高等数学(上)

Advanced Mathematics

夏大峰 吴 斌 朱 建 李小玲 李栋梁 编著

3

科学出版社

高等数学（上）

夏大峰　吴　斌　朱　建　李小玲　李栋梁　编著

高等学校博士学科点专项科研基金（20113228110003）
南京信息工程大学教材建设基金
共同资助

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本教材适用于各理工学科中非数学专业的高等数学课程. 由于高等数学基本理论、基本方法和基本技能, 特别是微积分的基本理论和方法在各理工类等学科中具有广泛的应用, 所以本教材进一步完善了微积分方面的基本理论和方法. 同时, 因傅里叶级数在理工类学科中具有广泛的应用背景, 所以本教材把傅里叶级数单独作为一章, 其目的是强调傅里叶级数的重要性.本教材的特点是每一章节都列举了大量的例子, 题型多样化, 除了有利于学生掌握知识外, 还有利于学生思维能力的培养; 每一节附有习题, 每一章附有总复习题.

本教材共十二章, 分上、下两册. 上册内容: 函数的极限与连续, 导数与微分, 微分中值定理与导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用, 向量代数与空间解析几何; 下册内容: 多元函数微分法及其应用, 重积分及其应用, 曲线积分与曲面积分, 无穷级数, 傅里叶级数, 微分方程.

带“*”部分的教学内容可以略讲或不讲, 不影响高等数学教学内容的整体性, 也不影响考研数学一、数学二的内容.

本教材不仅可作为理工类各学科非数学专业的教材, 也可作为其他学科有关专业的高等数学课程教材, 还可以作为全国考研数学一、数学二高等数学的教材和参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/夏大峰等编著. —北京: 科学出版社, 2016
ISBN 978-7-03-049052-0

I. ①高… II. ①夏… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 142748 号

责任编辑: 胡 凯 许 蕾/责任校对: 李 影
责任印制: 张 倩/封面设计: 许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

安泰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016年6月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2016年6月第一次印刷 印张: 22
字数: 513 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

高等数学是理工类各学科非数学专业和相关学科专业的基础课程，除了要求学生掌握高等数学的有关知识外，还强调培养学生的抽象思维能力、逻辑思维能力和定量思维能力，以及应用数学的理论和方法解决实际问题的能力.

本教材由 2011 年度高等学校博士学科点专项科研基金 (20113228110003) 和南京信息工程大学教材建设基金共同资助，按照理工类各学科非数学专业的高等数学教学内容要求，参照全国考研数学一、数学二的考研大纲，以及我校气象类学科和其他理工类各学科非数学专业人才培养的要求，借鉴国内外其他高校高等数学教学改革的成功经验编写而成. 本教材既能继承传统教材的优点又力求突出以下几个方面：

(1) 注意将数学素质的培养有机地融合于基础知识的讲解之中，突出微积分的基本思想和基本方法. 以高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的理解和掌握为宗旨，注重基本概念、基本理论的理解，强调数学思维能力的渗透，强化理论知识的应用，力求使学生会用所学知识解决相应的实际问题，最大限度地为理工类各学科非数学专业后续课程夯实数学基础.

(2) 在确保高等数学科学性的前提下，充分考虑到高等教育大众化的新形势和全国考研数学一、数学二的内容，构建学生易于接受的高等数学体系，力求使学生在学习过程中能较好地了解各部分内容的内在联系，从整体上掌握高等数学的思想方法，力求揭示数学概念和方法的本质. 例如，对极限等概念，先介绍其描述性概念，再介绍它们的精确定义，便于学生接受并理解其概念；对微分与积分概念，都由实际问题引入，不仅介绍几何意义还介绍物理等方面的意义，使学生对所学知识有实际理解.

(3) 本教材对例题作了精心选择，例题丰富，紧扣教学内容，题型多样化，且许多例题是经济管理等方面的实际问题，既具有代表性又有一定的难度，适应理工类等各专业读者的需求.

(4) 为了便于实现因材施教以及分层教学的要求，对有关内容和习题进行了精心设计和安排. 每节后面的习题以本节教学内容为主进行配置，同时还选择一些考研的数学题. 每章后面还配有总复习题，总复习题融复习、巩固和考研为一体，为学生提供必要的训练.

(5) 带有 “*” 的内容可以不作要求，不影响内容的整体结构. 对于带有 “*” 的基本理论建议在教学过程中简要介绍其应用. 例如归结原理在有些高等数学教材中很少介绍，实际上归结原理在讨论函数的极限不存在性、判别无界性等方面都有广泛的应用.

总体来说，本教材的编写思路是处理好传统高等数学教材优点与教学改革的关系，使之相互融为一体. 本教材保留了高等数学传统教材说理浅显、叙述详细、深浅适度、结构严谨、例题较多、习题适度、便于自学等优点；还将数学专业的数学分析有关基本理论和方法渗入其中，有的理论和方法虽然没有给出证明，但适当强调了其应用，例如归结原理在判别极限不存在、无界以及无界但不是无穷大量等方面的作用等.

高等数学是大气科学中最重要的数学基础，在大气科学各领域中具有广泛的应用. 为此，李栋梁教授针对大气科学中用到的数学知识提出总体构想与框架. 在此基础之上，本教材的编写人员集体讨论了全书的框架和教学内容的安排，并参与各章节内容的编写. 全书主要由夏大峰统稿与定稿. 第一章、第二章、第三章、第十二章由夏大峰编写；第四章、第五章由吴斌编写；第六章、第七章由朱建编写；第八章、第九章、第十章由李小玲编写；第十一章由夏大峰、李小玲共同编写. 在教材编写的前期讨论中，南京信息工程大学大学数学部的老师也参与了教材结构框架的讨论，并提出了许多有益的建议.

本书的编写得到了南京信息工程大学教务处、数学与统计学院有关领导的大力支持和帮助，也得到了许多老师的鼓励，在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请各位专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2016 年 1 月

目　　录

第一章　函数的极限与连续

事物的发展与变化可以归结为变量之间的依赖关系, 高等数学研究的对象则是变动的量, 函数描述的就是变量之间的依存关系. 极限是研究变量的基础, 也是研究变量的基本方法. 本章作为微积分的基础与准备, 需掌握的主要内容有函数及相关概念、数列与函数的极限及相关概念、无穷小量和无穷大量、函数的连续性及有关性质、函数的间断点等, 着重介绍其基本思想与方法, 为后面微积分的学习打好理论基础.

第一节　函　　数

一、 实数集

集合是数学中最基本的概念, 通常把具有某种特定性质的对象汇集成的总体称为集合, 其中的对象称为该集合的元素. 设 A 是由具有某种性质 P 的元素构成的集合, 则 A 可表示为

$$A = \{x : x \text{ 具有性质 } P\} \quad \text{或} \quad A = \{x \,|x \text{ 具有性质 } P\}.$$

若 x 是集合 A 的元素, 则称 x 属于 A, 记为 $x \in A$; 若 x 不是集合 A 的元素, 则称 x 不属于 A, 记为 $x \notin A$.

两个集合 A, B 的并、交、差和余的运算分别定义为

$$\begin{aligned} &A \cup B = \{x \,|x \in A \text{ 或 } x \in B\}\,; \\ &A \cap B = \{x \,|x \in A \text{ 且 } x \in B\}\,; \\ &A - B = \{x \,|x \in A \text{ 但 } x \notin B\}\,; \\ &A^{\mathrm{c}} = \{x \,|x \notin A\}\,. \end{aligned}$$

若集合的元素都是由实数构成的, 则称该集合为数集. 根据实数轴上的点与实数之间的一一对应关系, 数集的元素有时也称为点.

高等数学中谈到的集合基本上都是数集, 常用的数集除了自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}^{+}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外, 还有区间和邻域.

区间是用得较多的一类数集, 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 则数集

$$(a, b) = \{\, x|\, a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为**开区间**; 数集

$$[a, b] = \{\, x|\, a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为**闭区间**; 数集

$$(a, b] = \{\, x|\, a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$

与

$$[a,b)=\{x|\,a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$$

均称为**半开半闭区间**.

上述区间的 a 与 b 称为这些区间的**端点**, 其中 a 称为区间的**左端点**, b 称为区间的**右端点**; $b-a$ 称为区间的**区间长度**.

以上四种区间均为有限区间, 其区间长度 $b-a$ 是有限的数值. 此外还有下列五种无限区间:

$$(a,+\infty)=\{x|\,x>a,x\in\mathbf{R}\};$$
$$[a,+\infty)=\{x|\,x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|\,x<b,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,b]=\{x|\,x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

这些区间的区间长度都为无穷大. 其中记号 "$+\infty$" 读作正无穷大, "$-\infty$" 读作负无穷大.

邻域是数集中最重要的一类子集, 常用来描述 "某点附近" 的情况, 下面引入邻域的概念.

定义 1　设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$, 数集

$$U(a,\delta)=\{x\,||x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(a-\delta,a+\delta)$$

称为点 a 的 δ 邻域, 其中点 a 与数 δ 分别称为这个邻域的中心与半径 (图 1-1-1(a)). 当不强调邻域的半径时, 可用记号 $U(a)$ 表示以点 a 为中心的任意开区间.

数集

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

称为点 a 的去心 δ 邻域 (图 1-1-1(b)). 当不强调去心邻域的半径时, 可用记号 $\mathring{U}(a)$ 表示以点 a 为中心的任意去心邻域.

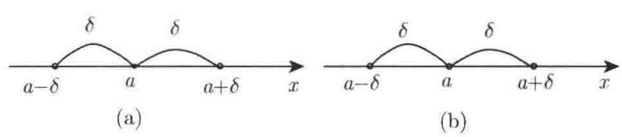


图 1-1-1

二、 函数的基本概念

事物及其变换过程是高等数学研究的对象, 数学则是把事物与变量联系起来, 也就是把事物及其变化过程进行量化. 人们在观察事物的变化过程中, 会遇到很多量, 这些量一般可分为两类: 一类是在该过程中保持不变的量, 称为**常量**; 另一类是在该过程中不断变化着的量, 称为**变量**. 一般地, 常用字母 $a,b,c,\cdots$ 等表示常量, 用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 等表示变量. 在高等数学中, 通常把常量作为变量的特殊情况来处理.

为了简便起见, 先介绍数学上一些常用的数学符号: 符号 "$\forall$" 表示 "任意 (确定) 的" 或者 "每一个"; 符号 "$\exists$" 表示 "存在" 或者 "有". 例如 "$\forall x$" 表示 "任意 (确定) 的 x", 而 "$\exists x$" 表示 "存在 x".

函数研究的是变量之间的对应关系, 在事物的变化过程中, 经常会同时遇到两个或更多个变量之间的互相依赖关系.

例如, 在初速度为 0 的自由落体运动中, 路程 s 与时间 t 是两个变量, 当时间变化时, 所经过的路程也随之改变, 它们之间有如下关系:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (t \geqslant 0). \tag{1-1-1}$$

又如, 在电阻两端加直流电压 V, 电阻中有电流 I 通过, 电压 V 改变时, 电流 I 随之改变, 其变化规律为

$$I = \frac{V}{R},$$

若电阻 $R = 2$, 则

$$I = \frac{V}{2}. \tag{1-1-2}$$

式 (1-1-1)、(1-1-2) 均表达了两个变量之间相互依赖的关系或规律, 依据这些规律, 当其中一个变量在某一范围内取定一个数值时, 另一变量的值就随之确定, 数学上把这种对应关系称为函数关系, 其定义如下.

定义 2 设 x, y 为某一变化过程中的两个变量, 如果 x 在非空数集 D 内任意取定一个值, y 按照某对应法则 f, 总有唯一确定的值与之相对应, 则称 y 是 x 的函数, 并称 x 为自变量, y 为因变量, 记作:

$$y = f(x) \ (x \in D),$$

其中, 数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域.

一般地, 在函数 $y = f(x)$ 中, 使得式子 $f(x)$ 有意义的 x 的集合是该函数的定义域, 这时也称之为**该函数的自然定义域**. 但在实际问题中, 函数 $y = f(x)$ 的定义域还要根据问题中的实际意义来确定.

由定义 2 可知, $f(x)$ 也表示与 x 对应的函数值, 因此对应于 x_0 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值构成的集合称为**函数** $y = f(x)$ 的值域, 记作 $f(D)$, 即

$$f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

由自变量与因变量的有序对组成的集合

$$\{(x, y) \,|y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**图像或图形**.

由于高等数学讨论的对象主要是函数, 函数 $y = f(x)$ 的图像或图形可在平面直角坐标系中画出, 所以也常称之为曲线 $y = f(x)$.

另外, 符号 $f(x)$ 中的 f 表示 y 与 x 之间的对应关系, 所以 f 仅仅是一个函数对应法则的记号, 它也可用其他符号如 g 或 h 等代替, 这时, 函数 $y = f(x)$ 就写成 $y = g(x)$ 或 $y = h(x)$.

例 1　求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\sin x}$;

(2) $y=\sqrt{x^2-x-6}-\arccos\dfrac{2x-1}{7}$.

解　(1) 由题意可得不等式 $\sin x \geqslant 0$, 解得

$$2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi,\quad k\in \mathbf{Z},$$

则该函数的定义域为

$$D=\{x\,|2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, k\in \mathbf{Z}\}.$$

(2) 由

$$\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0, \\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (x-3)(x+2)\geqslant 0, \\ |2x-1|\leqslant 7, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3, \\ -3\leqslant x\leqslant 4, \end{cases}$$

则该函数的定义域为

$$D=\{x\,|-3\leqslant x\leqslant -2 \text{ 或 } 3\leqslant x\leqslant 4\}.$$

例 2　设函数 $f(x)$ 满足

$$3f(x)+4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0,$$

试求函数 $f(x)$ 及定义域.

解　在等式

$$3f(x)+4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0$$

中取 x 为 $-\dfrac{1}{x}$ 得

$$3f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{4}{x^2}f(x)-7x=0,$$

上述两式消去 $f\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ 得

$$f(x)=4x^3+\frac{3}{x}.$$

由此得函数 $f(x)$ 的定义域为

$$D=\{x|x<0 \text{ 或 } x>0\}=\{x|x\neq 0\}.$$

由函数的定义可知, 若两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 则称这两个函数相同. 例如函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$, 它们的对应法则相同, 但定义域不同, 所以它们不是相同的函数. 又如函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$, 它们的对应法则相同, 定义域也相同, 因此它们是相同的函数.

函数的表示方法有多种形式, 常见的主要有: 表格法、图示法、解析法.

表格法: 把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出, 对应法则由表格所确定.

例 3　某气象站 2015 年 3 月从 1 日到 7 日的中午 12 点钟的温度列表如下:

日期	2012.3.1	2012.3.2	2012.3.3	2012.3.4	2012.3.5	2012.3.6	2012.3.7
温度	16℃	17℃	17℃	16.5℃	16℃	17.5℃	18℃

上述表格描述的是某气象站 2015 年 3 月从 1 日到 7 日中午 12 点钟的温度, 对这 7 天中的任何一天中午 12 点钟, 按表的对应法则可唯一确定该天中午 12 点钟的温度, 即温度是对应日期中午 12 点钟的函数.

图示法: 把变量 x 与 y 对应的有序数组 (x,y) 看作直角坐标平面内点的坐标, y 与 x 的函数关系就可用坐标平面上的曲线来表示, 这种表示函数的方法称为图示法 (或图像法).

例 4　函数 $y=|x|+1$ 的图像 (图 1-1-2).

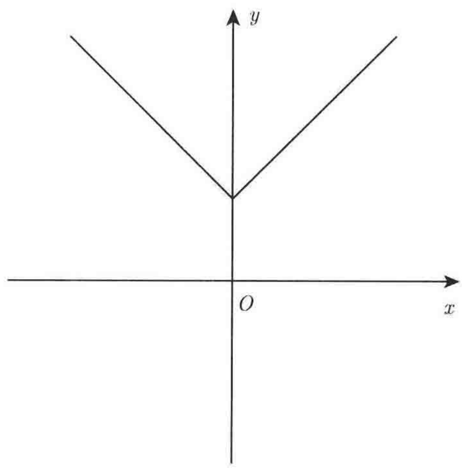


图 1-1-2

解析法 (或公式法): 如果函数的对应法则由一个数学解析式表示, 则称这种表示函数的方法为解析法 (或公式法).

例 5　函数 $f(x)=|x|$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域为 $[0,+\infty)$, 称为绝对值函数.

有些函数在不同的定义范围内对应的函数关系并不相同, 这时就要用几个不同的式子分段来表示该函数, 如例 6.

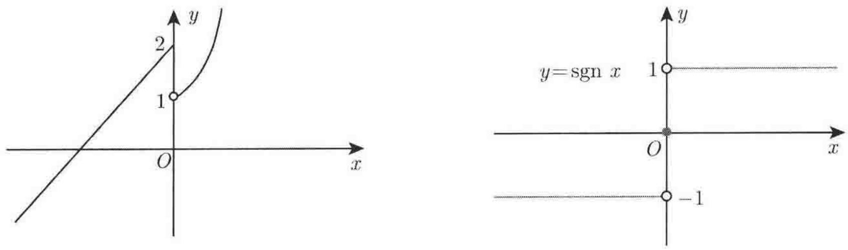
例 6　函数

$$y=\begin{cases} x+2, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x, & x>0 \end{cases}$$

(图 1-1-3(a)) 与符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0 \end{cases}$$

(图 1-1-3(b)).



(a)　　　　(b)

图 1-1-3

像上面两个这样在不同的范围内用不同的式子分段表示的函数称为**分段函数**. 在许多学科领域中经常用到分段函数.

必须指出, 分段函数是用不同的式子表示一个 (而不是几个) 函数. 因此对分段函数求函数值时, 不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求.

例 7　常用记号 $[x]$ 表示 "小于或等于 x 的最大整数", 显然 $[x]$ 是由 x 唯一确定的, 如

$$[-1.001]=-2,\quad [0.87]=0,\quad [1.79]=1,\quad [2.43]=2.$$

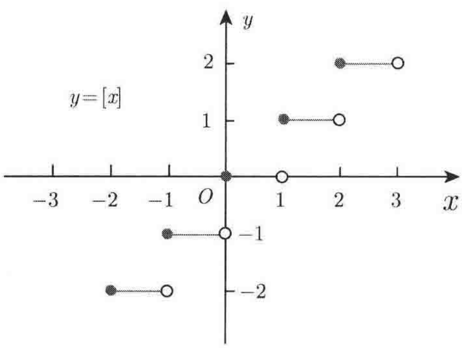


图 1-1-4

称函数 $y=[x]$ 为**取整函数**, 取整函数 $y=[x]$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$, 值域是整数集 $\mathbf{Z}$, 它表示 y 是不超过 x 的最大整数, 该函数为分段函数 (图 1-1-4).

上述用公式所表示的函数, 都是直接用一个或几个关于自变量的式子来表示的, 这样的函数也称为**显函数**. 除此以外, 变量之间的函数关系也常用方程来表达, 例如在直线方程 $x+2y=1$ 中, 给定任意一个实数 x, 都有唯一确定的 y 值 $\left(y=\dfrac{1-x}{2}\right)$ 与之相对应, 因此在方程 $x+2y=1$ 中隐含了一个函数关系 $y=\dfrac{1-x}{2}$. 又如圆的方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定了两个函数

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad x\in[-a,a],$$
$$y=-\sqrt{a^2-x^2},\quad x\in[-a,a].$$

在 xOy 平面上, 函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 表示上半圆周, 函数 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 表示下半圆周, 这两个函数都是由方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定的. 在这种情况下, 方程所确定的是哪一个函数要根据条件而定. 如方程 $x^2+y^2=a^2$ 所确定的函数满足 $y\geqslant 0$, 则由该方程所确定的函数是

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\quad x\in[-a,a].$$

如果由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 确定 y 是 x 的函数 (满足函数的定义), 则称函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**.

设 $y=y(x)$ 是由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数, 有的方程可以解出 $y=y(x)$ 为解析式子, 但也有一些方程确定的函数关系不那么容易甚至不可能直接用自变量的解析式子表示出来. 例如开普勒 (Kepler) 方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0\ (\varepsilon \text{ 为常数, } 0<\varepsilon<1),$$

在这个方程中不可能将 y 用 x 的解析式表示出来, 但它仍能确定 y 是 x 的函数.

有时变量 x, y 之间的函数关系还可以通过参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t\in I)$$

给出, 这样的函数称为**由参数方程确定的函数, 简称参数式函数**, t **称为参数**.

例 8　物体做斜抛运动时, 运动曲线 (图 1-1-5) 表示的函数就可写作参数式函数:

$$\begin{cases} x=v_0t\cos\alpha, \\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$$

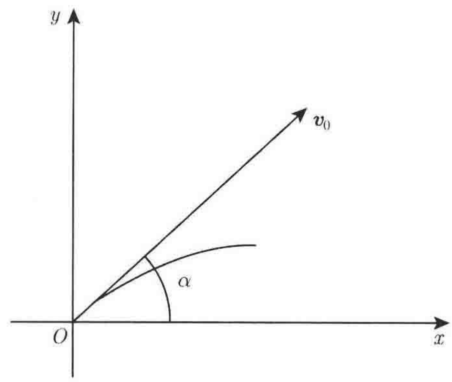


图 1-1-5

其中, α 为初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 与水平方向的夹角, $v_0=|\boldsymbol{v}_0|$.

三、 函数的几种基本特性

由初等数学可知, 函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性是函数的四个基本特性, 下面分别对它们作简要概括.

1. 函数在指定数集上的有界性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $I\subset D$. 若存在数 M_1, 使得当 $\forall x\in I$ 时, 恒有

$$f(x)\leqslant M_1,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有上界, M_1 为 $f(x)$ 在 I 上的一个上界; 若存在数 M_2, 当 $\forall x\in I$ 时, 恒有

$$f(x)\geqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有下界, M_2 为 $f(x)$ 在 I 上的一个下界; 若 $f(x)$ 在数集 I 上既有上界, 又有下界, 则称 $f(x)$ 在 I 上为有界函数.

显然, 若 $f(x)$ 在 I 上有界, 则必存在数 M_1, M_2, 使得对 $\forall x\in I$, 恒有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2,$$

取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$, 则容易证明上式等价于

$$|f(x)|\leqslant M,$$

因此函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界的充要条件为存在正数 M, 对 $\forall x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leqslant M$.

在几何上, 若函数 $f(x)$ 在数集 I 上有上界 M_1, 则表示函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上的图像均位于直线 $y=M_1$ 的下方; 若函数 $f(x)$ 在数集 I 上有下界 M_2, 则表示函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上的图像均位于直线 $y=M_2$ 的上方; 若函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界, 则表示必存在一个正数 M, 函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上的图像位于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间. 否则就称 $f(x)$ 在 I 上为无界函数, 即对 $\forall M>0$, 都 $\exists x_0 \in I$, 使得 $|f(x_0)|>M$. 无界函数是指无上界或无下界的函数.

例 9 讨论下列函数的有界性.

(1) $y=\sin(x^2-x+5)$;

(2) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$.

解 (1) 函数 $y=\sin(x^2-x+5)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为有界的, 大于且等于 1 的数都是它的上界, 小于且等于 -1 的数都是它的下界; 即对 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$, 都有

$$\left|\sin(x^2-x+5)\right| \leqslant 1.$$

(2) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 的定义域为 $D=\{x\,|x \geqslant 0, x \neq 1\}=[0,1)\cup(1,+\infty)$. 对 $\forall M>0$, 取 $x_0=\dfrac{M+1}{M}$, 则

$$y(x_0)=\frac{\sqrt{x_0}}{x_0-1}>\frac{1}{x_0-1}=M,$$

故函数 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ 是无界的.

(3) 函数 $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $D=\{x\,|x \neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 对 $\forall M>0$, 存在自然数 N, 使 $N>M$, 取 $x_0=\dfrac{1}{2N\pi}$, 则

$$y(x_0)=2N\pi\cos(2N\pi)=2N\pi>M,$$

故函数 $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 是无界的.

2. 函数的单调性

定义 4 设函数 $f(x)$ 在数集 $D \subset \mathbf{R}$ 上有定义, 对 $\forall x_1, x_2 \in D$, 若

(1) 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上为单调增加; 特别地, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上为严格单调增加.

(2) 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上为单调减少; 特别地, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 D 上为严格单调减少.

单调增加与单调减少函数统称为单调函数, 严格单调增加与严格单调减少函数统称为严格单调函数.

例如, 对数函数 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格单调增加的; 当 $0<a<1$ 时, 指数函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调减少的.

余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[-\pi,0]$ 上是严格单调增加的, 在 $[0,\pi]$ 上是严格单调减少的.

分段函数 $y=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ \mathrm{e}^x, & x>0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调增加; 而分段函数

$$y=\begin{cases} x+2, & x\leqslant 0, \\ \mathrm{e}^x, & x>0 \end{cases}$$

在 $(-\infty,0]$ 内严格单调增加, 在 $(0,+\infty)$ 内也严格单调增加, 但在 $(-\infty,+\infty)$ 内却不是单调增加函数.

取整函数 $y=[x]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的, 但不是严格单调增加的.

函数 $y=\begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q}, \\ 0, & x\notin\mathbf{Q} \end{cases}$ 在任何区间上都不是单调的.

例 10　证明函数 $f(x)=x^3-2$ 是严格单调增加的.

证　函数 $f(x)=x^3-2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$, 且 $x_1<x_2$, 有

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1)=&x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_2+x_1^2) \\ =&(x_2-x_1)\left[\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2\right]>0, \end{aligned}$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$. 故函数 $f(x)=x^3-2$ 是严格单调增加的.

3. 函数的奇偶性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的区间 (即 $\forall x\in D$, 必有 $-x\in D$), 对 $\forall x\in D$,

若等式 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数;

若等式 $f(-x)=f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

在几何上, 由于奇函数 $f(x)$ 满足条件 $f(-x)=-f(x)$, 因此若点 $A(x,f(x))$ 在曲线 $y=f(x)$ 上, 则 A 的关于原点中心对称的点 $A'(-x,-f(x))$ 也在该曲线上 (图 1-1-6(a)), 因此奇函数的图像关于原点中心对称. 类似可知偶函数的图像关于 y 轴对称 (图 1-1-6(b)).

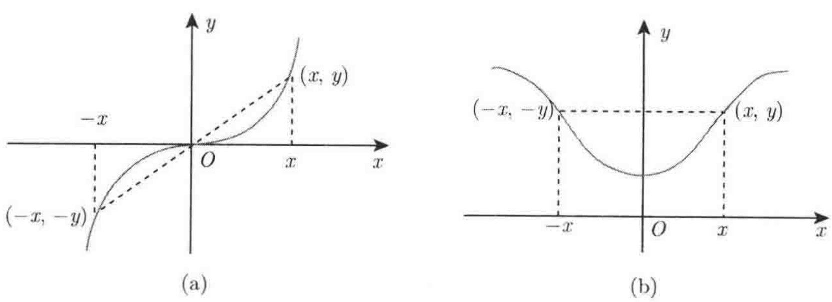


图 1-1-6

例 11 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{b}(a>0$ 且 $a\neq 1; b\neq 0)$;

(2) $f(x)=x^3+1$;

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 (1) 因为

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{b}=f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{b}$ 是偶函数.

(2) 因为

$$f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1,$$

所以 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$, 故 $f(x)=x^3+1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=\ln\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

4. 函数的周期性

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 若存在非零定值 $T(T\neq 0)$, 使得对 $\forall x\in D$, 都有 $x+T\in D$, 且等式 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 是**周期函数**, T 是它的一个**周期**. 易知 T 的整数倍 nT 也一定是 $f(x)$ 的周期. 在 $f(x)$ 的所有周期中, 若存在最小的正数, 则称这个数为 $f(x)$ 的**最小正周期**. 值得注意的是, 并不是所有的周期函数都有最小正周期.

例 12 $y=x-[x]$ 是周期函数, 其最小正周期为 1; 三角函数中 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

例 13 证明狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\0, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$

是周期函数, 但无最小正周期.

证 设 $\forall x\in\mathbf{R}$, 当 $x\in\mathbf{Q}$ 时, 对 $\forall r\in\mathbf{Q}$, 有 $x+r\in\mathbf{Q}$, 因此有

$$f(x+r)=f(x)=1;$$

当 $x\notin\mathbf{Q}$ 时, 即 x 为无理数, 则 $x+r$ 也为无理数, 因此有

$$f(x+r)=f(x)=0.$$