混沌数学基础

朱培勇　编著

科学出版社

混沌数学基础

朱培勇　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要从数学角度讲述混沌的概念、性质、基本理论与解析判定方法.本书引入了Li-Yorke混沌与Devaney混沌概念并讨论其条件化简问题，证明了三角帐篷映射、蒙古包映射、符号空间上移位映射以及平面Smale马蹄映射等映射或系统的混沌性，给出了“周期三意味着混沌”的详细证明，证明了Devaney混沌与Li-Yorke混沌等在拓扑共轭下的不变性，讲述了拓扑熵及其与Li-Yorke混沌的关系等并展示了用Melinkov定理判别系统混沌性的方法.

本书可作为从事混沌理论与应用研究人员的入门读物，也可作为相关专业的高年级本科生或研究生的教材.

图书在版编目(CIP)数据

混沌数学基础/朱培勇编著. —北京：科学出版社，2016. 9
ISBN 978-7-03-049940-0

Ⅰ. ①混… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①混沌—数学方法 Ⅳ. ①O415.5 ②O411

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第226801号

责任编辑：李静科 赵彦超／责任校对：彭 涛
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016年9月第 一 版 开本：720×1000 B5
2016年11月第二次印刷 印张：9 3/8
字数：180 000
定价：58.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

对混沌现象的理论探索, 自 20 世纪 70 年代掀起热潮以来, 已历经了 40 多个年头, 至今仍方兴未艾. 混沌学作为一门新学科, 其研究领域之深广、攻关气势之磅礴, 影响着整个学术界. 一大批不同学科、不同方向的专家和学者不断投入到混沌学的应用与理论研究中, 取得了众多令人惊奇的成果, 发表了数以万计的科学论文或著作, 吸引着大量的科技工作者和青年学生积极投入.

本书是混沌理论学习与研究的入门之书, 主要从数学的角度对混沌的数学基础展开讨论与探索, 从不同方面给予混沌严格的数学定义, 力求用最通俗的严格数学语言描述混沌的基本性质与基本特征, 以此建立混沌的基本理论. 其方法蕴含点集拓扑学、泛函分析与微分方程及其稳定性理论的一些技巧. 根据作者多年来对研究生讲述这门课程的经验, 读者只要有较为扎实的数学功底、平静的心态和足够的时间投入学习, 就能读懂或者掌握书中的基本内容. 因此, 无须专门先修拓扑学、泛函分析等课程. 关于这一点, 我校 (电子科技大学) 通信、计算机、生命科学、经济与金融等专业的一些研究生没有学过拓扑学与泛函分析等数学专业课程, 但他们在选修这门课程的学习中也取得了比较好的成绩. 当然, 数学专业的优秀本科生顺利地读懂和学好这门课程是不会有问题的.

全书共分为 6 章, 第 1 章在简述混沌学的产生的同时, 引入两种基本混沌 (Li-Yorke 混沌与 Devaney 混沌) 的定义并且讨论两种基本混沌的条件化简问题. 第 2 章重点讨论三角帐篷映射与蒙古包映射的混沌性, 为了证明蒙古包映射的 Li-Yorke 混沌性给出了拓扑共轭这一重要概念, 同时证明了在一般度量空间上 Devaney 混沌在拓扑共轭下的不变性. 最后, 给出了 Li-Yorke 定理 (周期 3 意味着混沌) 的详细证明. 第 3 章主要介绍度量空间、特殊的度量空间 (符号空间与 Banach 空间) 的一些混沌及其性质特征, 首先证明: 紧度量空间上 Li-Yorke 混沌在拓扑共轭下的不变性; 其次, 介绍在混沌应用上非常广泛并且非常重要的符号空间上的移位映射, 给出了该映射的 Devaney 混沌性与 Li-Yorke 混沌性的详细证明并且在平面上引入了 Smale 马蹄映射的概念, 证明了该马蹄映射的 Devaney 混沌性. 3.4 节和 3.5 节主要是作者与自己的研究生们的部分结果, 特别是吴新星博士和卢天秀博士在攻读博士学位期间的一些研究成果为本书丰富了不少内容. 第 4 章主要讲述拓扑熵及其拓扑熵与 Li-Yorke 混沌的关系. 第 5 章是第 6 章的预备知识. 第 6 章介绍混沌的解析判别方法, 展示如何用 Melinkov 定理判别系统的混沌性.

最后需要提及的是本书存在一些不尽如人意的地方, 例如, 3.4 节的第二部分:

拓扑空间上的 Li-Yorke 混沌, 这部分写得不够令人满意. 因为 Li-Yorke 混沌推广到满足第一可数性公理的拓扑空间时依赖于邻域基的选择, 而任何第一可数的拓扑空间有很多不同的邻域基. 因此, 对于同一个系统来讲选取不同邻域基系统的混沌性是否受到影响? 关于这一问题至今没有完满解决, 将其没有很好解决的问题写到这里的目的是期盼后来的读者和学者们能够完满地解决这一问题.

本书在编写过程中, 得到了电子科技大学研究生院和数学科学学院的关心、支持与学科建设经费的资助. 电子科技大学教务处处长黄廷祝教授对本书的撰写给予了极大的鼓励, 数学科学学院院长徐立伟教授、党委孙清平书记以及吴磊副院长、程光辉副院长等领导和老师们都对本书的出版给予了极大的关心与支持; 电子科技大学历届选修这门课程的 (硕士/博士) 研究生们为本书的撰写与修改提出了很多宝贵的修改意见. 在此, 作者对这些关心和支持过本书撰写与出版的所有单位、领导、同行、学生以及各位朋友表示衷心感谢!

作　者

2016 年秋于电子科技大学 (成都)

目　录

第 1 章　混沌简介与知识准备

1.1　混沌学的产生与混沌概念的引入

为了介绍混沌学的起源、发展以及在科学与工程中的作用, 借助如下两位著名学者对混沌 (chaos) 的评述作为本书的开始.

(1) 中国科学院院士郝柏林: “混沌, 这个在中外文化渊源悠久的词儿, 正在成为具有严格定义的科学概念, 成为一门新科学的名字, 它正在促使整个现代知识体系成为新科学.”[13]

(2) Gleick(詹姆斯 · 格雷克) 在他的《混沌 —— 开创新科学》一书中讲到: “越来越多的人认识到, 这是相对论和量子力学问世以来, 对人类整个知识体系的又一次巨大冲击, 这也许是 20 世纪后半叶数理科学所做的最有深远意义的贡献.”[12]

近半个世纪以来, 人们发现在自然界和社会生活中混沌现象无所不有、无所不在, 因而, 对混沌的研究已经深入到自然科学和社会科学的各个领域: 物理、数学、化学、生物、天文、气象、地质探测、经济与金融、通信、电子电工、人文社科等.

因此, 在科学界越来越多的学者认为, 20 世纪人类对科学的三大贡献为: ①相对论; ②量子力学; ③混沌学.

1.1.1　混沌学 (chaology) 的诞生

美国麻省理工学院洛伦兹 (Lorenz E N) 于 1963 年在《大气科学》杂志上发表了《决定性的非周期流》一文, 阐述了在气候不能精确重演与长期天气预报者无能为力之间必然存在着一种联系, 这就是非周期性与不可预见性之间的关系. 洛伦兹在计算机上用他所建立的微分方程模拟气候变化的时候, 偶然发现输入的初始条件的极细微的差别可以引起模拟结果的巨大变化. 洛伦兹打了一个比喻: 在南半球巴西某地一只蝴蝶的翅膀的偶然扇动所引起的微小气流, 几星期后可能变成席卷北半球美国得克萨斯州的一场龙卷风, 这就是后来人们常常津津乐道的天气的 “蝴蝶效应”.

1972 年 12 月 29 日, 洛伦兹在美国科学发展学会第 139 次会议上又发表了题为《蝴蝶效应》的论文, 由此进一步地提出了天气的不可准确预报性的论断.

洛伦兹揭示的气候变化或者说气象学中的这一现象, 应该说是科学界第一次正式提出的混沌学的一个实际模型.

一般来讲, 确定性系统中貌似随机的不规则运动, 即一个由确定的理论描述的

系统, 其行为表现为不确定性 (具有不可重复与不可预测性质). 正如: 一个随时间确定性变化或具有微弱随机性的变化系统中, 两个几乎完全一致的状态经过充分长时间后变得毫无一致, 这恰如从长序列中随机选取的两个状态那样, 这就是所谓的貌似随机性. 这种系统被称为敏感地依赖于初始条件, 这种现象就是混沌现象, 这种系统就是混沌系统.

近些年的研究表明: 混沌是非线性动力系统的固有特性, 是非线性系统普遍存在的现象. 牛顿确定性理论能够充分处理的多为线性系统, 而线性系统大多是由非线性系统简化而来. 因此, 在现实生活和实际工程技术问题中, 混沌是无处不在的.

1.1.2 混沌概念的精确定义

虽然洛伦兹从气象学的角度解释了混沌现象的存在性, 但是混沌作为一个科学名词第一次出现在学术杂志是在 1975 年 12 月李天岩 (Li T Y) 和约克 (Yorke J A) 发表于*Amer. Math. Monthly* (《美国数学月刊》) 的论文: *Period three implies chaos* (周期三意味着混沌). 从此, chaos 作为一个科学代名词被里程碑式的确定下来.

李天岩和约克的混沌定义, 被后来者称为 Li-Yorke 定义, 其具体如下.

定义 1.1.1 (Li-Yorke, 1975) 设 I 是一个区间, 称连续映射 $f: I \to I$ 是混沌的 (混沌映射), 如果周期集 $P(f) = \mathbb{N}$ 且存在不可数集 $S_0 \subset I \backslash \mathrm{Per}(f)$, 合于

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)| > 0 (\forall x, y \in S_0,\ x \neq y)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \inf |f^n(x) - f^n(y)| = 0 (\forall x, y \in S_0)$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(p)| > 0 (\forall x \in S_0,\ \forall p \in \mathrm{Per}(f))$,

其中, $P(f)$ 和 $\mathrm{Per}(f)$ 分别是 $f: I \to I$ 的所有周期构成的集合和所有周期点构成的集合, $\mathbb{N}$ 表示自然数 1,2, $\cdots$ 的集合.

关于周期点的定义: 设 $f: I \to I$,

(1) 定义 $f^n(x) = f^{n-1} \circ f(x) = f^{n-1}(f(x))$, 其中 f^0 为恒等映射并且 n 是自然数;

(2) 设 $x_0 \in I$, 如果 $\exists n \in \mathbb{N}$ 使得 $f^n(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 f 的周期点. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 即 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 f 的不动点; 如果 $\exists n \in \mathbb{N}$, 使得 $f^n(x_0) = x_0$, 但 $f^k(x_0) \neq x_0 (k = 1, 2, \cdots, n-1)$, 则称 x_0 为 f 的 n-周期点, 并称 n 为点 x_0 关于 f 的周期, 通常用 $\mathrm{Per}(f)$ 表示 f 的周期点的全体, 即

$$\mathrm{Per}(f) = \{x \in I |\ \exists n \in \mathbb{N}, f^n(x) = x\}.$$

Li-Yorke 在 1975 年的*Amer. Math. Monthly* 上证明了如下定理.

定理 1.1.1 (Li-Yorke, 1975) 设 I 是一个区间, $f: I \to I$ 是连续映射, 若存在 $a \in I$ 使得 $b = f(a)$, $c = f^2(a)$, $d = f^3(a)$ 合于 $d \leqslant a < b < c$(或 $d \geqslant a > b > c$), 则

(T1) $\forall k \in \mathbb{N}$, 在 I 中存在一个 k-周期点, 即 $\exists x_0 \in I$ 使得 $f^k(x_0) = x_0$ 并且当 $1 \leqslant i < k$ 时, $f^i(x_0) \neq x_0$.

(T2) 存在一个不可数集 $S_0 \subset I \backslash \mathrm{Per}(f)$ 满足下列条件:

(i) $\forall p, q \in S_0$, $p \neq q$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |f^n(p) - f^n(q)| > 0$, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \inf |f^n(p) - f^n(q)| = 0;$$

(ii) $\forall p \in S_0$, $\forall q \in \mathrm{Per}(f)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |f^n(p) - f^n(q)| > 0$.

在上面定理中, 当 $d = a$ 时, 即 $b = f(a)$, $c = f^2(a)$, $a = f^3(a)$, 则上定理的结论 (T1) 与 (T2) 都成立. 这就是四十年来科学界广泛重视的著名结果: "周期三意味着混沌".

近半个世纪以来, 人们始终力求用科学的方法准确地描述存在于自然界、社会生活、科学实验里确定系统中的内在随机现象和复杂性问题 (无序性, 乱七八糟). Li-Yorke 的混沌定义是精确、严格的数学定义, 但是定义太抽象, 没有直观地反映确定系统中的内在随机性等特征. 实际上, 我们不难看出: Li-Yorke 的定义存在如下两方面的不足:

(A1) 映射是在区间上定义的, 适用范围太狭窄;

(A2) 定义是高度抽象的数学定义, 缺乏直观性, 不利于工程应用, 也无法解释确定系统中的内在随机现象.

为克服 (A1) 在混沌研究中带来的困难, 文献 [16] 中将上述 Li-Yorke 定义推广到度量空间. 后来, 文献 [4] 又对其作了如下修正.

定义 1.1.2 设 X 是度量空间, 连续映射 $f: X \to X$ 称为是一个混沌映射, 如果存在一个不可数集合 $S_0 \subset X \backslash \mathrm{Per}(f)$, 对于 $\forall p, q \in S_0$, $p \neq q$, 恒有

$$\lim_{n\to\infty} \sup d(f^n(p),\ f^n(q)) > 0 \text{ 并且 } \lim_{n\to\infty} \inf d(f^n(p),\ f^n(q)) = 0, \qquad (*)$$

则称满足 $(*)$ 中两式的点集 $S_0 \subset X \backslash \mathrm{Per}(f)$ 为 Li-Yorke 混沌集 (混沌集).

区别定义 1.1.1 与定义 1.1.2, 我们称满足定义 1.1.2 的混沌为弱 Li-Yorke 混沌, 即贯穿本书, 我们有如下定义.

定义 1.1.2′ 设 X 是度量空间, 连续自映射 $f: X \to X$ 称为是弱 Li-Yorke 混沌的, 如果 f 存在不可数的混沌集.

根据定义 1.1.2′ 和后面的推论 1.3.3 可直接得到如下结果.

定理 1.1.2 设 X 是度量空间, 连续自映射 $f: X \to X$ 是 Li-Yorke 混沌的当且仅当它是弱 Li-Yorke 混沌的并且 $P(f) = \mathbb{N}$.

在 1.3 节中, 我们将用例子说明: 对于连续自映射而言, Li-Yorke 混沌是严格地强于弱 Li-Yorke 混沌的.

为克服 (A2) 在应用研究中的不足, 1989 年, Devaney[2] 对混沌作了如下更直观的定义.

定义 1.1.3 (Devaney, 1989)　设 X 是一个度量空间, $f: X \to X$ 是连续映射, 且满足

(i) f 对初值是敏感依赖的;

(ii) f 是拓扑传递的;

(iii) f 的周期点在 X 内稠密,

则称映射 f 在 Devaney 意义下是混沌的 (即 f 是 Devaney 混沌映射).

注　(i) 对初值敏感依赖: 在物理上称为 "蝴蝶效应". 如果用 ρ 表示度量空间 X 上的距离 (度量) 函数, $x \in X$, 则物理含义在数学上精确为: 存在实数 $\delta > 0$, 对于任何实数 $\varepsilon > 0$, 存在 $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$, 存在自然数 n 使得 $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$, 这时称映射 f 关于初值 x 是敏感依赖的; 如果映射 f 以空间 X 中任何一点 x 为初值都是 "一致" 敏感依赖的, 即存在实数 $\delta > 0$, 对于 $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, 存在点 $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$, 存在自然数 n 使得 $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$, 则称 f 对初值是敏感依赖的, 其中 $B_\rho(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(y, x) < \varepsilon\}$ 是 x 点的 ε-开球体.

(ii) 拓扑传递性: 映射 $f: X \to X$ 称为是拓扑传递的, 如果 $\exists x_0 \in X$ 使得

$$\overline{\mathrm{Orb}_f(x_0)} = X,$$

其中: $\mathrm{Orb}_f(x_0) = \{ f^n(x_0) \mid n = 0, 1, 2, \cdots \}$ 称为点 x_0 的轨道, 并且 $\overline{\mathrm{Orb}_f(x_0)}$ 表示度量空间 X 的子集 $\mathrm{Orb}_f(x_0)$ 的闭包. 在本书中, 有时也把点 x_0 的轨道 $\mathrm{Orb}_f(x_0)$ 简写为 $O_f^+(x_0)$(例如: 在 3.5 节中).

(iii) 周期点的稠密性: 空间 X 中任何点的任意充分小的范围 (邻域) 内都有 f 的周期点, 即 $\overline{\mathrm{Per}(f)} = X$.

关于拓扑传递与周期点稠密的直观理解, 放到定理 1.2.5 之后来描述.

自上述 Li-Yorke 混沌定义与 Devaney 混沌定义引入以来, 学者们一直在探索如下两个问题:

(1) 无论是 Li-Yorke 混沌还是 Devaney 混沌, 其定义中条件都很多, 这些条件是相互独立的吗? 即能否将定义中的条件加以压缩使定义变得更简单一些呢?

(2) Li-Yorke 混沌定义与 Devaney 混沌定义相互等价吗? 即两个定义可以互推吗?

关于这两个问题, 在 1.3 节我们将对它们作专门讨论.

为了将来问题叙述的方便, 现在我们作如下一些约定.

设 X,Y 是两个集合, 本书始终用符号 $f: X \to Y$ 表示 X 到 Y 的映射. 如果 $Y = X$, 即映射 $f: X \to X$ 称为是 X 上的自映射. 如果 X 是一个度量空间 (或者拓扑空间), 并且 $f: X \to X$ 连续, 则称 f 是 X 上的一个连续自映射.

为了与动力系统的理论和工程应用研究的说法保持一致, 当 f 是 X 上的一个连续自映射时, 我们常常称有序对 (X, f) 是一个系统.

在此, 如下两个概念在本书中也常常涉及.

定义 1.1.4 设 X 和 Y 是两个集合, A 是 X 的一个非空子集.

(1) 如果映射 $f: X \to Y$ 和 $g: A \to Y$ 满足条件 $g \subset f$, 即对于 $\forall x \in A$ 有 $f(x) = g(x)$, 则称 g 是 f 在 A 上的限制, 也称 f 是 g 在 X 的一个扩张, 记作 $g = f|_A$.

(2) 如果 $f: X \to X$ 并且 $f(A) \subset A$, 即 $f|_A$ 是 A 到 A 的映射, 则称 A 为 f 的不变子集, 并称系统 $(A, f|_A)$ 是系统 (X, f) 的子系统.

定义 1.1.5 设 X 是一个度量空间, $f: X \to X$ 连续并且 $X \supset A \neq \varnothing$.

(1) 连续自映射 f 称为是 Li-Yorke (Devaney) 混沌的当且仅当系统 (X, f) 是 Li-Yorke (Devaney) 混沌的.

(2) 系统 (X, f) 称为是具有 Li-Yorke (Devaney) 混沌表象的当且仅当存在 X 的非空的不变子集 A 使得系统 $(A, f|_A)$ 是 Li-Yorke (Devaney) 混沌的. 即系统 (X, f) 称为是具有 Li-Yorke (Devaney) 混沌表象的当且仅当它有一个子系统是 Li-Yorke (Devaney) 混沌的.

下面是本书常用的一些符号:

$\mathbb{N}$—— 自然数集 $\{1, 2, 3, \cdots\}$;

$\mathbb{Z}$—— 整数集;

$\mathbb{Z}^+$—— 非负整数集 $\{0, 1, 2, \cdots\}$;

$\mathbb{R}$—— 实数集, 也用区间 $(-\infty, +\infty)$ 来表示;

$\mathbb{R}^+$—— 非负实数集;

$\varnothing$—— 空集;

$\sup A$—— 集合 A 的上确界;

$\inf A$—— 集合 A 的下确界;

$[-\infty, +\infty]$—— 扩充实数集 $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.2 预备知识

本节主要介绍本书所需要的基本预备知识, 主要有如下两方面: ①数列上极限与下极限; ②度量空间的基本点集.

1.2.1 上极限与下极限

定义 1.2.1 设 $\{x_n\}$ 是一个数列, $a \in [-\infty, +\infty]$, 如果 $\{x_n\}$ 有一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \to a \ (k \to \infty)$, 则称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的一个极限点.

由这一定义不难得知：数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 有极限点 $a=0$；数列 $\{(-1)^n\}$ 有两个极限点 $a=\pm1$；数列 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 有三个极限点 $\{-1,0,1\}$；如果 $\{r_n\}$ 是所有有理数构成的数列，则任何实数 a 都是它的极限点，$+\infty$ 与 $-\infty$ 也是该数列的极限点. 于是，一个自然的问题是：是否任何数列都有极限点呢？下一命题是该问题的一个肯定回答.

命题 1.2.1　任何实数列 $\{x_n\}$ 都至少有一个极限点.

证明　设 $\{x_n\}$ 是任意一个实数列，若 $\{x_n\}$ 是有界数列，根据数学分析中的 Bolzano-Weiestrass 定理，它有一个收敛子列 $x_{n_k}\to a\ (k\to\infty)$，则 a 是 $\{x_n\}$ 的极限点.

如果 $\{x_n\}$ 是无界数列，即对于 $\forall M>0$，$\exists n_M\in\mathbb{N}$ 使得 $|x_{n_M}|>M$. 特别地，当 $M=1$ 时，$\exists n_1\in\mathbb{N}$，有 $|x_{n_1}|>1$. 因 $\{x_n\}_{n=n_1+1}^{\infty}$ 也是无界的，则对于 $M=2$，存在自然数 $n_2>n_1$ 使得 $|x_{n_2}|>2$. 假设 $x_{n_1},\cdots,x_{n_k}$ 已经取出并且 $n_1<n_2<\cdots<n_k$ 与 $|x_{n_i}|>i\ (1\leqslant i\leqslant k)$ 成立. 又因为 $\{x_n\}_{n=n_k+1}^{\infty}$ 是无界数列，故有自然数 $n_{k+1}>n_k$ 使得 $|x_{n_{k+1}}|>k+1$. 这样我们归纳地取得数列 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\forall k\in\mathbb{N}$，有 $|x_{n_k}|>k$.

因为 $\forall k\in\mathbb{N}$，有 $x_{n_k}\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，则 $\{x_{n_k}\}$ 必有一个无限子列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使得 $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}\subset(-\infty,0)$ 或者 $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$.

不失一般性，设 $\{x_{n_{k_i}}\}_{i=1}^{\infty}\subset(0,+\infty)$，则 $\forall\, i\in\mathbb{N}$，有 $x_{n_{k_i}}=|x_{n_{k_i}}|>k_i$. 从而，$\lim\limits_{i\to\infty}x_{n_{k_i}}=+\infty$. 即 $a=+\infty$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个极限点. □

既然任何数列都至少存在一个极限点，那么一个数列的极限点构成的集合中是否一定有最大的极限点与最小的极限点呢？下一定理对此问题作出肯定回答.

定理 1.2.2　任何数列的极限点集中都存在有最大极限点与最小极限点. 特别地，如果数列为 $\{x_n\}$，则它最大极限点与最小极限点分别为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{x_n,\ x_{n+1},\cdots\}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\{x_n,\ x_{n+1},\cdots\}$. 通常分别简单记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n$.

证明　我们只证最大极限点的情形，关于最小极限点的情形可用完全类似的方法证明.

对于 $\forall n\in\mathbb{N}$，令 $b_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$，则 $\{b_n\}$ 是一个单调递减数列. 因此，存在 $b\in[-\infty,+\infty]$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.

现在证明：b 是 $\{x_n\}$ 的最大极限点. 首先作一个数列 $\{b'_n\}$ 满足：① $b'_n<b_n\ (\forall n\in\mathbb{N})$；② $\lim\limits_{n\to\infty}b'_n=b$.

事实上，$\forall n\in\mathbb{N}$，若 b_n 为有限实数，则取 $b'_n=b-\dfrac{1}{n}$；若 $b_n=+\infty$，则取 $b'_n=n$.

因此, 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$, 总有

$$b_n' < b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}, \text{且} \lim_{n\to\infty} b_n' = b.$$

特别地, 因为 $b_1' < b_1 = \sup\{x_1, x_2, \cdots\}$, 由上确界的定义, 存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $b_1' < x_{n_1} \leqslant b_1$. 又因 $b_{n_1+1}' < b_{n_1+1} = \sup\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \cdots\}$, 存在 $n_2 > n_1$ 使得

$$b_{n_1+1}' < x_{n_2} \leqslant b_{n_1+1}.$$

同上, 因为 $b_{n_2+1}' < b_{n_2+1} = \sup\{x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \cdots\}$, 存在 $n_3 > n_2$ 使得

$$b_{n_2+1}' < x_{n_3} \leqslant b_{n_2+1}.$$

这样继续下去, 得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 对于任何自然数 $k \geqslant 2$, 合于

$$b_{n_{k-1}+1}' < x_{n_k} \leqslant b_{n_{k-1}+1}.$$

又因为 $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n_{k-1}+1}' = \lim\limits_{k\to\infty} b_{n_{k-1}+1} = b$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = b$. 从而, b 为 $\{ x_n\}$ 的一个极限点.

此外, 设 c 是 $\{x_n\}$ 的任一极限点, 则 $\{x_n\}$ 有子列 $x_{n_j} \to c\ (j \to \infty)$. 因为 $\forall j \in \mathbb{N}$, $x_{n_j} \leqslant b_{n_j}$, 则 $c = \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} \leqslant \lim\limits_{j\to\infty} b_{n_j} = b$.

因此, b 是 $\{x_n\}$ 的最大极限点. 又因 $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 并且 $b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, 从而 $b = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$.

同理, $\{x_n\}$ 有最小极限点 $a = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. □

从上述定理不难看出: Li-Yorke 混沌定义中的符号 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)|$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} \inf |f^n(x) - f^n(y)|$ 实际上是数列 $\{ |f^n(x) - f^n(y)| \}_{n=1}^{\infty}$ 的最大极限点和最小极限点. 在数学分析教材中, 有如下定义.

定义 1.2.2 数列 $\{x_n\}$ 的最大极限点, 称为是数列 $\{x_n\}$ 的上极限, 记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$; 数列 $\{x_n\}$ 的最小极限点, 称为是数列 $\{x_n\}$ 的下极限, 记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

因此, 任何实数序列 $\{x_n\}$ 上极限与下极限总有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n \text{与} \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n.$$

现在, 一个自然的问题是: 数列 $\{x_n\}$ 的上极限、下极限与数列极限之间有何关系呢?

为了知识的完整性, 在此, 我们给出数学分析中的如下定理.

定理 1.2.3 设 $\{x_n\}$ 是一个数列并且 $a \in [-\infty, +\infty]$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 当且仅当

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a.$$

证明 (必要性) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\{x_n\}$ 的任何一个子列都收敛于 a. 即 $\{x_n\}$ 的唯一极限点 a 既是最大极限点, 也是最小极限点. 因此, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$.

(充分性) 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$. 对于 $a \in [-\infty, +\infty]$, 我们分成 $a \in (-\infty, +\infty)$ (即 a 为有限实数) 和 $a \in \{-\infty, +\infty\}$ 两种情形来进行证明.

当 $a \in (-\infty, +\infty)$ 时, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} = a < a + \varepsilon,$$

故存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $\forall n \geqslant N_1$ 时, 有

$$x_n \leqslant \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} < a + \varepsilon.$$

又因 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} = a > a - \varepsilon$, 则 $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N_2$, 有

$$x_n \geqslant \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} > a - \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n \geqslant N$, 恒有

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \text{ 即 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

从而, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

当 $a \in \{-\infty, +\infty\}$ 时, 若 $a = +\infty$, 即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, 则对于 $\forall M > 0$, 因为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} = +\infty > M$, 则 $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, 有

$$x_n \geqslant \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} > M,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty = a$; 若 $a = -\infty$, 因对 $\forall M > 0$, 有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} = -\infty < -M,$$

则 $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant N$, 有 $x_n \leqslant \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} < -M$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty = a$.

综上, 对于 $a \in [-\infty, +\infty]$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

1.2.2 度量空间及相关知识

定义 1.2.3 设 X 为一个非空集合, 其中的每个元素 x 都称为是 X 中的一个点, $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个非负二元实函数. 如果对于 $\forall x, y, z \in X$, 该非负实函数具有如下三个性质.

(1) 非负性: $\rho(x, y) \geqslant 0$, 并且 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(3) 三角不等式: $\rho(x,\ z) \leqslant \rho(x,\ y) + \rho(y,\ z)$,
则称函数 ρ 为 X 上的一个度量, 并且称有序对 (X,d) 为一个度量空间. 在不会发生混淆的情况下, 通常简记 (X,d) 为 X.

现在, 我们将数学分析中的邻域概念引进度量空间. 数学分析中把开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 称为点 a 的 ε-邻域. 即数轴上与点 a 的距离小于 ε 的所有点的集合. 类似地, 对于度量空间 $(X,\ \rho)$, 有如下定义.

定义 1.2.4 设 X 是一个度量空间 (ρ 为 X 上的度量), $x \in X$, ε 为正实数, 则 X 的子集

$$B_\rho(x,\varepsilon) = \{\, y \in X : \rho(y,x) < \varepsilon \,\}$$

称为以点 x 为中心, 半径为 ε 的邻域, 简称为点 x 的 ε-邻域. 在不发生混淆时一般将 $B_\rho(x,\varepsilon)$ 简记为 $B(x,\varepsilon)$.

例 1.2.1 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n,\rho)$ 是一个度量空间, 其度量函数 $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 为

$$\rho(x,\ y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

其中: $\forall x = (x_1,\cdots,x_n), y = (y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^n$. 特别地, 当 $n=1$ 时, $\rho(x,y) = |x-y|$ 是实直线 $\mathbb{R}$ 上点 x 与 y 的距离. 对于 $x \in \mathbb{R}$, 实数 $\varepsilon > 0$, 点 x 的 ε-邻域

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : |y-x| < \varepsilon\} = (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$$

就是通常的区间邻域.

例 1.2.2 设 X 为任一非空集合, $\forall x,\ y \in X$, 定义 $\rho(x,\ y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$, 则满足定义 1.2.3 中 (1)—(3). 因此, $(X,\ \rho)$ 是一个度量空间. 这个度量空间的一个重要特征是: 对于任何实数 ε $(0 < \varepsilon < 1)$, 都有 $B(x,\varepsilon) = \{x\}$. 因此, 该度量空间被称为离散度量空间, ρ 称为离散空间 X 上的度量.

下面类比实变函数论课程中开集、闭集、聚点、导集、闭包的概念, 在度量空间中引入相应概念.

定义 1.2.5 若 A 是度量空间 X 的子集, $x \in X$.

(1) 点 x 称为点集 A 在 X 中的内点, 如果 $\exists \varepsilon > 0$ 使得 $B(x,\varepsilon) \subset A$; 点集 A 的所有内点所构成的集合称为 A 的内部, 记为 A^0 或者 $\operatorname{Int} A$; 点集 A 称为开集, 如果 $A = A^0$.

(2) 点 x 称为是点集 A 的一个聚点, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 有 $B(x,\ \varepsilon) \bigcap (A \backslash \{x\}) \neq \varnothing$; 点集 A 的所有聚点构成的集合, 称为点集 A 的导集, 记为 A'.

(3) 点 x 称为是点集 A 的一个孤立点, 如果 $\exists\varepsilon>0$, 有 $B(x,\ \varepsilon)\bigcap A=\{x\}$. 特别地, 点 x 称为是 X 的一个孤立点, 如果 $\exists\varepsilon>0$ 使得

$$B(x,\ \varepsilon)\bigcap X=B(x,\varepsilon)=\{x\}.$$

(4) 点集 $A\bigcup A'$ 称为 A 的闭包, 记为 $\overline{A}$ 或者记为 $\mathrm{cl}A$, 即 $\overline{A}=A\bigcup A'$.

(5) 点集 A 称为闭集, 如果 $A=\overline{A}$.

(6) 点集 A 称为是 X 的稠密子集 (稠子集), 如果 $\overline{A}=X$.

下面是由上述概念推出的一些重要结论.

定理 1.2.4 设 X 是一度量空间, $A\subset X$, 则 A 是 X 中开集当且仅当 A 是 X 中若干球形邻域的并.

证明 (必要性) 设 A 是 X 中的开集, 即 $A=A^0$, 所以 $\forall x\in A$, $\exists\varepsilon_x>0$ 使得 $B(x,\ \varepsilon_x)\subset A$, 则 $\bigcup\limits_{x\in A}B(x,\ \varepsilon_x)=A$.

(充分性) 设 $A=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B(x_\lambda,\ \varepsilon_\lambda)$, 其中每个 $B(x_\lambda,\ \varepsilon_\lambda)$ 为 x_λ 的 ε_λ-邻域. $\forall x\in A$, $\exists\lambda\in\Lambda$ 使得 $x\in B(x_\lambda,\ \varepsilon_\lambda)$, 取 $\varepsilon=\varepsilon_\lambda-d(x,\ x_\lambda)>0$, 则

$$B(x,\ \varepsilon)\subset B(x_\lambda,\ \varepsilon_\lambda)\subset A,$$

即 x 为 A 的内点. 所以 $A=A^\circ$. 因此, A 为 X 中的开集. □

定理 1.2.5 X 的子集 A 是闭集当且仅当 $X\backslash A$ 是开集.

证明 (必要性) 设 A 为 X 中闭集, 即 $A=\overline{A}$. 对于 $\forall x\in X\backslash A$, 若 $\forall\varepsilon>0$, 有 $B(x,\ \varepsilon)\not\subset X\backslash A$, 则

$$B(x,\ \varepsilon)\bigcap(A\backslash\{x\})=B(x,\ \varepsilon)\bigcap A\neq\varnothing.$$

故 $x\in A'\subset\overline{A}=A$. 这与 $x\in X\backslash A$ 矛盾. 从而, $\forall x\in X\backslash A$, $\exists\varepsilon_x>0$, 有 $B(x,\ \varepsilon_x)\subset X\backslash A$. 所以

$$X\backslash A=\bigcup_{x\in X\backslash A}\{x\}\subset\bigcup_{x\in X\backslash A}B(x,\ \varepsilon_x)\subset X\backslash A,$$

即 $X\backslash A=\bigcup\limits_{x\in X\backslash A}B(x,\ \varepsilon_x)$. 由定理 1.2.4, $X\backslash A$ 是开集.

(充分性) 如果 $A\neq\overline{A}$, 则 $\exists x\in\overline{A}\backslash A\subset X\backslash A$. 因为 $X\backslash A$ 为开集, 故 x 是 $X\backslash A$ 的一个内点. 因此, $\exists\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\ \varepsilon)\subset X\backslash A$, 即 $B(x,\ \varepsilon)\bigcap A=\varnothing$.

从而, $B(x,\ \varepsilon)\bigcap[A\backslash\{x\}]=\varnothing$. 这与 $x\in\overline{A}\backslash A\subset A'$ 矛盾. 所以 $A=\overline{A}$. □

下一定理可以直观地解释拓扑传递性与周期点的稠密性.

定理 1.2.6 设 X 是度量空间,$A\subset X$, 则 $x\in\overline{A}$ 当且仅当对 $\forall\varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\bigcap A\neq\varnothing$.