高初中数学衔接

学与练

GAO CHU ZHONG SHU XUE XIAN JIE XUE YU LIAN

主编 笪祖辉

东南大学出版社

高初中数学

学与练

主　　编　笪祖辉

编写人员　（按姓氏笔划为序）

王　荣　王建国　刘德祥

朱榕生　朱德明　房　慧

崔虹剑　笪祖辉　翟国芳

东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高初中数学衔接学与练/笪祖辉主编. —南京:
东南大学出版社, 2004.6
ISBN 7-81089-628-8

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 笪...　Ⅲ. 数学课—中学—
教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 058668 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)
出版人:宋增民
江苏省新华书店经销　南京玉河印刷厂印刷
开本:850mm×1168mm　1/32　印张:3.25　字数:92 千字
2004 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
印数: 1—15000　定价: 4.80 元
(凡因印装质量问题,可直接向我社发行部调换,电话:025-83795801。)

编写说明

初中是义务教育阶段.近年来,初中数学教学要求一再降低,教学内容不断删减,而高中数学教材中的知识、能力要求有增无减,初高中之间形成了一个较大的落差.为了使学生进入高中后能尽快地适应数学的教学要求,我们编写了《高初中数学衔接学与练》一书.

本书复习、拓宽、加深了部分初中已接触过、在高中学习中又必不可少的基础内容,如二次函数中闭区间上的条件最值与一元二次方程根的分布等;三角函数中的同角三角函数关系公式及$(90° - \alpha)$的一组公式;平面几何中的反证法,简单空间图形的性质、面积与体积等等.小册子还补充了初中删减而高中必须具备的基础知识,如代数中的$(a^3 \pm b^3)$、$(a \pm b)^3$等乘法公式及无理方程;几何中的角平分线性质定理、射影定理、三角形的"四心"、四点共圆的判定等等.

本书2001、2002两年在部分中学试用,去年进行了修改、完善,初版给2003级高一学生使用.今年又在上述基础上进行了仔细修订,再版供给今年高一学生阅读、自学和练习,以帮助学生稳步登上高一数学学习的新台阶.

本书在编写过程中得到了江苏省东台中学、东台市三仓中学、东台市五烈镇中学有关教师的支持与帮助,在此表示衷心的感谢!

编　者

2004年6月

目　录

(注:打“*”的均为初中教材中没有的内容.)

第一章　代数式的恒等变形

1.1　整式

一、知识要点

1. 本节连同后面的 1.2 节、1.3 节，在学习时应注重与实数进行类比.

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数(如 }0,3\text{)}\\ \text{分数(如}\dfrac{1}{2},-\dfrac{5}{3}\text{)}\end{cases}\\ \text{无理数(如}\sqrt{2},1+\sqrt{7}\text{)}\end{cases}$$

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式(如 }2ab,x^2-4y^2\text{)}\\ \text{分式(如}\dfrac{1}{2x},\dfrac{2a}{x(x+1)}\text{)}\end{cases}\\ \text{无理式(如}\sqrt{3a},x-\sqrt{y}\text{)}\end{cases}$$

2. 乘法公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　平方差公式；

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$　完全平方公式；

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$　立方和(差)公式.

进一步还可证明下列公式：

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$　多项式平方公式；

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$　两数和(差)立方公式.

3. 因式分解的主要方法：提取公因式法、公式法、分组法、十字相乘法、配方法，另外还应了解求根法及待定系数法.

二、例题分析

1. 计算 $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

分析　仔细看清题目能联想到哪一个乘法公式？试比较下列两种解法.

解 （法一）原式 $= (x^2-1)[(x^2+1)^2-x^2]$

$= (x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$= x^6-1.$

（法二）原式 $= (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

$= (x^3+1)(x^3-1)$

$= x^6-1.$

2. 已知 $a+b+c=4, ab+bc+ca=4$. 求 $a^2+b^2+c^2$ 的值．

分析 注意乘法公式的变形，如多项式平方公式的变形．

解 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=8.$

3. 因式分解 $x^3+9+3x^2+3x.$

解 （法一）分组法：原式 $= x^3+3x^2+3x+9$

$= x^2(x+3)+3(x+3)$

$= (x+3)(x^2+3).$

（法二）公式法：原式 $=(x+1)^3+8=(x+1)^3+2^3=$

__________.

注 留给读者完成．想一想还有什么方法？

4. 把下列各式因式分解：

(1) $xy-1+x-y$; (2) $x^2-(a+b)xy+aby^2$;

(3) $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6.$

解 (1)(2) 略．

(3)（法一）十字相乘法：

原式 $= 2x^2+(y-4)x-y^2+5y-6$

$= 2x^2+(y-4)x-(y-2)(y-3)$

$= (2x-y+2)(x+y-3).$

$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & -(y-2) \\ 1 & & (y-3) \end{array}$$

（法二）十字相乘法：

原式 $= (2x^2+xy-y^2)-(4x-5y)-6$

$= (2x-y)(x+y)-(4x-5y)-6$

$= (2x-y+2)(x+y-3).$

$$\begin{array}{ccc} 2x-y & \times & 2 \\ x+y & & -3 \end{array}$$

（法三）待定系数法：

原式 $= (2x-y)(x+y)-4x+5y-6$

设原式 $= (2x-y+m)(x+y+n)$

$= (2x-y)(x+y)+(m+2n)x+(m-n)y+mn.$

比较系数得 $\begin{cases} m+2n=-4, \\ m-n=5, \\ mn=-6. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=2, \\ n=-3. \end{cases}$

即原式 $= (2x-y+2)(x+y-3)$.

想一想,能用求根法分解本题吗?还可怎样用十字相乘法分解?

三、练习题 A

1. 利用公式填空

(1) $\frac{1}{9}a^2-\frac{1}{4}b^2=(\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}a)(\qquad)$;

(2) $(4m+\qquad)^2=16m^2+4m+(\qquad)$;

(3) $8a^3-\frac{b^3}{2}=(2a-\frac{b}{2})(\qquad)$;

(4) $m^6-n^6=(\qquad)^2-(\qquad)^2$

$=(\qquad)(\qquad)$

$=(\qquad)(\qquad)(\qquad)(\qquad)$.

2. 若 $x^2+\frac{1}{2}mx+k$ 是一个完全平方式,则 k 等于 (　　)

(A) m^2 (B) $\frac{1}{4}m^2$ (C) $\frac{1}{3}m^2$ (D) $\frac{1}{16}m^2$

3. 不论 a,b 为何实数,$a^2+b^2-2a-4b+8$ 的值 (　　)

(A) 总是正数 (B) 总是负数

(C) 可以是零 (D) 可以是正数也可以是负数

4. 已知 $x+y=1$,求 x^3+y^3+3xy 的值.

5. 把下列各式分解因式:

(1) $4x^4-13x^2+9$;

(2) $b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

(3) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3-1$;

(4) $3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4$.

四、练习题 B

1. 利用公式填空

(1) $(a+2b-c)^2 = a^2+4b^2+c^2+2($ ______ $)$;

(2) $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab($ ______ $)$;

(3) $(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2+($ ______ $)$;

(4) $(1+x)(1+3a+y) = 1-27a^3$,则 $x=$ ____,$y=$ ____.

2. $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,则 $\triangle ABC$ 为 ( )

(A) 等腰三角形 (B) 直角三角形

(C) 等腰直角三角形 (D) 正三角形

3. 多项式 $2x^2-xy-15y^2$ 的一个因式为 ( )

(A) $2x-5y$ (B) $x-3y$ (C) $x+3y$ (D) $x-5y$

4. 证明:n 为正整数时,$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^n-1)$(裴蜀定理),并据此:

(1) 求证:$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}(x\neq 1)$;

(2) 计算:$1+2+4+8+\cdots+2^{11}$.

5. 把 $4(x-y+1)+y(y-2x)$ 因式分解.

6. 若 $x^2-y^2+5x+y+m$ 能分解为两个一次因式的积,求 m 的值.

五、说明

1. 运用换元转化的思想方法,学会推导出多项式平方公式,并用一句话来概括.仿此,$(a+b+c+d)^2$ 结果得什么呢?$(a-b)^3$ 结果又应得什么呢?

2. 注意因式分解十字相乘法的基本型及多样性.例 4 中(1)、(2) 分别给出了两种常用而重要的基本类型$(x-1)(y+1)$及$(x-ay)(x-by)$.熟练运用及掌握待定系数法将给高中数学的学习打下良好的基础.

3. 立方和(差)公式及两数和(差)立方公式在初中课本中是没有的.希望同学们将它们熟记,并能熟练运用.

1.2 分 式

一、知识要点

1. 分式的意义：分式概念的引入源于整式的运算．A，B 表示两个整式，则$\frac{A}{B}$（即 $A \div B$）中，如 B 中含有字母，且 $B \neq 0$，则$\frac{A}{B}$ 称为分式．分式的基本性是$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}$；$\frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M}$（$M$ 为非零整式）．

2. 在人教社课本代数式第二册 P88 的“读一读”中，叙述了繁分式的概念：像$\frac{\frac{a}{b}}{c+d}$，$\frac{m+n+p}{\frac{2m}{n+p}}$，$\frac{1+\frac{x}{y}}{1-\frac{x}{y}}$这样，分子或分母中又含有分式的分式叫做繁分式。

3. 学习分式的知识内容要处处与分数中相应的知识内容进行类比．如：约分、通分的方法，最简分式、繁分式概念等均要进行类比．分式问题整式化是常用的数学思想方法．

二、例题分析

1. 若$\frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$，求常数 A，B 的值．

解 $\because \frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{2x+4+3x}{x(x+2)} = \frac{2x+4}{x(x+2)} + \frac{3x}{x(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$，$\therefore A = 2, B = 3$.

2. 若$\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = k$，求 k 的值．

解 由已知得 $a = (b+c)k$，$b = (c+a)k$，$c = (a+b)k$，三式相加得 $a+b+c = 2(a+b+c)k$，当 $a+b+c \neq 0$ 时，$k = \frac{1}{2}$；当 $a+b+c = 0$ 时，$\frac{a}{b+c} = -1$，即 $k = -1$.

想一想，下面解法对不对？

由已知得$\dfrac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b}=k$，$\therefore k=\dfrac{1}{2}$.

3. 已知：$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x+y}=0$，求$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$的值．

解 已知$\dfrac{y-x}{xy}=\dfrac{1}{x+y}$，$\therefore \dfrac{y^2-x^2}{xy}=1$，即$\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}=1$而$\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2=\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)^2+4=5$，$\therefore \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\pm\sqrt{5}$.

4. 已知：$6x^2+12y^2=17xy\,(xy\neq 0)$，求$\dfrac{x}{y-\dfrac{x^2}{x-y}}$的值．

解 由已知得$(2x-3y)(3x-4y)=0$，则$\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{4}{3}$.

又 $\dfrac{x}{y-\dfrac{x^2}{x-y}}=\dfrac{x(x-y)}{y(x-y)-x^2}=\dfrac{x^2-xy}{-x^2+xy-y^2}=\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}}{-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\dfrac{x}{y}-1}$，则当$\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$时，原式$=-\dfrac{3}{7}$；当$\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3}$时，原式$=-\dfrac{4}{13}$.

5. k取何值时，方程$\dfrac{k(x+2)}{x+1}=1+\dfrac{3(k-1)}{x+1}$有负数解？

解 当$x\neq-1$时，原方程化为：$(k-1)x=k-2$，$\therefore x=\dfrac{k-2}{k-1}$，又$\because x<0$得$\dfrac{k-2}{k-1}<0$，$\therefore 1<k<2$. 而在$x=\dfrac{k-2}{k-1}$中，$x=-1$时得$k=\dfrac{3}{2}$，原方程无意义．综合之，当$1<k<2$，且$k\neq\dfrac{3}{2}$时，原方程有负数解．

三、练习题 A

1. 填空

(1) $\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{(\quad)}{x^2+2x-3}$；

(2) $\dfrac{a+2}{a^3+8}=\dfrac{1}{(\qquad)}$;

(3) $\dfrac{(\qquad)}{x^3-y^3}=\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}$;

(4) $\dfrac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ac+a^2-b^2+c^2}=\dfrac{(\qquad)}{a+b+c}$.

2. 设 $2x-y$ 与 $x+y$ 的比是 $\dfrac{2}{3}$,则 x 与 y 的比值是 (　　)

(A) 1　　(B) $\dfrac{5}{4}$　　(C) $\dfrac{4}{5}$　　(D) $\dfrac{6}{5}$

3. 已知:$x-xy-2y-1=0$,则 y 等于 (　　)

(A) $1+\dfrac{1}{x+2}$　　(B) $1+\dfrac{3}{x-1}$

(C) $1-\dfrac{1}{x-1}$　　(D) $1-\dfrac{3}{x+2}$

4. 正数 x,y 满足 $\dfrac{x^2-y^2}{xy}=2$.求 $\dfrac{x-y}{x+y}$ 的值.

5. 计算 $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{99\times100}$.

四、练习题 B

1. 填空

(1) $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{3}$,则 $\dfrac{3a^2-ab}{3a^2+5ab-2b^2}=$ ________;

(2) 若 $x^2+xy-2y^2=0$,则 $\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\div\dfrac{(x-y)^2}{x^2-y^2}=$ ________;

(3) 已知$\frac{x}{y+z}=a,\frac{y}{z+x}=b,\frac{z}{x+y}=c$,则$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=$ ________;

(4) $\frac{1}{(x-2)(x-5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-5}$,则 $A=$ ________, $B=$ ______.

2. 若$\frac{4}{x^2+2x+1}-\frac{4}{x+1}+1=0$,则$\frac{x-1}{2x}$等于 ( )

(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

3. 已知:$x=\frac{a}{b}>1,y=\frac{a+2}{b+2}$,且 $b>-2$,则 ( )

(A) $x=2y$ (B) $x=y$ (C) $x<y$ (D) $x>y$

4. 容积相同的两个瓶装满酒精溶液.两瓶中酒精与水的容积比分别为 p,q.试求两瓶混合后的溶液中酒精与水的容积比.

5. 解方程 $2(x^2+\frac{1}{x^2})-3(x+\frac{1}{x})-1=0$.

五、说明

1. 计算、化简分式问题时应注意乘法公式的变形.如$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$等的应用.

2. 分式问题整式化的思想方法在5个例题中均有所体现,应仔细领会.同时注意整体思想及换元法的运用.

3. 部分分式问题(如例1)高中数学中常有运用,应给予重视.

1.3 二次根式

一、知识要点

1. 二次根式的概念：形如$\sqrt{a}(a \geqslant 0)$的代数式叫做二次根式.

2. 无理方程的概念：根号下含有未知数的方程，叫做无理方程(根号下含有字母的式子叫做无理式).

3. 二次根式的化简与运算：二次根式的乘法可参照多项式乘法进行，运算中要运用公式$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$；对于二次根式的除法，通常先写成分式的形式，然后通过分母有理化进行运算，有时需要进行约分，有时需要利用公式$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}(a \geqslant 0, b > 0)$；二次根式的加减法与多项式的加减法类似，应在化简的基础上去括号与合并同类根式.

4. 二次根式$\sqrt{a^2}$的化简：(1) 掌握二次根式的性质$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geqslant 0), \\ -a(a < 0); \end{cases}$ (2) 会利用(1)的性质化简二次根式.

二、例题分析

1. 比较大小：设$a = \sqrt{12} - \sqrt{11}, b = \sqrt{11} - \sqrt{10}$，则$a$ ______ b(选填“>”、“=”、“<”号).

解 将a, b分别进行分子有理化得：

$$a = \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}, b = \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{10}},$$

$\because \sqrt{12} + \sqrt{11} > \sqrt{11} + \sqrt{10}$,

$\therefore a < b$.

2. 分别将$\sqrt{12b}, \sqrt{a^2 b}(a \geqslant 0), \sqrt{4x^6 y}(x < 0)$化为最简二次根式.

解 $\sqrt{12b} = 2\sqrt{3b}, \sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b} = a\sqrt{b}(a \geqslant 0)$,

$\sqrt{4x^6y} = 2|x^3|\sqrt{y} = -2x^3\sqrt{y}(x < 0)$.

3. 化简：(1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$；(2) $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}(0 < x < 1)$.

解 (1) 原式 $= \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$.

(2) 原式 $= \sqrt{(x-\frac{1}{x})^2} = \left|x-\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}-x(0 < x < 1)$.

4. 已知 $x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值.

解 $x+y=10, xy=1$,

则 $3x^2-5xy+3y^2 = 3(x+y)^2-11xy = 3\times 10^2-11 = 289$.

5. 解方程：$\sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{x^2+3x-9} = 2$.

解 注意到：$(x^2+3x+7)-(x^2+3x-9) = 16$，而

$$\sqrt{x^2+3x+7}-\sqrt{x^2+3x-9}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2+3x-9}} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+3x+7}+\sqrt{x^2+3x-9} = 8. \qquad (*)$$

(*)与原方程相加得：

$\sqrt{x^2+3x+7} = 5$，而两边平方得 $x^2+3x-18=0$，解得：$x_1 = 3$，$x_2 = -6$. 经检验，都是方程的根.

想一想：还有什么解法？检验的关键是什么？

三、练习题 A

1. 填空

(1) $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} =$ ________；

(2) 若 $\sqrt{(5-x)(x-3)^2} = (x-3)\sqrt{5-x}$，则 x 的取值范围是________；

(3) 计算 $4\sqrt{24}-6\sqrt{54}+3\sqrt{96}-2\sqrt{150} =$ ________；

(4) 若 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,则 $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

$=$ ________________.

2. 等式 $\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ 成立的条件是(　　)

(A) $x\neq 2$　　(B) $x>0$

(C) $x>2$　　(D) $0<x<2$

3. 若 $b=\dfrac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{1-a^2}}{a+1}$,求 $a+b$ 的值.

4. 解方程 $\sqrt{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

四、练习题 B

1. 填空

(1) $(2+\sqrt{3})^{18}\cdot(2-\sqrt{3})^{19}=$ __________;

(2) 若 $\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{(1+a)^2}=2$,则 a 的取值范围是

__________;

(3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}=$

__________.

2. 若 $\sqrt{-a-b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{-b}-\sqrt{-a}$,则　　(　　)

(A) $a<b$　　(B) $a>b$

(C) $a<b<0$　　(D) $b<a<0$