称为“单次测量”,这容易与只测量一次的单次测量混淆)可靠程度的估计,而不是对测量结果(平均值)可靠程度的估计。显然,后者要比前者的可靠程度更高一些,这一点将在下面谈到。

目前,我国和世界上许多国家都在科学报告中使用标准误差。

在实验中已消除系统误差和过失误差的情况下,当测定次数无限增多时,所得的算术平均值为真值。实际上,测定的次数都是有限的,所得的算术平均值是最佳值而不是真值。由于往往不知道真值,因而测定值与真值之差(误差)也无法知道。此时我们可以用测定值与算术平均值之差(残差)来估计测定值的标准误差。

设未知量的真值为  $a$ ,各测定值为  $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k$ , 对应于各测定值的误差为  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_k$ , 残差为  $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_k$ , 则

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= x_i - a \\ v_i &= x_i - \bar{x} \\ x_1 &= a + \varepsilon_1 = \bar{x} + v_1 \\ x_2 &= a + \varepsilon_2 = \bar{x} + v_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_k &= a + \varepsilon_k = \bar{x} + v_k \end{aligned} \quad (1-0-4)$$

式中,  $\bar{x}$  表示算术平均值,将(1-0-4)式中各等号两边相加,得

$$ka + \sum \varepsilon_i = k\bar{x} + \sum v_i$$

因为

$$\sum v_i = 0$$

故

$$\bar{x} = \frac{ka + \sum \varepsilon_i}{k} \quad (1-0-5)$$

将(1-0-5)式代入(1-0-4)式,得到

$$ka + \sum \varepsilon_i + kv_1 = ka + k\varepsilon_1$$

$$ka + \sum \varepsilon_i + kv_2 = ka + k\varepsilon_2$$

.....

$$ka + \sum \varepsilon_i + kv_k = ka + k\varepsilon_k$$

整理后得



$$\begin{aligned}
 v_1 &= \varepsilon_1 - \frac{\sum \varepsilon_i}{k} \\
 v_2 &= \varepsilon_2 - \frac{\sum \varepsilon_i}{k} \\
 &\dots\dots\dots \\
 v_k &= \varepsilon_k - \frac{\sum \varepsilon_i}{k}
 \end{aligned}
 \tag{1-0-6}$$

将(1-0-6)式两边取平方后相加,得

$$\sum v_i^2 = \sum \varepsilon_i^2 - 2 \frac{(\sum \varepsilon_i)^2}{k} + k \left( \frac{\sum \varepsilon_i}{k} \right)^2 = \sum \varepsilon_i^2 - \frac{(\sum \varepsilon_i)^2}{k}
 \tag{1-0-7}$$

而

$$(\sum \varepsilon_i)^2 = \sum \varepsilon_i^2 + \sum_{p \neq q} \varepsilon_p \varepsilon_q$$

$p = 1, 2, \dots, k; q = 1, 2, \dots, k$

根据随机误差的特征,当测量次数  $k$  相当大时,具有绝对值相等而符号相反的误差,出现的机会相等。故

$$\sum_{p \neq q} \varepsilon_p \varepsilon_q = 0$$

因而(1-0-7)式可化简为

$$\sum v_i^2 = \sum \varepsilon_i^2 - \frac{(\sum \varepsilon_i)^2}{k} = \frac{k-1}{k} \sum \varepsilon_i^2
 \tag{1-0-8}$$

根据标准误差的定义:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \varepsilon_i^2}{k}$$

故有

$$\sigma^2 = \frac{\sum v_i^2}{k-1}$$

则

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{k-1}}
 \tag{1-0-9}$$

(1-0-9)式即为在有限次测量时,用残差表示标准误差的方法。显然  $\sigma$  是这  $k$  次测量的各个测定值的标准误差。

对于这  $k$  次测量的算术平均值的标准误差,将用下式计算:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{k(k-1)}}
 \tag{1-0-10}$$

(1-0-10)式的得来,可参见本节。

下面举例说明如何利用(1-0-10)式计算测量结果的标准误差。

**例 2:**表 1-0-1 所示为对某一长度量测 10 次 ( $k=10$ ) 所得数据及算出的平均值、残差  $v$ 、残差的平方  $v^2$  及其和  $\sum v^2$ , 现在计算各测量值  $x_i$  的标准误差  $\sigma$  和算术平均值的标准误差  $\sigma_{\bar{x}}$ 。