

G A I L V L U N Y U S H U L I T O N G J I



普通高等教育“十二五”规划教材

# 概率论与数理统计(第4版)

主 编	韩 明	
副主编	林孔容	张积林
主 审	王家宝	



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

# 概率论与数理统计

(第4版)

主 编 韩 明

副主编 林孔容 张积林

主 审 王家宝



同济大学出版社  
TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内容提要

本书是在第3版的基础上,按照工科及经济管理类“本科数学基础课程教学基本要求”并结合当前大多数本专科院校的学生基础和教学特点进行编写的,全书共分9章,第1—5章是概率论部分,内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理;第6—9章是数理统计部分,内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验及回归分析,各章节均配有习题,书末附有参考答案,附表中列有一系列数值用表。本书在编写中注重渗透现代化教学思想及手段,切合实际需求和加强学生应用能力的培养,并附录有数学建模及大学生数学建模竞赛、概率论与数理统计实验的相关内容。

本书适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经济管理类有关专业的概率论与数理统计课程的教材使用(其中标有“\*”的部分是供选学的),也可供成人教育学院或申请升本的专科院校选用为教材,还可供相关专业人员和广大教师参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/韩明主编.—4版.—上海:同济大学出版社,2016.6

ISBN 978-7-5608-6394-8

I. ①概… II. ①韩… III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第134919号

---

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计(第4版)

主 编 韩 明

副主编 林孔容 张积林

主 审 王家宝

责任编辑 张 莉 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵 编委会 徐 辉

---

出版发行 同济大学出版社 [www.tongjipress.com.cn](http://www.tongjipress.com.cn)

(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 常熟市大宏印刷有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 15.5

印 数 1—5100

字 数 310000

版 次 2016年6月第4版 2016年6月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-6394-8

---

定 价 29.00元

# 前 言

本书的第1版、第2版、第3版出版后,深受广大师生的欢迎,在此作者表示衷心地感谢。

在本书的第3版出版后,我们继续关注国内外“概率论与数理统计”课程教学改革的相关动态,努力探索“概率论与数理统计”课程的教学改革,并将部分成果融入教材中。

本课程的很多思想非常朴素,用到的数学工具也并不艰深,但它别开生面的内容、深刻的结论,使不少初学者感觉概念成堆、公式众多,难以理解和掌握。长期以来《概率论与数理统计》传统教材多注重理论,而对如何使用数学软件来解决实际问题很少涉及(或干脆不涉及),使学生对该课程的理解停留在理论层面上,造成理论和实际相脱节。在本课程的教学过程中,如果能融入一些数学文化史料,在强调知识性的同时增加一些趣味性,对于提高本课程的教学效果一定会有所帮助。面对教学中存在的问题,如何有效地提高教学效果,激发学生的学习积极性、主动性,是本课程当前教学中迫切需要解决的问题。

把数学实验(Mathematical Experiment)和数学建模(Mathematical Modeling)的思想融入大学数学主干课程,这是当前大学数学教学改革的一个重要方向。本书的附录A“数学建模及大学生数学建模竞赛简介”和附录B“概率论与数理统计实验简介”,从一个侧面体现了本课程的教学改革,教材中的一些计算、画图的MATLAB程序,见附录B。鉴于数学实验、数学建模的重要性,以及“中国大学生数学建模竞赛”和“美国大学生数学建模竞赛”的影响越来越大,在本次修订中,我们重写了附录A,并补充了附录B。

本次修订中,增加了“概率论”发展简史(作为第1章的补充阅读)、“数理统计”发展简史(作为第6章的补充阅读)。

本次修订是在本书2013年第3版的基础上进行的。在本书的第3版出版后,经过三年来的教学实践,我们收集了广大师生的意见和建议。本次修订中,我们修改了第3版中的不当之处,对少部分内容进行了修订,调整、补充了个别例题和习题,保留了第3版的内容体系和大部分内容。本次修订计划由韩明提出,张积林、陈翠参加了修订计划的讨论,并参加了部分内容的讨论。本次修订由韩明执笔。

作者在此对王家宝教授的指导和鼓励表示感谢。我们努力使本书写成一本既有特色又便于教学的教材,但由于水平有限,书中难免还有一些疏漏甚至错误,恳请专家和读者批评指正。让我们共同努力,把这本教材建设好。

韩 明

2016年3月

## 第3版前言

本书的第1版、第2版出版后,深受广大师生的欢迎,在此作者表示衷心感谢,同时也深感“越受到欢迎,责任越大”。

本次修订是在2007年第1版、2010年第2版的基础上进行的。在本书的第2版出版后,经过三年来的教学实践,我们又多了一些积累,并吸收了广大师生的意见和建议。在此基础上,我们修改了第2版中的不当之处,并努力致力于教材质量的提高。在本次修订中,我们只是对少部分内容进行了修订,保留了第2版的内容体系和绝大部分内容。

在第2版出版后,我们继续关注和跟踪了国内外“概率论与数理统计”课程教学改革的有关动态,特别是由全国高等学校教学研究中心、全国高等学校教学研究会、教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会、中国数学会、中国工业与应用数学学会、高等教育出版社与有关高校共同组织的“大学数学课程报告论坛”,每年一届(从2005年开始,截止到2012年已成功举办八届)。大学数学课程报告论坛,被誉为大学数学教学改革的“风向标”,在高校中具有广泛影响,该论坛每届都有“概率论与数理统计”课程教学改革方面的相关内容。

在我国高等教育进入以提高质量为核心,加快从高等教育大国向高等教育强国迈进的重要阶段,教学内容、教学方法的改革与创新不但是切实提高课程教学质量的关键环节之一,也是当前提高课程教学质量的热点,已成为当前高校深化教学改革、提高教学质量中的焦点与难点。本书作者也在努力探索“概率论与数理统计”课程的教学改革,并已将其中的部分成果融入本书中。

本次修订计划由韩明提出,张积林、陈翠参加了修订计划的讨论,并参加了部分内容的讨论;习题及其参考答案部分由陈翠负责,其余部分由韩明负责;全书由韩明统稿、定稿。

作者在此对王家宝教授的指导和鼓励表示感谢,并对参考文献的作者表示感谢。虽然我们努力使本书写成一本既有特色又便于教学(或自学)的书,但由于我们编写水平有限,书中难免还有一些疏漏甚至错误,恳请专家和读者批评指正。一本好的教材需要经过多年的教学实践,反复锤炼。希望继续得到专家和读者的关心和厚爱,让我们共同努力,把这本教材建设好。

韩 明

2013年5月

## 第2版前言

本书是在2007年第1版的基础上修订的,适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经济管理类等有关专业“概率论与数理统计”课程的教材使用(其中标有“\*”的部分是供选学的),还可供相关专业人员和广大教师参考。

本书共分9章,第1—5章是概率论部分,内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理;第6—9章是数理统计部分,内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析。

本书第1版出版后,深受广大师生的欢迎,并已重印6次,错误和疏漏也已修订了6次。经过3年来的教学实践,我们积累了一些经验,并吸收了广大教师和学生意见和建议,本次修订就是在这些基础上进行的。我们修改了第1版中的不当之处,并努力致力于教材质量的提高。本次修订保留了第1版的内容体系和大部分内容,调换和改写了个别例题和习题,并增加了附录B——概率论与数理统计实验简介。

把数学实验(Mathematical Experiment)和数学建模(Mathematical Modeling)的思想融入大学数学主干课程,是当前大学数学教学改革的一个重要方向,也是计算机普及的今天给大学数学教学改革提出的一个必须考虑的问题。在本书的第1版中虽然已有体现(如例5.1.4,还有附录A“数学建模及大学生数学建模竞赛简介”等),但体现得还不够。那么,在本次修订中如何体现“将数学实验和数学建模的思想融入‘概率论与数理统计’课程”呢?本次修订在这方面有所考虑,主要是借助数学实验把书中一些不太好理解的问题(如与极限有关的几个定理)通过可视化等,使读者便于理解相关内容。如例2.1.7——二项分布和泊松分布的近似关系(直观地说明了泊松定理);例5.1.3——事件的频率与概率的关系(直观地说明了伯努利大数定律),例5.2.1和例5.2.3——分别直观地说明了独立同分布中心极限定理、棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理。另外,关于几个常见分布分位点的值,如果在教材后的附表中查不到时,可以用有关软件(如MATLAB软件等)计算得到。关于与“概率论与数理统计”课程有关的数学实验,可详见附录B。

本次修订工作的分工如下:修订计划由韩明提出,罗明安、林孔容、陈翠参加了修订计划的讨论,并参加了部分内容的讨论;陆汾、张积林参加了部分内容的讨论;习题及其参考答案部分由陈翠执笔,其余部分由韩明执笔;全书由韩明统稿、定稿。

本书由王家宝教授主审,他对本书进行了认真的审阅,并提出了中肯的建议,

在此表示感谢。

希望继续得到专家和广大读者的关心和厚爱,让我们共同努力,把这部教材建设好。虽然我们努力使本书写成一部既有新意又便于教学的教材,但由于编者水平所限,书中肯定还有一些疏漏甚至错误之处,恳请专家和读者批评、指正。

韩 明

2010年5月

# 第 1 版前言

“概率论与数理统计”是研究随机现象的一门数学课程,也是普通高等院校本科生各专业普遍开设的一门公共基础课程.为了适应当前我国高等教育正经历从“精英型教育”向“大众化教育”的转变过程,满足大多数高等院校出现的新的教学形势、学生基础和教学特点,我们编写了这部概率论与数理统计课程的书.

本书在编写过程中认真贯彻落实教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神,并严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新修订的工科及经济管理类“本科数学基础课程(概率论与数理统计)教学基本要求”,同时参考了近几年来国内外出版的有关教材,并深入结合编者的一线教学实践经验.全书以通俗易懂的语言,深入浅出地讲解概率论与数理统计的知识,共分 9 章内容.第 1—5 章是概率论部分,内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理;第 6—9 章是数理统计部分,内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验及回归分析.本书的主要特色有以下几点:

(1) 在满足基本学时(约 50 学时)要求的内容的基础上,适当淡化理论推导过程;

(2) 弱化技巧性训练,重在使学生理解和掌握基本概念、基本理论和基本方法;

(3) 概率论部分重概念、背景,数理统计部分重思想、方法,增强知识的实用性;

(4) 精选例题 135 个和习题 284 道,习题按节(每节后有习题)、章(每章后有复习题)设立,并于书末附有习题参考答案和一系列数值用表,目的在于加强学生对教学内容的理解,培养学生的应用意识和能力;

(5) 注重渗透现代化教学思想及手段、切合实际需求和加强学生应用能力的培养,并附录有数学建模及大学生数学建模竞赛的相关内容.

学习和使用本书需要读者具备“高等数学”与“线性代数”课程的基本知识.本书知识系统、详略得当、举例丰富、讲解透彻、难度适宜,适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经济管理类有关专业的概率论与数理统计课程的教材使用(其中“\*”部分是供选学的),也可供成人教育学院或申请升本的专科院校选用为教材,也可供相关专业人员和广大教师参考.

与本书同步出版的《概率论与数理统计学习指导》是本书内容的补充、延伸、拓



展和深入,对教学中的疑难问题和授课中不易展开的问题以及诸多典型题目进行了详细探讨,对教师备课、授课和学生学习、复习以及巩固本书的教学效果大有裨益,亦可作为本书配套的习题课参考书。

本书由韩明主编,罗明安、林孔容副主编。参加编写的人员有:韩明、陈翠、罗明安、林孔容和肖果能,全书由韩明统稿、定稿。

除了编者写作的内容外,本教材的部分内容(例题和习题等)参考了书后所列参考文献。作者在这里对这些参考书的作者表示感谢。

感谢王家宝教授。他在审阅时提出了一些宝贵而又中肯的建议,使本书避免了一些错误和不妥之处。

虽然我们努力使本书写成为一部既有新意又便于教学的教材,但由于水平所限,书中一定还有不少不尽人意之处,恳请专家和读者提出宝贵意见。

韩 明

2007年3月

# 目 录

前 言

第 3 版前言

第 2 版前言

第 1 版前言

第 1 章 随机事件与概率	(1)
1.1 随机事件及其运算	(1)
1.1.1 随机试验与样本空间	(1)
1.1.2 随机事件、事件间的关系与运算	(2)
1.2 事件的概率及其性质	(6)
1.2.1 频率与概率的统计定义	(6)
1.2.2 古典概型	(7)
1.2.3 几何概率	(9)
1.2.4 概率的公理化定义	(10)
1.3 条件概率与贝叶斯公式	(13)
1.3.1 条件概率与乘法公式	(13)
1.3.2 全概率公式与贝叶斯公式	(15)
1.4 事件的独立性与伯努利概型	(19)
1.4.1 事件的独立性	(19)
1.4.2 伯努利概型	(21)
复习题 1	(22)
补充阅读 “概率论”发展简史	(23)
第 2 章 随机变量及其分布	(26)
2.1 随机变量的概念与离散型随机变量	(26)
2.1.1 随机变量的概念	(26)
2.1.2 离散型随机变量及其分布律	(27)
2.1.3 常见的离散型随机变量	(28)
2.2 随机变量的分布函数	(34)
2.2.1 分布函数的定义	(34)
2.2.2 分布函数的性质	(35)
2.3 连续型随机变量及其概率密度	(37)

2.3.1	连续型随机变量 .....	(37)
2.3.2	常见的连续型随机变量 .....	(39)
2.4	随机变量函数的分布 .....	(45)
2.4.1	离散型随机变量函数的分布 .....	(45)
2.4.2	连续型随机变量函数的分布 .....	(46)
	复习题 2 .....	(49)
<b>第 3 章</b>	<b>多维随机变量及其分布</b> .....	(51)
3.1	二维随机变量及其分布 .....	(51)
3.1.1	二维随机变量的定义、分布函数 .....	(51)
3.1.2	二维离散型随机变量 .....	(52)
3.1.3	二维连续型随机变量 .....	(53)
3.2	边缘分布 .....	(56)
3.2.1	边缘分布律 .....	(56)
3.2.2	边缘密度函数 .....	(58)
3.3	随机变量的独立性 .....	(61)
3.4	两个随机变量函数的分布 .....	(64)
3.4.1	$Z=X+Y$ 的分布 .....	(64)
3.4.2	$M=\max\{X,Y\}$ 和 $N=\min\{X,Y\}$ 的分布 .....	(67)
	复习题 3 .....	(70)
<b>第 4 章</b>	<b>随机变量的数字特征</b> .....	(72)
4.1	数学期望 .....	(72)
4.1.1	数学期望的定义 .....	(73)
4.1.2	随机变量函数的数学期望 .....	(75)
4.1.3	数学期望的性质 .....	(77)
4.2	方差 .....	(79)
4.2.1	方差的定义 .....	(80)
4.2.2	方差的性质 .....	(81)
4.2.3	常见分布的方差 .....	(82)
4.3	协方差、相关系数与矩 .....	(86)
4.3.1	协方差与相关系数 .....	(86)
4.3.2	独立性与不相关性 .....	(90)
4.3.3	矩、协方差矩阵 .....	(92)
	复习题 4 .....	(93)
<b>第 5 章</b>	<b>大数定律及中心极限定理</b> .....	(95)
5.1	大数定律 .....	(95)

5.1.1	切比雪夫不等式 .....	(95)
5.1.2	3个大数定律 .....	(96)
5.2	中心极限定理 .....	(101)
5.2.1	独立同分布中心极限定理 .....	(101)
5.2.2	棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理 .....	(104)
	复习题 5 .....	(106)
<b>第 6 章</b>	<b>数理统计的基本概念</b> .....	(108)
6.1	几个基本概念 .....	(108)
6.1.1	总体与样本 .....	(108)
6.1.2	直方图 .....	(110)
6.1.3	统计量与样本矩 .....	(112)
6.2	3个重要分布与抽样定理 .....	(115)
6.2.1	3个重要分布 .....	(115)
6.2.2	正态总体下的抽样定理 .....	(122)
	复习题 6 .....	(126)
	补充阅读 “数理统计”发展简史 .....	(126)
<b>第 7 章</b>	<b>参数估计</b> .....	(131)
7.1	点估计 .....	(131)
7.1.1	矩估计法 .....	(131)
7.1.2	极大似然估计法 .....	(133)
7.2	估计量的评选标准 .....	(138)
7.2.1	无偏性 .....	(138)
7.2.2	有效性与一致性 .....	(140)
7.3	区间估计 .....	(141)
7.3.1	区间估计的定义 .....	(141)
7.3.2	单个正态总体均值与方差的置信区间 .....	(144)
7.3.3	两个正态总体均值之差与方差之比的置信区间 .....	(145)
	复习题 7 .....	(149)
<b>第 8 章</b>	<b>假设检验</b> .....	(152)
8.1	假设检验的基本思想与步骤 .....	(152)
8.1.1	假设检验的基本思想 .....	(152)
8.1.2	两类错误与假设检验的步骤 .....	(154)
* 8.1.3	检验的 $p$ -值 .....	(156)
8.2	单个正态总体均值与方差的检验 .....	(158)
8.2.1	单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 $\mu$ 的检验 .....	(158)

8.2.2	置信区间与假设检验的关系 .....	(160)
8.2.3	单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 方差 $\sigma^2$ 的检验 .....	(161)
8.3	两个正态总体均值与方差的检验 .....	(164)
8.3.1	两个正态总体均值之差的检验 .....	(164)
8.3.2	两个正态总体方差之比的检验 .....	(166)
* 8.4	分布拟合检验 .....	(168)
	复习题 8 .....	(172)
* 第 9 章	回归分析 .....	(175)
9.1	一元线性回归 .....	(175)
9.1.1	基本概念 .....	(175)
9.1.2	回归系数的最小二乘估计 .....	(177)
9.1.3	回归方程的显著性检验 .....	(179)
9.1.4	一元线性回归方程的预测 .....	(184)
9.2	可线性化的回归方程 .....	(185)
	复习题 9 .....	(187)
附 录	.....	(189)
附录 A	数学建模及大学生数学建模竞赛简介 .....	(189)
附录 B	概率论与数理统计实验简介 .....	(195)
附录 C	概率论与数理统计附表 .....	(201)
参考答案	.....	(218)
参考文献	.....	(231)

# 第 1 章 随机事件与概率

在自然界与人类社会的活动中,人们观察到的现象是多种多样的,但归结起来,它们大体上可以分为两类,一类是确定性现象,另一类是随机现象.

例如,向上抛一粒石子必然下落;同性电荷必然相互排斥.这类在一定条件下必然发生的现象,称为**确定性现象**(或必然现象).

在相同条件下抛一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,在抛掷之前,无法预知抛掷的结果,结果呈现出不确定性;但多次重复抛掷同一枚硬币,得到正面朝上与反面朝上两个结果大致各占一半,结果呈现出规律性.在大量重复试验中,其结果所呈现出的规律性,称为**统计规律性**.这类在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果呈现出规律性的现象,称为**随机现象**(或偶然现象).值得注意的是,确定性现象,在一定条件下其结果只有一个,而随机现象其结果却不只一个.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.其理论与方法的应用非常广泛,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产、国民经济以及我们的日常生活.

《统计与真理——怎样运用偶然性》(C. R. Rao)的扉页上写有这样一段话:“在终极的分析中,一切知识都是历史;在抽象的意义下,一切科学都是数学;在理性的基础上,所有的判断都是统计学.”

1990年诺贝尔经济学奖的三位得主之一是马科维茨(Markowitz),他获奖的主要原因是提出了投资组合选择(portfolio selection)理论,他把投资组合的价格视为随机变量,用它的均值来衡量收益,用它的方差来衡量风险(被称为“均值-方差分析理论”),该理论后来被誉为“华尔街的第一次革命”(注:随机变量、均值、方差是本书将要介绍的内容).

## 1.1 随机事件及其运算

### 1.1.1 随机试验与样本空间

我们遇到过各种试验,包括各种科学试验.在这里我们把试验作广义理解,对某一事物的某一特征的观察,也认为是一种试验.为了研究随机现象的统计规律性,我们需要进行各种试验.

如果一个试验同时满足下列条件:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行(简称“可重复性”);

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果(简称“不唯一性”);

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现(简称“不确定性”),则称这样的试验为**随机试验**,有时把随机试验简称为**试验**(experiment),用  $E$  来表示. 我们是通过随机试验来研究随机现象的.

值得注意的是,随机试验要求试验在相同的条件下可以重复,当然也有很多随机现象是不能重复的,例如,某场足球赛的输赢是不能重复的,某些经济现象(如经济增长率等)也是不能重复的.

把随机试验  $E$  的所有可能结果组成的集合称为  $E$  的**样本空间**,用  $\Omega$  来表示. 样本空间  $\Omega$  中的元素,即试验  $E$  的每个结果,称为**样本点**,用  $\omega$  来表示.

**例 1.1.1** 以下是 6 个随机试验,请写出它们的样本空间.

$E_1$ : 抛掷一枚硬币,用 H(head) 表示正面朝上,用 T(tail) 表示反面朝上,观察正面和反面出现的情况.

$E_2$ : 将一枚硬币抛掷 3 次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

$E_3$ : 将一枚硬币抛掷 3 次,观察正面出现的次数.

$E_4$ : 抛一颗骰子,观察出现的点数.

$E_5$ : 记录某城市 114 电话号码查询台一昼夜接到的呼叫次数.

$E_6$ : 在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

**解** 上面 6 个试验  $E_1, E_2, \dots, E_6$  的样本空间分别是

$$\Omega_1: \{H, T\};$$

$$\Omega_2: \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\};$$

$$\Omega_3: \{0, 1, 2, 3\};$$

$$\Omega_4: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$\Omega_5: \{0, 1, 2, 3, \dots\};$$

$$\Omega_6: \{t \mid t \geq 0\}.$$

应该注意的是,样本空间中的元素是由试验的目的所确定的. 例如,在例 1.1.1 中,  $E_2$  和  $E_3$  同是将一枚硬币抛掷 3 次,由于试验的目的不同,样本空间中的元素也不同.

### 1.1.2 随机事件、事件间的关系与运算

在进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点组成的集合,即“随机试验的某些样本点组成的集合”(亦即样本空间的子集). 例如,若规定某种灯泡的寿命小于 1000h 为次品,则我们在例 1.1.1 的  $E_6$  中关心是否有  $t \geq 1000h$ , 满

足这个条件的样本点组成样本空间  $\Omega_0$  的一个子集  $\{t \mid t \geq 1000\}$ .

称试验  $E$  的样本空间  $\Omega$  的子集为  $E$  的随机事件(或“随机试验的某些样本点组成的集合”),简称事件(event).在一次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.随机事件一般用大写字母  $A, B, C$  等来表示.

**例 1.1.2** 在例 1.1.1 中,看几个事件的例子.对于  $E_2$ ,事件“第一次出现 H”,即  $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$ ;事件“3 次出现同一面”,即  $A_2 = \{HHH, TTT\}$ .对于  $E_4$ ,事件“出现偶数点”,即  $A_3 = \{2, 4, 6\}$ .

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为基本事件.例如,在例 1.1.1 的  $E_1$  中,有 2 个基本事件  $\{H\}$  和  $\{T\}$ ;在  $E_3$  中,有 4 个基本事件  $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ .

样本空间  $\Omega$  包含所有样本点,它是自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为必然事件.

空集  $\emptyset$  不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,称为不可能事件.

事件是一个集合,所以事件间的关系与运算自然按照集合论中集合间的关系与运算来处理.下面这些关系与运算的提法,是根据集合间的关系与运算以及“事件发生”的含义给出的.

设试验  $E$  的样本空间  $\Omega$ ,而  $A, B, A_i (i = 1, 2, \dots)$  是  $\Omega$  的子集.

(1) 若  $A \subset B$ ,则称事件  $B$  包含事件  $A$ ,这指的是事件  $A$  发生必然导致事件  $B$  发生.

若  $A \subset B$  且  $A \supset B$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  相等,记为  $A = B$ .

(2) 事件  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的和事件.当且仅当  $A, B$  中至少有一个事件发生时,事件  $A \cup B$  发生.

类似地,称  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  为  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的和事件,称  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  为可列个事件  $A_1, A_2, \dots$  的和事件.

(3) 事件  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的积事件.当且仅当  $A, B$  同时发生时,事件  $A \cap B$  发生.事件  $A$  与事件  $B$  的积事件,简记作  $AB$ .

类似地,称  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  为  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的积事件,称  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$  为可列个事件  $A_1, A_2, \dots$  的积事件.

(4) 事件  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$  称为事件  $A$  与事件  $B$  的差事件.当且仅当  $A$  发生,  $B$  不发生时,事件  $A - B$  发生.

(5) 若  $A \cup B = \Omega$  且  $A \cap B = \emptyset$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  互为对立事件(或逆事件).记事件  $A$  的对立事件为  $\bar{A}, \bar{A} = \Omega - A$ .

(6) 若  $A \cap B = \emptyset$ ,则称事件  $A$  与事件  $B$  互不相容(或互斥).这指的是事件  $A$  与事件  $B$  不能同时发生.显然,同一个试验中各个基本事件是两两互不相容的.



我们可以用维恩(Venn)图来表示上述事件间的关系与运算,如图 1-1—图 1-6 所示.

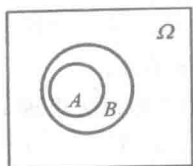


图 1-1  $A \subset B$

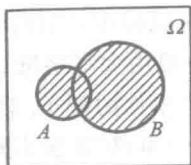


图 1-2  $A \cup B$

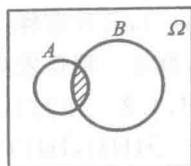


图 1-3  $A \cap B$

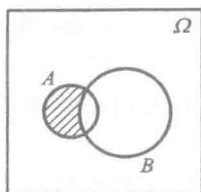


图 1-4  $A - B$

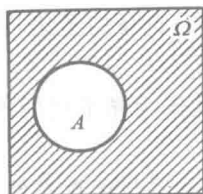


图 1-5  $\bar{A}$

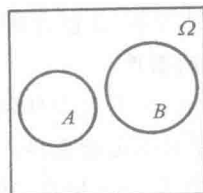


图 1-6  $A$  与  $B$  互不相容

在进行事件的运算时,经常要用到下述定律. 设  $A, B, C, A_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为事件, 则有

交换律:  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$

结合律:  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

分配律:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

德摩根(De Morgan)律:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i, \overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i.$$

在集合论、概率论中符号与意义的对照,见表 1-1.

表 1-1 在集合论、概率论中符号与意义的对照

符 号	集 合 论	概 率 论
$\Omega$	全集	样本空间, 必然事件
$\emptyset$	空集	不可能事件
$\omega (\in \Omega)$	元素	样本点