



2017

李永乐·王式安**唯一**考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

分阶习题 同步训练

数学一

主 编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编 委 ◎ 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

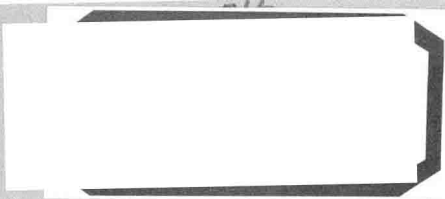
本习题集将每章习题，按难度分为三类
分别是**基础单项训练**、**基础综合训练**和**思维拓展训练**



ISBN 978-7-5150-1646-7



9 787515 016467 >
定价：69.80元



2017

李永乐·王式安唯一考研数学系列
全国十二大考研辅导机构指定用书

分阶习题 同步训练

数学
一

本书专属：_____

我要认真、独立地学完本书内容。

国家行政学院出版社

说 明

本习题集将每章习题,按难度分为三类,分别是基础单项训练、基础综合训练和思维拓展训练。题型包括选择题、填空题和解答题。选择题均为单项选择题,只有一个最适合的选项。解答题要求写出解题步骤、过程和必要的说明。

基础单项训练

此类题难度较低,属于菜鸟级。题目内容都是所在章节的基本概念、定理和方法的简单重现。为熟悉所学内容而进行的必要练习。

基础综合训练

所在章节的综合练习题,题目涉及的知识点不再是单个的概念,具有一定的综合性,条件设置较隐蔽,需要进行一定探索研究才能得到结果。增加练习的效果。

思维拓展训练

此类题目具有难度和综合性,目的是使学生的数学知识转化成思维模式上来。让学生随着练习逐步深化、拓展知识结构。这类题,结合前后章节的知识,具有开放性,解题方法不统一,变换一些条件就会转化成新的题目。需要学生积极思考,能从不同方法中寻求解题最佳方法。

尽管我们为以上所有的习题都配了答案,但希望同学不要被所提供的答案束缚,积极思考,尽量通过自己的思考得出答案。顺便提一下,如果你被菜鸟题虐的很惨。请记住,不是你不够聪明,而是老师出的题太刁钻。





目录

第一篇 高等数学

第一章 函数 极限 连续	(1)
基础单项训练	(1)
基础综合训练	(2)
思维拓展训练	(4)
第二章 一元函数微分学	(6)
基础单项训练	(6)
基础综合训练	(7)
思维拓展训练	(11)
第三章 一元函数积分学	(14)
基础单项训练	(14)
基础综合训练	(16)
思维拓展训练	(19)
第四章 向量代数与空间解析几何 ..	(23)
基础单项训练	(23)
基础综合训练	(24)
思维拓展训练	(25)
第五章 多元函数微分学	(27)
基础单项训练	(27)
基础综合训练	(29)
思维拓展训练	(32)
第六章 多元函数积分学	(35)
基础单项训练	(35)
基础综合训练	(39)
思维拓展训练	(43)
第七章 无穷级数	(46)
基础单项训练	(46)
基础综合训练	(48)
思维拓展训练	(51)

第八章 微分方程	(52)
基础单项训练	(52)
基础综合训练	(53)
思维拓展训练	(54)

第二篇 线性代数

第一章 行列式	(56)
基础单项训练	(56)
基础综合训练	(56)
思维拓展训练	(57)
第二章 矩 阵	(58)
基础单项训练	(58)
基础综合训练	(58)
思维拓展训练	(59)
第三章 向 量	(60)
基础单项训练	(60)
基础综合训练	(61)
思维拓展训练	(62)
第四章 线性方程组	(63)
基础单项训练	(63)
基础综合训练	(64)
思维拓展训练	(66)
第五章 特征值、特征向量、相似矩阵	(67)
基础单项训练	(67)
基础综合训练	(68)
思维拓展训练	(69)
第六章 二次型	(71)
基础单项训练	(71)
基础综合训练	(72)



思维拓展训练 (74)

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率 (75)

基础单项训练 (75)

基础综合训练 (75)

思维拓展训练 (76)

第二章 随机变量及其概率分布 (78)

基础单项训练 (78)

基础综合训练 (79)

思维拓展训练 (80)

第三章 多维随机变量及其分布 (81)

基础单项训练 (81)

基础综合训练 (82)

思维拓展训练 (83)

第四章 随机变量的数字特征 (85)

基础单项训练 (85)

基础综合训练 (85)

思维拓展训练 (86)

第五章 大数定律和中心极限定理 (88)

基础单项训练 (88)

基础综合训练 (88)

思维拓展训练 (89)

第六章 数理统计的基本概念 (90)

基础单项训练 (90)

基础综合训练 (90)

思维拓展训练 (92)

第七章 参数估计 (93)

基础单项训练 (93)

基础综合训练 (93)

思维拓展训练 (95)

第八章 假设检验 (96)

基础单项训练 (96)

基础综合训练 (96)

思维拓展训练 (97)

习题参考答案与解析

第一篇 高等数学 (98)

第一章 函数 极限 连续 (98)

基础单项训练 (98)

基础综合训练 (100)

思维拓展训练 (102)

第二章 一元函数微分学 (104)

基础单项训练 (104)

基础综合训练 (107)

思维拓展训练 (110)

第三章 一元函数积分学 (112)

基础单项训练 (112)

基础综合训练 (114)

思维拓展训练 (119)

第四章 向量代数与空间解析几何 (122)

基础单项训练 (122)

基础综合训练 (122)

思维拓展训练 (123)

第五章 多元函数微分学 (126)

基础单项训练 (126)

基础综合训练 (128)

思维拓展训练 (131)

第六章 多元函数积分学 (134)

基础单项训练 (134)

基础综合训练 (138)

思维拓展训练 (142)

第七章 无穷级数 (145)

基础单项训练 (145)

基础综合训练 (148)

思维拓展训练 (152)

第八章 微分方程 (155)

基础单项训练 (155)

基础综合训练 (156)



思维拓展训练	(158)	第二章 随机变量及其概率分布	(184)
第二篇 线性代数	(161)	基础单项训练	(184)
第一章 行列式	(161)	基础综合训练	(185)
基础单项训练	(161)	思维拓展训练	(187)
基础综合训练	(162)	第三章 多维随机变量及其分布	(189)
思维拓展训练	(163)	基础单项训练	(189)
第二章 矩阵	(164)	基础综合训练	(191)
基础单项训练	(164)	思维拓展训练	(193)
基础综合训练	(164)	第四章 随机变量的数字特征	(196)
思维拓展训练	(166)	基础单项训练	(196)
第三章 向量	(167)	基础综合训练	(197)
基础单项训练	(167)	思维拓展训练	(199)
基础综合训练	(168)	第五章 大数定律和中心极限定理	(202)
思维拓展训练	(168)	基础单项训练	(202)
第四章 线性方程组	(170)	基础综合训练	(202)
基础单项训练	(170)	思维拓展训练	(203)
基础综合训练	(170)	第六章 数理统计的基本概念	(205)
思维拓展训练	(170)	基础单项训练	(205)
第五章 特征值、特征向量、相似矩阵	(172)	基础综合训练	(205)
基础单项训练	(172)	思维拓展训练	(207)
基础综合训练	(172)	第七章 参数估计	(209)
思维拓展训练	(173)	基础单项训练	(209)
第六章 二次型	(176)	基础综合训练	(210)
基础单项训练	(176)	思维拓展训练	(211)
基础综合训练	(176)	第八章 假设检验	(213)
思维拓展训练	(177)	基础单项训练	(213)
第三篇 概率论与数理统计	(179)	基础综合训练	(213)
第一章 随机事件和概率	(179)	思维拓展训练	(214)
基础单项训练	(179)		
基础综合训练	(180)		
思维拓展训练	(182)		

第一篇 高等数学

第一章 函数 极限 连续

基础单项训练

难度: ★☆

通关称号: 菜鸟

1. 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则(A) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 必不存在.(B) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 必存在.(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 必不存在.(D) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ 必存在.

2. 下列命题

① 设 $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 必连续.② 设 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 必连续.③ 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, $g(x)$ 在 $x = x_0$ 不连续, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x = x_0$ 必不连续.④ 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 都不连续, 则 $f(x) + g(x)$ 在 $x = x_0$ 必不连续.

其中正确的命题个数为

(A) 0 个.

(B) 1 个.

(C) 2 个.

(D) 至少 3 个.

3. 设当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 $(x - x_0)$ 的同阶无穷小, 则(A) $f(x) - g(x)$ 必是 $x - x_0$ 的同阶无穷小.(B) $f(x) - g(x)$ 必是 $x - x_0$ 的高阶无穷小.(C) $f(x)g(x)$ 必是 $x - x_0$ 的高阶无穷小.(D) $f(x)g(x)$ 必是 $x - x_0$ 的同阶无穷小.4. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\sin x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{当 } x \neq 0 \\ 1, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$, 则在点 $x = 0$ 处有间断点的函数是(A) $\max\{f(x), g(x)\}$.(B) $\min\{f(x), g(x)\}$.(C) $f(x) - g(x)$.(D) $f(x) + g(x)$.6. 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$

(A) 不存在间断点.

(B) 存在间断点 $x = 1$.(C) 存在间断点 $x = 0$.(D) 存在间断点 $x = -1$.7. 设 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(f(x)) =$ _____.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} =$ _____.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 2x} =$ _____.10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + e^{\frac{1}{x}})^{\ln(1+x)} =$ _____.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}} =$ _____.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin^2 \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^{x^2} =$ _____.13. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$15. \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x - \sin x}.$$

$$16. \text{设} u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + i}}, \text{求} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

基础综合训练**难度: ★★☆☆****通关称号: 小达人**

1. 下述命题正确的是

(A) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x_0 处不连续, 则 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处必不连续.(B) 设 $g(x)$ 在 x_0 处连续, $f(x_0) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.(C) 设在 $x = x_0$ 的去心左邻域内 $f(x) < g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = b$, 则必有 $a < b$.(D) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = b$, $a < b$, 则必存在 $x = x_0$ 的去心左邻域, 使 $f(x) < g(x)$.

$$2. \text{设} f(x) \text{为当} x \neq 0 \text{时} f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}}, \text{且} f(0) = -1, \text{则}$$

(A) 有可去间断点.

(B) 有跳跃间断点.

(C) 有无穷间断点.

(D) 连续.

$$3. \text{设} f(x) = \frac{(1 - \cos x)(x^3 + x + 1)}{x^3 + x^2}, \text{则}$$

(A) 存在 $\delta > 0$ 及 $X > 0$, $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内有界, 在 $(X, +\infty)$ 内无界.(B) 存在 $\delta > 0$ 及 $X > 0$, $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内无界, 在 $(X, +\infty)$ 内有界.(C) 对任意 $X > 0$, $f(x)$ 在 $(0, X)$ 内有界, 在 $(X, +\infty)$ 内无界.(D) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界.

$$4. \text{在区间} [0, 1] \text{上函数} f(x) = nx(1-x)^n \text{的最大值记为} M(n), \text{则} \lim_{n \rightarrow \infty} M(n) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$6. \text{设} y = y(x) \text{满足} y'' + (x-1)y' + x^2y = e^x \text{且} y(0) = 0, y'(0) = 1, \text{则} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^2 \arctan(nx) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$8. \text{设} f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{x-1}}}, \text{则} f(x) \text{有间断点} x = \underline{\hspace{1cm}}, \text{是} \underline{\hspace{1cm}} \text{型, 间断点} x = \underline{\hspace{1cm}}, \text{是} \underline{\hspace{1cm}} \text{型.}$$

$$9. \text{求} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \sin(x-1)}{\sqrt[3]{2x-x^2} - 1}.$$

$$10. \text{求} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos 3x}{e^x - 1 - x}.$$

11. 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

12. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{x} + \frac{2}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \right)$.

13. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} - 1 \right]$.

14. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n+k)(n+k+1)}$.

15. 设对任意 x 和 y , 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 并且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. 试证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

思维拓展训练

难度: ★★★★★

通关称号: 小·牛·人

1. 设 $f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a_i > 0, a_i \neq 1, i = 1, 2, \cdots, n; n \geq 2$ 为确定的整数. 求

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; ③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. 已知常数 $a > 0, b \neq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+ax} + \sqrt[3]{1+bx} - 2}{x^2} = -\frac{3}{2}$, 求 a 与 b .

3. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(1+bx+cx^2) - 1 - ax}{x^4}$ 存在, 求常数 a, b, c 的值, 并求此极限值.

4. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x^2} - 1} = 2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

5. 设当 $0 < x \leq 1$ 时 $f(x) = x^{\sin x}$, 对于其它 x , $f(x)$ 满足 $f(x) + k = 2f(x+1)$, 求常数 k 使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

6. 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = 3 + \frac{4}{x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限值.

7. 设常数 $a \neq -1, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^n - 1}{x^{2n} - (a+1)x^n - 1}$, 讨论 a 的取值, 确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

8. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数, 证明: 方程 $f(x) - f(x-1) = 0$ 在任何一个长度为 1 的闭区间 $[a, a+1]$ 上至少有一个实根.

第二章 一元函数微分学

基础单项训练

难度：☆☆

通关称号：菜鸟

1. 设 $f(x)$ 连续, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x-t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} =$
- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{5}$.
2. 设 $f(x)$ 满足 $f''(x) + x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 且 $f'(0) = 0$. 则
- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
 (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.
 (C) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 左侧邻近是凹的, 右侧邻近是凸的.
 (D) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 左侧邻近是凸的, 右侧邻近是凹的.
3. 曲线 $y = \frac{1+x}{1-e^{-x}}$ 有渐近线
- (A) 0 条. (B) 1 条. (C) 2 条. (D) 3 条.
4. 下述论断正确的是
- (A) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 除 $x = 0$ 外均可导, 且 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格单调增加的.
 (B) 设 $f(x)$ 为偶函数且 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(0) = 0$.
 (C) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶导数存在, 且 $f''(x_0) > 0$, 则 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
 (D) 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处三阶导数存在, 且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, 则 $x = x_0$ 一定不是 $f(x)$ 的极值点.
5. 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处二阶导数存在, 且 $f''(x_0) < 0$, $f'(x_0) = 0$, 则必存在 $\delta > 0$, 使得
- (A) 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上是凸的.
 (B) 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上是凹的.
 (C) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0]$ 是严格单调增, 在区间 $[x_0, x_0 + \delta)$ 是严格单调减.
 (D) 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0]$ 是严格单调减, 在区间 $[x_0, x_0 + \delta)$ 是严格单调增.
6. 设 $f(x)$ 二阶导数存在, 下述结论正确的是
- (A) 若 $f(x)$ 只有 2 个零点, 则 $f''(x)$ 必定没有零点.
 (B) 若 $f''(x)$ 至少有 1 个零点, 则 $f(x)$ 必至少有 3 个零点.
 (C) 若 $f(x)$ 没有零点, 则 $f''(x)$ 至多有 2 个零点.
 (D) 若 $f''(x)$ 没有零点, 则 $f(x)$ 至多有 2 个零点.
7. 下述命题
- ① 设 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续.
 ② 设 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必连续.
 ③ 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在等于 A , 则 $f'(x_0)$ 存在等于 A .
 ④ 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某邻域可导, 且 $f'(x_0) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在等于 A .
- 则正确的是
- (A) ① 与 ②. (B) ③ 与 ④. (C) ② 与 ③. (D) ① 与 ④.
8. $f(x) = (x^3 + 1)^{\frac{1}{3}} |x^3 - x|$ 的不可导的点的个数为
- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'(a) > 0, f'(b) < 0$. 则下述命题不正确的是
- (A) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(a)$.
 (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) > f(b)$.
 (C) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f'(x_0) = 0$.
 (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使 $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$.
10. 设 $x = \int_0^t 2e^{-t^2} ds, y = \int_0^t \sin(t-s)^2 ds$, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\sqrt{\pi}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. 设 $f''(a)$ 存在, $f'(a) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{f'(a)(x-a)} - \frac{1}{f(x)-f(a)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 设曲线 $y = ax^2 + bx + c$ 与曲线 $\begin{cases} x = \frac{4}{\pi} \arctan t \\ y = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t = 1$ 处相切并有相同的曲率圆, 则常数 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$.
13. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \ln(1+x)}{x^2} = A (A \neq 0)$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}, f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 椭圆 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4y = 0$ 与直线 $x + y - 6 = 0$ 之间的最短距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 曲线 $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$ 的渐近线方程为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 及 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
16. 设 $y = y(x)$ 由 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 确定, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.
17. 设 $f(u)$ 连续, $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^{x^2} tf(x^2 - t)dt$, 并设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^n}$ 存在且不为零, 求 n 及此极限值.

基础综合训练

难度: ★★☆☆

通关称号: 小达人

1. $f(x) = -\cos \pi x + (2x-3)^3 + \frac{1}{2}(x-1)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的零点个数
- (A) 正好 1 个. (B) 正好 2 个.
 (C) 正好 3 个. (D) 至少 4 个.
2. 下列 4 个命题
- ① 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 且 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处必可导.
 ② 设 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ 存在, 则 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处必可导.
 ③ 设 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ 存在, 则 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处可导.
 ④ 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处必可导.
- 正确的命题为
- (A) ① 与 ②. (B) ③ 与 ④. (C) ① 与 ③. (D) ② 与 ④.
3. 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则
- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

4. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内存在二阶导数, 且 $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = a, a > 0$, 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(C) 在点 $(0, f(0))$ 的左侧邻近, 曲线 $y = f(x)$ 是凹的, 右侧邻近是凸的.

(D) 在点 $(0, f(0))$ 的左侧邻近, 曲线 $y = f(x)$ 是凸的, 右侧邻近是凹的.

5. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$.

(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$.

(本题为 2014 年数学一、数学二考研真题).

6. 设 $f(x) = x^2 \sin ax, a > 0$, 则对于 $n \geq 1, f^{(2n+1)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设 $f(x)$ 有任意阶导数, 且 $f'(x) = [f(x)]^2, f(0) = 2, n \geq 2$, 则 $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 在曲线 $y = 1 - x^2$ 上在第一象限内的点作该曲线的切线, 使该切线与两坐标轴围成的三角形面积为最小, 求切点坐标.

9. 在极坐标曲线 $r = e^\theta$ 的 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 范围内曲线上找一点, 使经过它的切线与 x 轴、 y 轴的正向所围成的三角形的面积为最小, 并求出此面积的值.

10. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(x) > 0$. 在曲线 $y = f(x)$ 上任意一点 $(x, f(x))$ ($x \neq 0$) 处作此曲线的切线, 交 x 轴于点 $(u, 0)$. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(u)}{uf(x)}$.

11. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义, 且对于任意 $x \in (0, +\infty), y \in (0, +\infty)$ 有 $f(xy) = f(x) + f(y) + (x-1)(y-1)$, 又 $f'(1) = a \neq 1$. 证明对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f'(x)$ 存在并求之.

12. 设 $b > a > 0$, 证明: $\frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{2a}{a^2 + b^2}$.

13. 证明: 当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$, 且仅当 $x = 1$ 时成立等号.

14. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内存在二阶导数, 且 $f''(x) < 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 证明: 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, $f(x) \leq 2x$, 且仅在 $x = 0$ 时成立等号.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内存在二阶导数, 且 $f''(x) < 0$, $f(0) = 0$. 证明: 对任意 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

16. 设 $x > 0$, 证明: $(x-4)e^{\frac{x}{2}} - (x-2)e^x + 2 < 0$.

17. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内可导, 且 $f(0) < 0$, $f'(x) \geq k > 0$. 试证明存在唯一的 $\xi \in (0, +\infty)$ 使 $f(\xi) = 0$.

18. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)} \arctan x dx = \frac{1}{2}$, $f(1) = 0$, 试证明至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$ 使 $(1 + \xi^2) \arctan \xi \cdot f'(\xi) = -1$.

19. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在一阶导数, 在 (a, b) 内存在二阶导数, 且 $f(a) = f(b)$, $f'(a)f'(b) > 0$. 试证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $f''(\xi) = 0$.

思维拓展训练**难度: ★★★★★****通关称号: 小牛人**

1. 设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上存在二阶导数, $f(0) < 0$, $f''(x) > 0$. 试证明: (1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x)$ 至多有两个零点, 至少有一个零点; (2) 若的确有两个零点 x_1 与 x_2 , 则 $x_1 x_2 < 0$.

2. 讨论当 $x > 0$ 时, 方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 的根的个数.

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在二阶导数, 且与某直线至少交于 3 个点. 试证明, 至少存在一点 ξ 使 $f''(\xi) = 0$.