



“双一流”大学学科建设学术文库
数学与应用数学学术文库·概率论

Wiener sausage的 大偏差和重对数律

王艳清 著



Large Deviations and Laws
of the Iterated Logarithm
for Wiener Sausage



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>



“双一流”大学学科建设学术文库
数学与应用数学学术文库·概率论

Wiener sausage的 大偏差和重对数律

Large Deviations and Laws of the Iterated Logarithm
for Wiener Sausage

王艳清 著



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

图书在版编目(CIP)数据

Wiener sausage 的大偏差和重对数律/王艳清著. —武汉: 华中科技大学出版社, 2016. 11
ISBN 978-7-5680-2184-5

I. ①W… II. ①王… III. ①大偏差 ②重对数律 IV. ①O211.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 213978 号

Wiener sausage 的大偏差和重对数律

王艳清 著

Wiener sausage de Dapiancha he Chongduishulü

策划编辑: 王汉江

责任编辑: 王汉江

封面设计: 原色设计

责任校对: 曾 婷

责任监印: 周治超

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

电话: (027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园

邮编: 430223

录 排: 武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷: 武汉鑫昶文化有限公司

开 本: 710mm×1000mm 1/16

印 张: 9 插页: 2

字 数: 180 千字

版 次: 2016 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 36.00 元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

经典的布朗运动在描述物体运动时常把质点看成是没有体积的纯几何点运动,然而现实中的物体总是有体积的,此时布朗运动理论难免出现偏差. 一个典型的例子是,第二次世界大战期间著名概率论专家 Doob 发现三维空间的布朗运动是以概率 1 不常返的,并由此认为飞机碰撞是小概率事件. 然而,虽然飞机都被规定在不同高度上飞行,碰撞事件还是时有发生,其原因是与忽略飞机具有体积这一事实相关,这就迫切需要一种新的模型来对布朗运动加以补充. Wiener sausage 就是一种有用的补充模型,这是一个随机集合值的泛函,以布朗运动轨道为中心、某一长度为半径的空间邻域. 最重要的是, Wiener sausage 考虑到了物体的体积,从而弥补了布朗运动的不足. 由于它具有极强的现实性,其相关理论一直以来都是学界关注的重点. 近年来,随着计算机技术的不断发展, Wiener sausage 的相关理论也被广泛应用于网络控制、智能材料、传感器设计等诸多领域.

样本轨道的相交性质是学界关心的重要问题,它与量子场理论中的重正则群方法、随机游动的自回避以及随机聚合物等有着紧密联系. 特别地,相交轨道的大偏差理论在分析一些物理问题时起着关键作用. 该领域的研究可以追溯至 Dvoretzky, Erdős(文献[34]和[35]) 和 Kakutani 对布朗运动相交行为的研究工作. 随后涌现大批学者投入研究,建立了很多奠基性的工作. 例如 Varadhan 在文献[81]中提出了重正则思想, German, Horowitz, Rosen(文献[40]), Dynkin(文献[37]), Yor(文献[82]), Calais, Yor(文献[84]) 定义了样本轨道的相交局部时, Le Gall(文献[53],[54],[55]), Rosen, Le Gall(文献[61]) 研究了相交轨道的弱收敛性质,等等. 特别值得一提的是 Donsker 和 Varadhan 的四篇经典文献[28]、[29]、[30]、[33]对相交局部时及其相关领域的大偏差研究起到了极其深远的影响.

本书主要研究了 Wiener sausage 相交轨道的体积以及相交时间的一些大偏差性质,并利用这些性质完整地得到了各种维数下单个 Wiener sausage 体积的重

对数律. 通过本书的编写,一方面我们希望完善 Wiener sausage 的相关理论,另一方面也为对该领域有研究兴趣的读者提供一些有益参考.

本书的主要内容分为三章. 第 1 章,首先介绍了 Wiener sausage 的物理背景及其研究进展,同时我们回顾了大偏差的一般理论以及本书证明中将要用到的重要理论;第 2 章,研究了 p 个独立 Wiener sausage 相交体积和相交时间的中偏差,作为中偏差的一个应用,我们得到了相应的重对数律;第 3 章,讨论了单个 Wiener sausage 体积的重对数律,得到了比较完整的结果.

由于作者水平有限,书中难免会存在不足之处,敬请读者批评指正.

本书得到国家自然科学基金(No. 11401590)和中央高校基本科研业务费(No. 2722013JC081)以及中南财经政法大学统计与数学学院一流学科建设经费的资助,特此表示感谢. 我还要感谢武汉大学数学与统计学院高付清教授和中南财经政法大学统计与数学学院许多同仁的鼓励、支持和帮助,感谢我的爱人和女儿,他们为我的工作提供了无条件的支持,才使本书得以完成.

王艳清

于中南财经政法大学

目 录

第 1 章 概述	(1)
1.1 研究背景	(2)
1.2 预备知识	(5)
1.2.1 大偏差理论	(5)
1.2.2 非负随机变量的大偏差	(8)
第 2 章 Wiener sausage 相交体积和相交时间的中偏差和重对数律	(10)
2.1 下临界维数 Wiener sausage 相交轨道的大偏差和重对数律	(11)
2.1.1 相交体积的中偏差	(11)
2.1.2 相交时间的中偏差	(34)
2.1.3 相交体积和相交时间的重对数律	(46)
2.2 临界维数 Wiener sausage 相交轨道的中偏差和重对数律	(52)
2.2.1 相交时间的偏差 inequality	(52)
2.2.2 相交时间的重对数律	(67)
2.2.3 相交体积的偏差 inequality 和重对数律	(71)
第 3 章 单个 Wiener sausage 体积的重对数律	(78)
3.1 一维 Wiener sausage 长度的重对数律	(78)
3.1.1 尾估计	(79)
3.1.2 小球估计	(81)
3.1.3 重对数律	(82)
3.2 平面 Wiener sausage 面积的重对数律	(84)
3.2.1 $ W_r(t) - E W_r(t) $ 的尾估计	(85)
3.2.2 $E W_r(t) - W_r(t) $ 的尾估计	(89)
3.2.3 重对数律	(108)
3.3 三维 Wiener sausage 体积的重对数律	(117)

3.3.1	中偏差	(117)
3.3.2	重对数律	(125)
3.4	高维 Wiener sausage 体积的重对数律	(125)
3.4.1	强逼近	(125)
3.4.2	重对数律	(132)
参考文献		(133)

第 1 章 概 述

首先我们给出 Wiener sausage 的定义: 设 $\{\beta(s)\}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中的布朗 (Brown) 运动, K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的紧集, 由 $\{\beta(s)\}$ 产生的观察到时刻 t 的与紧集 K 相关的 Wiener sausage 定义为

$$W_K(t) = \bigcup_{0 \leq s \leq t} (\beta(s) + K) \\ = \{y \in \mathbf{R}^d; \text{存在某个 } s \in [0, t] \text{ 及 } a \in K \text{ 使得 } y = \beta(s) + a\}.$$

我们记 $\mathbf{R}^d$ 中的集合 A 的 Lebesgue 测度为 $|A|$, $|W_K(t)|$ 为 Wiener sausage 的体积.

设 $p (p \geq 2)$ 是一个整数, $\{\beta_j(s), 1 \leq j \leq p\}$ 是 p 个独立的 Brown 运动且与 $\beta(s)$ 同分布. 记

$$W_K^j(t) = \bigcup_{0 \leq s \leq t} (\beta_j(s) + K).$$

p 个独立 Wiener sausage 到时刻 t 的相交体积定义为

$$V_K^{(p)}(t) = |W_K^1(t) \cap W_K^2(t) \cap \cdots \cap W_K^p(t)|.$$

p 个独立 Wiener sausage 到时刻 t 的相交时间定义为

$$I_K^{(p)}(t) = \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{[0, t]^p} ds_1 \cdots ds_p \prod_{j=1}^p I_K(x - \beta^j(s_j)) \right) dx,$$

这里 $I_K(\cdot)$ 表示通常的示性函数, 即

$$I_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin K. \end{cases}$$

一般地, 对于 $\Delta \subset \mathbf{R}$, 记 $W_K(\Delta) = \bigcup_{s \in \Delta} (\beta(s) + K)$, 且

$$V_K^{(p)}(\Delta) = |W_K^1(\Delta) \cap W_K^2(\Delta) \cap \cdots \cap W_K^p(\Delta)|.$$

特别地, 若取 K 为 $\mathbf{R}^d$ 中的闭球 $B(0, r)$, 我们简记

$$\begin{aligned}
 W_r(t) &= W_K(t), \\
 V_r^{(p)}(t) &= V_K^{(p)}(t), \\
 I_r^{(p)}(t) &= I_K^{(p)}(t), \\
 W_r(\Delta) &= W_K(\Delta), \\
 V_r^{(p)}(\Delta) &= V_K^{(p)}(\Delta).
 \end{aligned}$$

令 $V_r^{(p)} = \lim_{t \rightarrow \infty} V_r^{(p)}(t)$.

Berg 在文献[7] 中研究 Wiener sausage 的相交体积时发现

$$P(V_K^{(p)} < \infty) = \begin{cases} 0, & 1 \leq d \leq 2p/(p-1), \\ 1, & d > 2p/(p-1). \end{cases} \quad (1.1)$$

由此, 我们可以看出 Wiener sausage 相交部分的性质与维数有很大的依赖性.

一般地, 称 $p(d-2) < d$, $p(d-2) = d$ 和 $p(d-2) > d$ 分别为下临界维数、临界维数和上临界维数.

1.1 研究背景

Wiener sausage 是一个具有较强物理背景的量, 最初的研究动机来自于物理中的热传导. 设欧氏空间 $\mathbf{R}^d$ 中的集合 K 为紧集且非极集, 边界为 ∂K . 考虑下面的带边界问题的热方程:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}, & x \in \mathbf{R}^d \setminus K, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbf{R}^d \setminus K, \\ u(x, t) = 1, & x \in \partial K, t > 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

这里 $u(x, t)$ 可以解释为在时刻 t 传递到内部某点 $x \in \mathbf{R}^d \setminus K$ 的热量所表现的温度, 其中边界 ∂K 保持在任意时刻温度为 1, $\mathbf{R}^d \setminus K$ 内部任意点在起始时刻温度均为 0. 定义到时刻 t 从 K 传递到 $\mathbf{R}^d \setminus K$ 内部的总热量为

$$E_K(t) = \int_{\mathbf{R}^d \setminus K} u(x, t) dx.$$

设 $\{\beta(s)\}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中的 Brown 运动且具有生成算子 Δ , 它首中 K 的时刻记为

$$T_K = \inf\{s \geq 0; \beta(s) \in K\}.$$

我们知道满足方程(1.2) 的解可表示为

$$u(x, t) = P_x(T_K \leq t),$$

这里 P_x 表示从 x 出发的 Brown 运动诱导的概率测度.

由 Wiener sausage 的定义, 我们可以得到

$$E|W_K(t)| = E_K(t) + |K|.$$

自 20 世纪 60 年代以来众多学者投入到该领域的研究中. Spitzer 在 1964 年的文献[76]中首次研究了 Wiener sausage 体积的渐近行为, 得到了在二维和三维情况下当 t 趋于无穷时 $E|W_K(t)|$ 的估计. 同时 Spitzer 在该文献中指出 Wiener sausage 的离散对应是随机游动程. Gettoor 在 1965 年的文献[41]中完整地得到了在各种维数下 $E|W_K(t)|$ 的渐近估计, 即

$$E|W_K(t)| \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{8t}{\pi}}, & d=1, \\ \frac{2\pi t}{\ln t}, & d=2, \\ c(K)t, & d \geq 3, \end{cases}$$

其中 $c(K)$ 表示集合 K 的牛顿容度.

Kestern, Spitzer, Whitman(见文献[42])在研究 Wiener sausage 体积的大数定律时, 得到了如下结果:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} |W_K(t)| = 2\pi, \quad d=2, \quad (1.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} |W_K(t)| = C(K), \quad d \geq 3. \quad (1.4)$$

进一步地, Le Gall 在 1988 年的文献[57]中研究了相应的中心极限定理. 研究发现在二维空间收敛极限是平面 Brown 运动的重正则自相交局部时, 高维空间极限分布是高斯分布.

关于单个 Wiener sausage 的大偏差问题, 1975 年 Donsker 和 Varadhan 在文献[27]中首次考虑了 Wiener sausage $W_r(t)$ 的 Laplace 变换 $E(\exp\{-\lambda|W_r(t)|\})$ 的渐近行为, 主要方法是 Feynman-Kac 公式.

Bolthausen 在文献[13]中证明了若 Wiener sausage 的半径 r 是 t 的函数且以某种速度趋于 0, 那么它的 Laplace 变换具有与 $E(\exp\{-\lambda|W_r(t)|\})$ 类似的渐近行为.

最近 Berg, Bolthausen 和 Höllander 在文献[10]中研究了当维数 $d \geq 2$ 时, $P(|W_r(ct)| \leq f(t))$ 的渐近行为, 并给出了具体的速率函数, 其中

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\ln t}, & d=2, \\ t, & d=3. \end{cases} \quad (1.5)$$

上述文献均考虑的是单个 Wiener sausage 的方向向下的大偏差,文献[12] 和 [8]则考虑了概率 $P(|W_r(t)| \geq \lambda t)$ 的一些控制.

作者证明了对任意的 $\lambda \geq 0$,

$$s(\lambda) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln E \exp\{\lambda |W_r(t)|\}$$

是存在的,并且得到了当 $\lambda \rightarrow 0$ 或者 $\lambda \rightarrow \infty$ 时 $s(\lambda)$ 的一些估计. Hamana 和 Kesten 在文献[68]中考虑了带漂移 Brown 运动生成 Wiener sausage 的方向向上的大偏差,但是没有得到速率函数的具体表达式.

回顾 Wiener sausage 的研究历程,大数定律、中心极限定理、大偏差等方面都取得了较为丰富的成果,但 Wiener sausage 的中偏差和重对数律的结果相对较少. Csáki 和 Hu 在文献[23]中研究了三维 Wiener sausage 的强逼近. 对于其他维数下的结果,我们还不够了解. 本书的研究动机正是来源于此,我们系统地研究了 $W_r(t)$ 在各种维数下的中偏差和重对数律,并得到了比较完整的结果. 证明中很重要的一个方法来自于 Le Gall 早期的研究工作(见文献[57]),他最先提出了用分解的思想处理 Wiener sausage,即对任意的整数 N ,

$$\begin{aligned} |W_r(t)| &= \sum_{k=1}^{2^N} |W_r([(k-1)t2^{-N}, kt2^{-N}])| \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{2^{j-1}} |W_r([(2k-2)t2^{-j}, (2k-1)t2^{-j}])| \\ &\quad \cap W_r([(2k-1)t2^{-j}, (2k)t2^{-j}])|. \end{aligned} \quad (1.6)$$

由于 Brown 运动是平稳独立增量过程,分解后的第一项可以看作是一个独立同分布的随机变量和,第二项可以看作是两个独立 Wiener sausage 相交体积的和. 这个分解将单个 Wiener sausage 与两个 Wiener sausage 相交体积的性质紧密联系起来.

为了研究单个 Wiener sausage 的性质,我们首先研究了相交 Wiener sausage 的中偏差和重对数律.

另外一个研究动机来自于 2004 年 Berg, Bolthausen 和 Höllander 的文献[10],作者研究了当 $d \geq 2$ 时 $P(|V_r^{(2)}(ct)| \geq f(t))$ 的渐近性质,其中 $f(t)$ 满足式(1.5). 他们证明了当 $d=2$ 且 $r>0$ 恒定时,对任意的 $c>0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln t} \ln P(|W_r^1(ct) \cap W_r^2(ct)| \geq \frac{t}{\ln t}) := I_2^{2\pi}(c) < 0; \quad (1.7)$$

当 $d \geq 3$ 时,对任意的 $c>0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{(d-2)/d}} \ln P(|W_r^1(ct) \cap W_r^2(ct)| \geq t) := I_d^r(c) < 0. \quad (1.8)$$

一个很自然的问题就是考虑 Wiener sausage 相交部分偏离比均值低阶的方向向上的大偏差,即

$$P(V_r^{(p)}(t) \geq o(E|W_r(t)|)),$$

也就是 Wiener sausage 相交的中偏差问题.

由于随机游动可以看成是 Brown 运动的离散情形, Wiener sausage 也存在着离散对应. 设 $\{S(k)\}$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 值的对称随机游动, $\#$ 表示计数测度, 我们称

$$R_n = \# \{x \in \mathbb{Z}^d; \exists 0 \leq k \leq n, S(k) = x\} \quad (1.9)$$

为随机游动在前 n 步的游程.

设 $p \geq 2$ 是一个整数, $\{S_j(k), 1 \leq j \leq p\}$ 是 p 个独立的随机游动且与 $S(k)$ 同分布. p 个独立随机游动到时刻 n 的相交游程定义为

$$J_n^{(p)} = \# \{x \in \mathbb{Z}^d; \exists 0 \leq k_1, \dots, k_p \leq n, S_1(k_1) = \dots = S_p(k_p) = x\}. \quad (1.10)$$

式(1.9)和式(1.10)中, R_n 和 $J_n^{(p)}$ 常被看作 $|W_K(t)|$ 和 $V_K^{(p)}(t)$ 的离散对应.

我们在证明过程中借鉴了文献[2]、[5]、[16]、[19]、[45]、[70]和[72]中的方法, 这些文献对随机游动程的中偏差和重对数律做了系统的研究. 但是由于两者各有特点, 例如, 由于有限时间的随机游动程必定是有上界的, 这使得在做某些控制的时候较为方便, 然而 Wiener sausage 却不具有该性质. 因此, 我们在证明中需要克服一些技术上的困难.

1.2 预备知识

1.2.1 大偏差理论

为了阅读的完整性, 我们首先简要介绍一下大偏差的基本理论以及后面证明经常需要的有用结论.

设 E 是一个非空正则的 T_2 拓扑空间. 记 $\mathcal{B}(E)$ 为由 E 上的所有开集生成的 Borel σ -代数. 由于我们没有假设 E 为 Polish 空间, $\mathcal{B}(E)$ 往往大得难以在其上定义测度. 为此我们假定 $\mathcal{E}$ 是 E 上的一个固定的 σ -代数, 其包含任意 $x \in E$ 的一个开邻域基和一个闭邻域基. 大偏差原理就是通过速率函数来刻画 $(E, \mathcal{E})$ 上的一族概率测度 $(\mu_\epsilon)_{\epsilon > 0}$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $\mu_\epsilon(A)$ 趋于 0 的速度.

定义 1.2.1 设 $I: E \rightarrow [0, \infty]$ 为速率函数, 若它是下半连续的 (即 $\forall L \geq 0$, $\{x \in E; I(x) \leq L\}$ 是闭集), 称 $I: E \rightarrow [0, \infty]$ 下紧或者好速率函数, 若 $\forall L \geq 0$, 则 $\{x \in E; I(x) \leq L\}$ 是紧集.

以下我们假设 I 为下半连续的速率函数.

定义 1.2.2 设 $\{\mu_\epsilon, \epsilon > 0\}$ 是 $(E, \mathcal{E})$ 上的一族概率测度.

(1) 称 $\{\mu_\epsilon, I(x), \lambda(\epsilon) > 0\}$ 满足大偏差下界 (LLD), 若对任何开集 $G \subset E$, 有

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda(\epsilon) \ln \mu_\epsilon(G) \geq -\inf_{x \in G} I(x).$$

(2) 称 $\{\mu_\epsilon, I(x), \lambda(\epsilon) > 0\}$ 满足大偏差上界 (ULD), 若对任何闭集 $F \subset E$, 有

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda(\epsilon) \ln \mu_\epsilon(F) \leq -\inf_{x \in F} I(x).$$

(3) 称 $\{\mu_\epsilon, I(x), \lambda(\epsilon) > 0\}$ 满足大偏差 (LDP), 若它既满足 LLD, 又满足 ULD, 且速率函数为 I .

下面我们来陈述一些论文中用到的大偏差理论中的定理与结论:



有限维 Gärtner-Ellis 定理

在 Donsker 和 Varadhan 的奠基性工作 (见文献 [28]、[29]、[30]、[33]) 下, 大偏差领域已逐步发展成为一个相对完善的体系. 在处理大偏差问题上有一些标准的方法, 最常用的是 Gärtner-Ellis 定理. 由于本书主要研究的是取值于实值空间的随机变量, 我们就主要介绍有限维的情形.

定义 1.2.3 设 $\{\mu_\epsilon, \lambda(\epsilon) > 0\}$ 是 $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ 上的一族概率测度.

(1) 称 $\Lambda(\cdot): \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ 为 $\{\mu_\epsilon, \lambda(\epsilon) > 0\}$ 的对数矩生成函数, 若

$$\Lambda(y) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda(\epsilon) \ln \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left\{ \frac{\langle x, y \rangle}{\lambda(\epsilon)} \right\} \mu_\epsilon(dx), \quad y \in \mathbf{R}^d.$$

(2) 称 $\Lambda^*(\cdot): \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ 为 $\Lambda(\cdot)$ 的 Fenchel-Legendre 变换, 若

$$\Lambda^*(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^d} \{ \langle x, y \rangle - \Lambda(y) \}, \quad x \in \mathbf{R}^d.$$

定义 1.2.4 称一个凸函数 $\Lambda: \mathbf{R} \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 是本性光滑的, 若

(1) $D_\Lambda^\circ = (a, b)$ 非空, 其中 D_Λ 为 $\Lambda(\cdot)$ 的定义域, D_Λ° 为 D_Λ 的内部;

(2) $\Lambda(\theta)$ 在 D_Λ° 内可微;

(3) $\Lambda(\cdot)$ 是陡的, 即

$$\lim_{\theta \rightarrow a^+} \Lambda'(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow b^-} \Lambda'(\theta) = \infty.$$

为了介绍 Gärtner-Ellis 定理, 我们引入如下的假设条件:

(H1) 对任意的 $y \in \mathbf{R}^d$, 存在 $\delta = \delta(y) > 0$, 使得 $-\infty < \Lambda(\delta y) < +\infty$;

(H2) 对任意的 $y \in \mathbf{R}^d$,

$$\Lambda(y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\lambda} \lambda(\epsilon) \ln \int_{\mathbf{R}} \exp \left\{ \frac{\langle x, y \rangle}{\lambda(\epsilon)} \right\} \mu_{\epsilon}(dx)$$

存在且不取 $-\infty$;

(H3) $\Lambda(\theta)$ 是本性光滑的.

下面我们来陈述有限维情形下的 Gärtner-Ellis 定理:

定理 1.2.1 (有限维 Gärtner-Ellis, 见文献[26]) 若 (H1), (H2), (H3) 成立, 则 $(\mu_{\epsilon}, \Lambda^*, \lambda(\epsilon))$ 满足 LDP.



Varadhan 积分引理

作为 Gärtner-Ellis 引理的逆定理, Varadhan 积分引理也是很有用的. 设 $\{\mu_{\epsilon}, \lambda(\epsilon) > 0\}$ 是 $(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ 上的一族概率测度.

定理 1.2.2 (Varadhan 积分引理, 见文献[26]) 设 $\Lambda^*(\cdot)$ 是一个好速率函数, 且 $f(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的一个实值连续函数.

(1) 若 $(\mu_{\epsilon}, \Lambda^*, \lambda(\epsilon))$ 满足 ULD, 则

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{\lambda} \lambda(\epsilon) \ln \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left\{ \frac{f(x)}{\lambda(\epsilon)} \right\} \mu_{\epsilon}(dx) \geq \sup_{\lambda \in \mathbf{R}^d} \{f(\lambda) - \Lambda^*(\lambda)\}.$$

(2) 若 $(\mu_{\epsilon}, \Lambda^*, \lambda(\epsilon))$ 满足 LLD, 且存在某 $\delta > 0$, 使得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\lambda} \lambda(\epsilon) \ln \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left\{ \frac{(1+\delta)f(x)}{\lambda(\epsilon)} \right\} \mu_{\epsilon}(dx) < \infty,$$

则

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\lambda} \lambda(\epsilon) \ln \int_{\mathbf{R}^d} \exp \left\{ \frac{f(x)}{\lambda(\epsilon)} \right\} \mu_{\epsilon}(dx) \leq \sup_{\lambda \in \mathbf{R}^d} \{f(\lambda) - \Lambda^*(\lambda)\}.$$



收缩原理

收缩原理是大偏差理论中非常重要的组成部分, 它说明了连续映射保持测度

的大偏差原理不变.

定理 1.2.3(收缩原理, 见文献[26]) 设 $E, \hat{E}$ 为正则拓扑空间, $f: E \rightarrow \hat{E}$ 连续, $\{\mu_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ 为 E 上的一族概率测度 ($\mu_\epsilon(E)=1$), $I: E \rightarrow [0, \infty]$ 是速率函数, 令 $\nu_\epsilon = \mu_\epsilon \circ f^{-1}$, 且 $I_f(y) = \inf_{f(x)=y} I(x)$, 若 $(\mu_\epsilon, I, \epsilon \rightarrow 0)$ 满足 LDP 且 I 下紧, 则 $(\nu_\epsilon, I_f, \epsilon \rightarrow 0)$ 满足 LDP 且 I_f 下紧.

1.2.2 非负随机变量的大偏差

本书我们主要关心的是 Wiener sausage 相交体积以及相交时间, 这些都是非负的随机变量. 非负随机变量的大偏差行为与它的尾概率密切相关, 下述定理描述了这一点.

定理 1.2.4(见文献[14]中定理 1.2.1) 设 $\{X_\epsilon, \lambda(\epsilon)>0\}$ 为一族非负随机变量, 且 $I(x)$ 严格增并在 D_1^0 连续, 则下述两个结论是等价的:

- (1) $(X_\epsilon, I(x), \lambda(\epsilon)>0)$ 满足 LDP;
- (2) 对任意的 $x>0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda(\epsilon) \ln P(X_\epsilon \geq x) = -I(x).$$

为了得到非负随机变量的尾估计的大偏差, 主要应用了下述推广的 Gärtner-Ellis 型定理, 具体证明详见文献[14].

定理 1.2.5(见文献[14]中定理 1.2.6) 设 $\{X_\epsilon, \lambda(\epsilon)>0\}$ 为一族非负随机变量, 且对任意的 $\theta>0$,

$$\Psi(\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda(\epsilon) \ln \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} \lambda(\epsilon)^{-m} (EX_\epsilon^m)^{1/p}$$

存在且不为 $-\infty$, $\Psi(|\theta|)$ 本性光滑的, 则对任意的 $x>0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda(\epsilon) \ln P(X_\epsilon \geq x) = -I_\Psi(x),$$

这里 $I_\Psi(x) = p \sup_{\theta>0} \{\theta x^{1/p} - \Psi(\theta)\}, x>0$.

同样地, 上述定理也有其对应的 Varadhan 型积分定理.

定理 1.2.6(见文献[14]中定理 1.2.8) 设 $\{X_\epsilon, \lambda(\epsilon)>0\}$ 为一族非负随机变量, $I(x)$ 为 $\mathbf{R}^+$ 上的非降函数, 且 $I(0)=0$.

(1) 若

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \lambda(\epsilon) \ln P(X_\epsilon \geq x) \geq -I(x), \quad x > 0,$$

则对任意的 $\theta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \lambda(\epsilon) \ln \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} \lambda(\epsilon)^{-m} (EX_\epsilon^m)^{1/p} \geq \sup_{x>0} \{ \theta x^{1/p} - p^{-1} I(x) \}.$$

(2) 若

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup \lambda(\epsilon) \ln P(X_\epsilon \geq x) \leq -I(x), \quad x > 0,$$

且 θ 满足

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda(\epsilon) \ln \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} \lambda(\epsilon)^{-m} (E(X_\epsilon^m I_{\{X_\epsilon > M\}}))^{1/p} = 0,$$

则

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup \lambda(\epsilon) \ln \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{m!} \lambda(\epsilon)^{-m} (EX_\epsilon^m)^{1/p} \leq \sup_{x>0} \{ \theta x^{1/p} - p^{-1} I(x) \}.$$

第 2 章 Wiener sausage 相交体积和相交时间的中偏差和重对数律

相交 Wiener sausage 大偏差理论的一个重要进展是 Berg、Bolthausen 和 Höllander 2004 年发表于《Ann. Math.》的文章(见文献[11])。他们得到了当 $d=2$, 且 $r>0$ 恒定时, 对任意的 $c>0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln t} \ln P\left(|W_r^1(ct) \cap W_r^2(ct)| \geq \frac{t}{\ln t}\right) := I_2^{\sigma}(c) < 0; \tag{2.1}$$

当 $d \geq 3$ 时, 对任意的 $c>0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{(d-2)/d}} \ln P(|W_r^1(ct) \cap W_r^2(ct)| \geq t) := I_d^{\sigma}(c) < 0. \tag{2.2}$$

本章我们研究 Wiener sausage 相交体积和相交时间偏离比均值低阶的方向向上的大偏差, 即中偏差问题:

$$\begin{aligned} P(V_r^{(p)}(t) \geq o(E|W_r(t)|)), \\ P(I_r^{(p)}(t) \geq o(E|I_r^{(1)}(t)|)). \end{aligned}$$

Wiener sausage 的相交时间与 Brown 运动的相交局部时有着密切的关系. 由 Dvoretzky、Erdős、Kakutani、Taylor 的经典结果(见文献[80]), 我们知道

$$S = \bigcap_{i=1}^p \{x \in \mathbf{R}^d : x = \beta_i(t) \text{ 对某个 } t \in (0, \infty)\},$$

非空当且仅当 $p(d-\alpha) < d$.

由此看出, Brown 运动的相交局部时仅在下临界维数情形存在. Le Gall 在文献[60]中证明了下述结论:

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{c_r(d)^p t^{\frac{2p-d(p-1)}{2}}} I_r^{(p)}(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{c_r(d)^p t^{\frac{2p-d(p-1)}{2}}} \int_{\mathbf{R}^d} \left(\int_{[0,t]^p} ds_1 \cdots ds_p \prod_{j=1}^p I_{[0,r]}(|\beta^j(s_j) - x|) \right) dx \end{aligned}$$