普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

高等数学（理工类）

（下册）

主编　吴志勤　王芬玲　郭延涛

科学出版社

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

高 等 数 学

(理工类)

(下册)

主　编　吴志勤　王芬玲　郭延涛

副主编　李雪臣　史艳华　王　楠

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十三五”规划教材，涵盖了教育部指定的大学本科高等数学教学基本要求的内容，全书分为上、下两册，共15个模块.上册主要内容为函数、极限、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用等 7 个模块；下册内容为微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微积分、无穷级数共 8 个模块.本书内容深入浅出，结构严谨，体系新颖，例题典型，注重应用，每个模块都配有不同类型的习题，重视对学生应用数学知识解决实际问题能力的培养.

本书可作为高等学校理工科非数学专业本科生的教材，也可供自学者或有关教师作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：理工类. 下册/吴志勤，王芬玲，郭延涛主编. —北京：科学出版社，2016. 8

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

ISBN 978-7-03-049559-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①吴… ②王… ③郭… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 189497 号

责任编辑：张中兴 陈曰德／责任校对：钟 洋

责任印制：徐晓晨／封面设计：迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年8月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16

2016年9月第二次印刷 印张：15

字数：355 000

定价：39.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

丛书序言

Preface to the series

本系列教材参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业公共数学系列课程教学基本要求, 结合编者多年来教学实践中的经验和体会, 在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成, 其目的是为应用型高等学校非数学类各专业学生提供比较适合的教材或学习参考书.

本系列教材包括: 《高等数学 (理工类)(上、下册)》、《线性代数 (理工类)》、《概率论与数理统计 (理工类)》、《高等数学 (文科类)》、《大学数学 (经济管理类)(Ⅰ 高等数学、Ⅱ线性代数、Ⅲ概率论与数理统计)》.

我们知道, 高等学校公共数学课程原来仅是非数学的理工科各专业的基础课程, 随着现代科学技术的迅猛发展, 特别是计算机和信息技术的发展, 近年来高等数学几乎普及到了经济管理类、外语类、艺术类等所有专业, 而不同科类的专业讲授的课时以及内容又千差万别. 目前, 关于公共数学课程系列教材或教科书已非常多, 这类教材主要以经典数学的理论为基础, 讲述其理论、方法与例题分析, 目的是帮助读者理解和掌握基本的数学概念和方法. 但是, 这类教材中的例题和习题几乎全部是数学类的, 这对于非数学类专业学生学习数学课程不能够很好地将其理论、方法应用于本专业. 另外, 这类教材几乎通用于所有的非数学类专业, 而不同的专业很难有针对性地选择本专业所学习的内容. 为此, 本系列教材力求在以下六个方面做一些尝试:

(1) 以数学的基本理论和方法为基础;

(2) 尽量与现代科学技术, 特别是信息技术发展相适应, 强调应用性、实效性;

(3) 教学内容模块化, 将系列课程的每门教材的内容划分为多个模块, 不同的专业可根据本专业培养方案的要求, 从中选取相应的模块, 使教学内容对专业更具有针对性;

(4) 改变传统教材太数学化的现象, 根据各个学科专业的特点, 针对不同专业配备相应的例题、练习题和习题, 以突出教学内容的应用性, 使教学内容更适应于应用型本科院校学生的需求;

(5) 有一定的可塑性, 能广泛适用于非数学类各专业的学生可根据其特点和需要选择教学内容和习题;

(6) 深入浅出, 易教易学, 突出重点, 强调案例式教学方法.

当然, 上述想法只是编者编写本系列教材的希望或初衷, 本系列教材距这样的目标还有一定的距离.

前　言

Preface

本书是普通高等教育“十三五”规划教材, 为了培养合格的高素质应用型人才, 我们结合多年来教学实践中的经验和应用型人才模式的探讨, 采用模块化教学的方式编写高等数学公共平台课程, 其目的是为应用型本科院校理工类专业学生提供一本比较适合的教材或学习参考书. 高等数学分为上、下册.

高等数学是理工类各专业的一门重要基础课程, 该门课程不仅为后续课程提供必备的数学工具, 而且培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、几何直观和空间想象能力, 从而使学生受到数学思维方法和运用这些方法解决自然科学、工程技术、生命科学等实际问题的初步训练, 为提高学生的科学素质及其终身发展奠定必要的数学基础.

本书的特色主要体现在以下六个方面:

(1) 在保证知识的科学性、系统性和严密性的基础上, 分模块编写.

(2) 注重数学知识与物理学、化学等专业背景的结合, 加强数学与各专业的联系.

(3) 简化理论推演, 强调实际应用. 学生能够直观感受所学知识的作用, 获得运用数学知识解决实际问题的技能.

(4) 加强知识的拓广, 增强其“做数学”的意识和能力.

(5) 强化数学建模, 提高学生的数学素养.

(6) 课后习题具有巩固数学基础, 同时和实际问题相结合的特点. 高等数学下册共分 8 个模块, 内容包括: 微分方程, 空间解析几何与向量代数, 多元函数微分法及其应用, 重积分, 曲线积分与曲面积分, 数项级数, 幂级数, 傅里叶级数.

本书模块 8 初稿由李雪臣执笔, 模块 9 初稿由史艳华执笔, 模块 10 初稿由郭延涛执笔, 模块 11 初稿由王芬玲执笔, 模块 12 初稿由王楠执笔, 模块 13～ 模块 15 初稿由吴志勤执笔. 吴志勤、王芬玲、郭延涛负责全书的统稿和定稿.

由于时间仓促, 加之编者水平有限, 书中缺点和错误在所难免, 恳请广大同行、读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月

目　录
Contents

模块8 微分方程

微分方程的形成与发展是和力学、天文学、物理学, 以及其他科学技术的发展密切相关的. 数学其他分支的新发展, 如复变函数等, 都对微分方程的发展产生了深刻的影响, 当前计算机的发展更是为微分方程的应用及理论研究提供了非常有力的工具.

牛顿研究天体力学和机械力学的时候, 利用了微分方程这个工具, 从理论上得到了行星运动规律. 后来, 法国天文学家勒维烈和英国天文学家亚当斯使用微分方程各自计算出那时尚未发现的海王星的位置. 这些都使数学家更加深信微分方程在认识自然、改造自然方面的巨大力量. 微分方程的理论逐步完善的时候, 只要列出相应的微分方程, 有了解方程的方法, 就可以精确地表述事物变化所遵循的基本规律, 微分方程也就成了最有生命力的数学分支. 本模块主要讨论微分方程的一些基本概念及几种常用的、基本的、简单的微分方程的解法, 而且本模块主要学习常微分方程.

8.1 微分方程的基本概念

微分方程是数学联系实际问题的重要渠道之一, 它从生产实践与科学技术中产生, 成为现代科学技术分析问题与解决问题的强有力工具. 根据实际问题所提供的情况, 列出含有要寻找的函数及其导数的关系式, 这种关系式就是微分方程.

引例 1 一曲线通过点 (1, 4), 且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $5x$, 求该曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$, 根据导数的几何意义, 可知未知函数 $y=y(x)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5x, \tag{8-1}$$

且满足下列条件:

$$x=1,\ y=4, \text{简记为 } y\,|_{x=1}=4, \tag{8-2}$$

对 (8-1) 式两端积分, 得

$$y=\int 5x\mathrm{d}x, \text{即 } y=\frac{5}{2}x^2+C, \tag{8-3}$$

其中 C 是任意常数.

将条件 "$x=1, y=4$" 代入 (8-3) 式, 由此得出常数 $C=\frac{3}{2}$. 把 $C=\frac{3}{2}$ 代入 (8-3) 式, 得

所求曲线方程 (称为微分方程满足条件 $y|_{x=1}=4$ 的解) 为 $y=\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}$.

引例 2 动力学问题

物体由高空下落, 除受重力作用外, 还受到空气阻力的作用, 空气的阻力可看作与速度的平方成正比, 试确定物体下落过程所满足的关系式.

解 设物体质量为 m, 空气阻力系数为 k, 又设在时刻 t 物体的下落速度为 v, 于是在时刻 t 物体所受的合外力为 $F=mg-kv^2$, 建立坐标系, 取向下方向为正方向, 根据牛顿第二定律得到关系式

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv^2. \tag{8-4}$$

而且, 满足初始条件

$$t=0\text{时}, v=0. \tag{8-5}$$

引例 3 电力学问题

在 R-L-C 电路, 它包括电感 L、电阻 R 和电容 C. 设 R, L, C 均为常数, 电源 $e(t)$ 是时间 t 的已知函数, 建立当开关 K 合上后, 电流 I 应满足的微分方程.

解 经过电感 L、电阻 R 和电容 C 的电压降分别为: $L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$, RI 和 $\frac{Q}{C}$, 其中 Q 为电量, 由基尔霍夫第二定律得到

$$e(t)=L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+RI+\frac{Q}{C}. \tag{8-6}$$

因为 $I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, 于是有

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{8-7}$$

这就是电流 I 应满足的微分方程. 如果 $e(t)=$ 常数, 则得到

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{I}{LC}=0. \tag{8-8}$$

如果又有 $R=0$, 则得到

$$\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+\frac{I}{LC}=0. \tag{8-9}$$

像 (8-1), (8-4), (8-7), (8-8), (8-9) 式就称为微分方程. 下面给出微分方程的基本概念.

8.1.1 常微分方程和偏微分方程

微分方程 含有自变量、未知函数及其导数的方程.

常微分方程 只含一个自变量的微分方程.

偏微分方程 自变量的个数为两个或两个以上的微分方程.

方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(t), \tag{8-10}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0, \tag{8-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin y=0 \tag{8-12}$$

是常微分方程的例子, y 是未知函数, 仅含一个自变量 t.

方程

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0, \tag{8-13}$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2T}{\partial t^2} \tag{8-14}$$

是偏微分方程的例子, T 是未知函数, x,y,z,t 是自变量.

微分方程的阶数 微分方程中出现的最高阶导数的阶数.

例如, 方程 (8-10), (8-12) 是二阶的常微分方程, 方程 (8-11) 是一阶的常微分方程, 而方程 (8-13), (8-14) 是二阶的偏微分方程.

一般的 n 阶微分方程具有形式

$$F\left(x,\,y\,,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)=0. \tag{8-15}$$

这里 $F\left(x,\,y\,,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)$ 是 $x,\,y,\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 的已知函数, 而且一定含有 $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$, y 是未知函数, x 是自变量.

8.1.2 线性和非线性方程

如果微分方程对于未知函数及其各阶导数的有理整式的整体而言是一次的, 则称为**线性微分方程**, 否则称为**非线性微分方程**. 如

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t \tag{8-16}$$

是非线性微分方程, 而 (8-10) 是一个二阶的线性微分方程. 一般的 n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x), \tag{8-17}$$

这里 $a_1(x),\ a_2(x),\ \cdots,\ a_n(x),\ f(x)$ 是 x 的已知函数.

8.1.3 解和隐式解

微分方程的解 满足微分方程的函数称为微分方程的解, 即若函数 $y=\varphi(x)$ 代入式 (8-15) 中, 使其成为恒等式, 则称 $y=\varphi(x)$ 为方程 (8-15) 的解.

例如, 容易验证 $y=\cos\omega x$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2y=0$ 的解.

如果关系式 $\Phi(x,\ y)=0$ 决定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 为方程 (8-15) 的解, 则称 $\Phi(x,\ y)=0$ 是方程 (8-15) 的**隐式解**. 例如, 一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}$$

有解 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$, 而关系式 $x^2+y^2=1$ 是方程的隐式解.

8.1.4　通解和特解

通解　方程 (8-15) 含有 n 个独立任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解, 则 $y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 称为方程 (8-15) 的通解.

特解　方程满足特定条件的解.

定解问题　求方程满足定解条件的求解问题. 定解条件分为初始条件和边界条件, 相应的定解问题分为初值问题和边值问题.

一般地, 初值问题为

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0, \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{8-18}$$

特解可以通过初始条件限制, 从通解中确定任意常数而得到.

8.1.5　积分曲线

积分曲线　微分方程的解的图形是一条曲线, 这条曲线叫做微分方程的积分曲线.

本模块只研究常微分方程.

习　题　8.1

1. 什么是微分方程的阶? 区分线性微分方程与非线性微分方程的标准是什么?

2. 微分方程的解与代数方程的解有何异同?

3. 何谓微分方程的解、通解、特解以及初值问题的解? 彼此有何关系?

4. 设曲线 $y=f(x)$ 在其上任一点 (x, y) 的切线斜率为 $3x^2$, 且曲线过点 $(0,-1)$, 求曲线的方程.

5. 质量为 m 的物体在离地面高为 s_0 米处, 以初速 v_0 垂直上抛, 设此物体的运动只受重力的影响, 试确定该物体运动的路程 s 与时间 t 的函数关系.

6. 验证: 函数 $x=C_1\cos at+C_2\sin at$ 是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a^2x=0$$

的通解.

7. 验证: 由方程 $x^2-xy+y^2=C$ 所确定的隐函数是微分方程

$$(x-2y)y'=2x-y$$

的解, 并求出满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

8.2　一阶微分方程

8.2.1　变量分离方程

1. 变量分离方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \quad 或者 \quad M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x+M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y=0 \tag{8-19}$$

的方程, 称为**变量分离方程**, 其中函数 $f(x)$ 和 $g(y)$ 分别是 x, y 的连续函数.

2. *求解方法*

如果 $g(y) \neq 0$, 方程 (8-19) 可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x.$$

这样变量就分离开了, 两边积分, 得到

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C. \tag{8-20}$$

把 $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}, \int f(x)\mathrm{d}x$ 分别理解为 $\frac{1}{g(y)}, f(x)$ 的某一个原函数.

容易验证, 由 (8-20) 所确定的隐函数 $y = \varphi(x, C)$ 满足方程 (8-19). 因而 (8-20) 是 (8-19) 的通解.

如果存在 y_0 使 $g(y_0) = 0$, 可知 $y = y_0$ 也是 (8-19) 的解. 可能它不包含在方程的通解 (8-20) 中, 必须予以补上.

3. *例题*

例 1　求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$.

解　将变量分离, 得到

$$y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x,$$

两边积分, 即得

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2},$$

因而, 通解为

$$x^2 + y^2 = C,$$

这里的 C 是任意的正常数.

或解出显式形式

$$y = \pm\sqrt{C - x^2}.$$

例 2　解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 \cos x,$$

并求满足初始条件: 当 $x = 0$ 时,$y = 1$ 的特解.

解　将变量分离, 得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \cos x\mathrm{d}x,$$

两边积分, 即得

$$-\frac{1}{y} = \sin x + C,$$