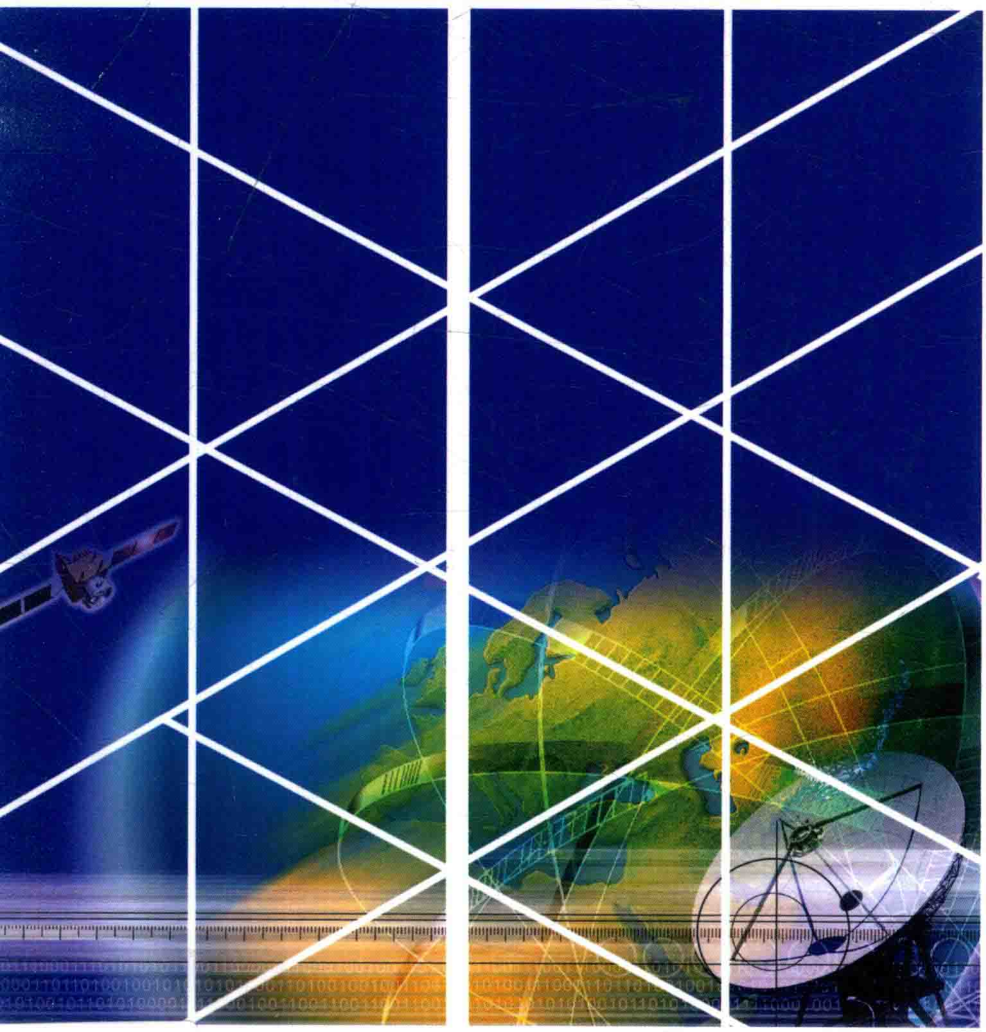
地球信息科学基础丛书

四元数摄影测量定位理论与方法

◎江刚武　姜　挺　龚　辉　著



科 学 出 版 社

地球信息科学基础丛书

四元数摄影测量定位理论与方法

江刚武　姜　挺　龚　辉　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书主要介绍四元数基本理论及其在摄影测量定位中的应用技术与方法。内容包括与平移和旋转密切相关的若干数学预备知识、四元数代数基本理论、基于四元数的经典摄影测量定位理论体系、空间后方交会抗差估计理论和方法、四元数外方位元素建模、基于四元数的高分辨率卫星遥感影像成像几何模型及其求解、星历姿态数据支持的四元数集成传感器定向、基于四元数的遥感影像立体定位和多传感器卫星影像四元数区域网平差。

本书可以作为高等院校与科研机构摄影测量与遥感、测绘工程、地理信息系统及相关专业的工程技术人员、管理人员和本科、研究生的教学科研参考书。

图书在版编目(CIP)数据

四元数摄影测量定位理论与方法/江刚武，姜挺，龚辉著. —北京：科学出版社，2016.8

(地球信息科学基础丛书)

ISBN 978-7-03-049257-9

Ⅰ. ①四… Ⅱ. ①江… ②姜… ③龚… Ⅲ. ①四元数-应用-摄影测量-摄影定位-研究 Ⅳ. ①P23

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 150109 号

责任编辑：苗李莉 李 静/责任校对：何艳萍

责任印制：张 伟/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 8 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16

2016 年 8 月第一次印刷 印张：13 1/2

字数：320 000

定价：98.00 元

前　　言

1843 年爱尔兰数学家哈密顿 (W.R.Hamilton) 发明了四元数，指出四元数能够通过旋转、平移和缩放等变换将一个给定的矢量变成另一个矢量，这种对矢量的运算法则和摄影测量定位理论具有奇妙的相通之处。事实上，摄影测量定位理论是基于影像求解地面三维坐标的方法，是一门“简化计算”的科学。实现高精度摄影测量定位的关键是精确地描述和确定传感器在成像时刻的内外方位元素，即建立起卫星影像与地面之间严密的数学关系，在本质上就是描述两个空间坐标系之间的缩放、旋转和平移关系，其中旋转关系是重点。而描述旋转关系的数学工具有很多，主要包括：旋转轴与角度、欧拉角、正交矩阵、罗德里格斯 (Rodrigues) 矩阵、反对称阵、四元数 (quaternion)、Gibbs 矢量等。

在经典摄影测量中，应用最广泛的是欧拉角，这是摄影测量的发展历史的选择。在以光学和机械方法为主的模拟摄影测量阶段，像片的几何定位必须通过精密复杂的光学机械投影来完成，在这个过程中，为了便于操作与理解，采用具有明确物理意义的欧拉角来表示模拟仪器上的角元素。当进入解析和数字摄影测量阶段后，为了继承模拟摄影测量的方法和成果，仍然采用欧拉角来描述旋转矩阵用于空中三角测量。利用欧拉角描述坐标间的旋转关系，虽然形象直观，但随着用于摄影测量的传感器平台向多样化发展，欧拉角在实际使用中出现了一些问题：① 欧拉角构成的旋转矩阵结构复杂，需要通过三个角度的连续旋转来完成，因此需要大量的三角函数和矩阵运算；② 欧拉角的奇异性使得当利用旋转矩阵反算欧拉角时结果不唯一；③ 在欧拉角进行姿态插值时很容易造成姿态的断裂和不连续，从而影响姿态插值的光滑连续，这在卫星影像处理时显得尤为突出；④ 欧拉角不能表示某些特殊的旋转，如旋转角为 90° 时，存在所谓的“方向锁定”(gimbal lock) 现象，这种现象在 GPS/IMU 辅助的 ADS40 影像处理中显得尤为突出，当偏航角接近 90°，对 IMU 偏心角进行检校时，欧拉角的奇异性导致求解发散。

欧拉角存在的上述问题促使我们思考，是否可以用其他的参数代替欧拉角来描述坐标间的旋转矩阵，摄影测量定位理论表明提高遥感影像几何定位稳健性的关键因素之一就是有效可靠地描述两个空间坐标系之间的旋转矩阵。在包括航天、机器人、计算机视觉在内的众多领域研究成果表明，四元数在描述坐标间旋转时具有非常大的优势，它能够明显而有效的克服欧拉角的缺点，且表达简洁、无需三角函数运算，适合计算机处理等。另外，在一些遥感测绘卫星中，如天绘 1 号、资源 3 号、ALOS PRISM、Hyperion 等，随影像附带的辅助数据中就有姿态四元数数据。因此直接利用姿态四元数数据进行影像的几何定位处理，将会充分利用卫星遥感影像的辅助数据，必将有利于拓展高分辨率卫星遥感影像的处理。

在国家自然科学基金项目 (批准号:40571131,40901246,41301526) 的资助下，我们通过研究基于四元数理论的定位技术与方法，为四元数用于高分辨率卫星遥感影像处理作出有益的理论探讨和实践检验，这不仅大大拓展四元数的应用领域，也进一步发展摄影

测量尤其是卫星摄影测量的基本理论与基本方法，同时也希望为国家“高分辨率对地观测系统”重大专项中的遥感影像高精度定位技术提供有益的借鉴与参考。

全书共 9 章，详细阐述了四元数基本理论及其在摄影测量定位中的应用。第 1 章重点介绍与平移和旋转相关的数学预备知识，包括复数、矩阵和行列式的基本概念，以及矢量运算的基本原理和方法。第 2 章介绍了四元数代数和对偶四元数的基本理论，重点描述了和空间旋转变换相关的四元数描述方法和插值理论。第 3 章以四元数理论为数学基础，建立了四元数描述的定位理论体系，涵盖了共线条件方程的建立、空间后方交会、相对定向、绝对定向和光束法区域网平差。第 4 章深入分析和探讨了空间后方交会抗差估计理论和方法。第 5 章对四元数外方位元素建模进行深入的研究和讨论，分别利用四元数微分方程和四元数球面线性插值建立了相应的外方位元素模型。第 6 章系统研究和分析了高分辨率卫星遥感影像的成像几何模型及其求解，为基于四元数的卫星线阵影像定位方法提供理论基础。第 7 章在四元数描述影像成像姿态的基础上，研究了星历姿态数据支持的四元数集成传感器定向问题。第 8 章在四元数外方位元素模型的基础上，利用严格成像几何模型，深入分析和探讨了基于地面控制点的高分辨率卫星遥感影像立体定位的理论和方法。第 9 章将星历姿态数据作为带权观测值，研究了基于多传感器的卫星影像四元数区域网平差。其中，第 2~4 章由江刚武教授编著，第 1、5 章由姜挺教授编著，第 6~9 章由龚辉博士编著，全书由江刚武教授统一成稿。

本书的编写得益于许多人的指导和帮助。衷心感谢解放军信息工程大学地理空间信息学院张卫强院长，教学科研办公室张晓森主任、阎晓东副主任、张鹤老师对本书出版的关心和支持，感谢遥感技术教研室主任秦志远教授的指导和帮助，并提出的宝贵意见。感谢西安测绘研究所巩丹超研究员、李新涛副研究员给予的无私帮助和支持。本书在撰写过程中参考借鉴了大量国内外同行的研究成果和文献，谨在此表示诚挚的敬意与感谢。

本书出版得到解放军信息工程大学地理空间信息学院教材出版专项经费资助。

由于作者的理论学术水平有限，书中难免出现不妥之处，敬请专家同行以及广大读者批评指正，联系方式为 jianggw@163.com。

作　者

2016 年 5 月于郑州

目　录

第1章 预备知识

摄影测量定位主要解决像平面坐标系和地面坐标系的平移、旋转和缩放等空间变换问题，这些空间变换问题可以利用复数和矩阵的相关理论进行解释。因此，本章重点介绍与平移和旋转相关的数学预备知识，包括复数、矩阵和行列式的基本概念，以及矢量运算和坐标变换理论 (数学手册编写组，1979；维诺格拉多夫，1994)。

1.1 复　数

复数的发现源于三次方程的根的表达式。数学上，“复”字表明所讨论的数域为复数，如复矩阵、复变函数等。复数为实数的延伸，它使任一多项式方程式都有根。复数当中有个“虚数单位”i，它是 -1 的一个平方根，即 $\mathrm{i}^2=-1$。任一复数都可表达为

$$z=a+\mathrm{i}b=a+b\mathrm{i} \tag{1.1}$$

式中，a、b 为实数；i 为虚数单位 ($\mathrm{i}^2=-1$)，a、$\mathrm{i}b$ 分别为复数 z 的实部和虚部。在解析几何中，很容易将复数与二维平面内的点建立一一对应关系，即复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 与平面上坐标为 (a,b) 的点一一对应。复数的极坐标表达式为

$$z=a+\mathrm{i}b=\rho e^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.2}$$

式中，$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$；$\theta=\arctan\dfrac{b}{a}$。

若 $b=0$，则 $z=a$ 是实数，因此实数集是复数集的子集，若 $a=0$，则 $z=\mathrm{i}b$ 是纯虚数。因此，实数的维度是 1，复数的维度是 2，而本书重点讨论的四元数维度则是 4。两个复数相等的条件是它们的实部和虚部对应相等，即

$$a+\mathrm{i}b=c+\mathrm{i}d \tag{1.3}$$

成立的条件是：

$$a=c \quad \text{and} \quad b=d \tag{1.4}$$

1.1.1 复数的加法和乘法

给定两个复数 $z_1=a+\mathrm{i}b$ 和 $z_2=c+\mathrm{i}d$，相加得到的和 z 为

$$z=z_1+z_2=(a+\mathrm{i}b)+(c+\mathrm{i}d)=(a+c)+\mathrm{i}(b+d) \tag{1.5}$$

即复数的加法结果是实部与实部的和、虚部与虚部的和。而 z_1 和 z_2 的乘积为

$$z=z_1\times z_2=(a+\mathrm{i}b)\times(c+\mathrm{i}d)=(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc) \tag{1.6}$$

在研究复数、矢量和四元数的时候，经常把实数称为“标量”，实际上标量是虚部为 0 的复数。以上式为基础，可以得到标量与复数的乘积，即在 (1.6) 式中，令 $b=0$:

$$z=(a)\times(c+\mathrm{i}d)=(ac)+\mathrm{i}(ad) \tag{1.7}$$

在上面几个计算公式里，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，因此 $a+c,b+d,ac,ad,ac-bd,ad+bc\in\mathbf{R}$，即复数的和及积也都是复数，其运算在复数空间是封闭的。另外，由于实部的加法满足交换定律，复数的和可表示为

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(a+\mathrm{i}b)+(c+d)=(a+c)+\mathrm{i}(b+d)\\&=(c+a)+\mathrm{i}(d+b)=(c+\mathrm{i}d)+(a+\mathrm{i}b)\\&=z_2+z_1\end{aligned} \tag{1.8}$$

因此，复数的加法满足交换律。

复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的负数为 $(-a)+\mathrm{i}(-b)$，这是因为：

$$(a+\mathrm{i}b)+[(-a)+\mathrm{i}(-b)]=[a+(-a)]+\mathrm{i}[b+(-b)]=0 \tag{1.9}$$

利用复数乘法的运算法则，可得到复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的倒数或逆 z^{-1}:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+\mathrm{i}b}=\frac{1\cdot(a-\mathrm{i}b)}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)}=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2} \tag{1.10}$$

下面验证复数的加法和乘法是否满足结合律。给定三个复数：

$$z_1=a_1+\mathrm{i}b_1,z_2=a_2+\mathrm{i}b_2,z_3=a_3+\mathrm{i}b_3 \tag{1.11}$$

由于:

$$\begin{aligned}z_1(z_2+z_3)&=(a_1+\mathrm{i}b_1)[(a_2+\mathrm{i}b_2)+(a_3+\mathrm{i}b_3)]\\&=a_1[(a_2+\mathrm{i}b_2)+(a_3+\mathrm{i}b_3)]+\mathrm{i}b_1[(a_2+\mathrm{i}b_2)+(a_3+\mathrm{i}b_3)]\\&=a_1(a_2+\mathrm{i}b_2)+ib_1(a_2+\mathrm{i}b_2)+a_1(a_3+\mathrm{i}b_3)+\mathrm{i}b_1(a_3+\mathrm{i}b_3)\\&=(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)+(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_3+\mathrm{i}b_3)\\&=z_1z_2+z_1z_3\end{aligned} \tag{1.12}$$

因此，复数的运算满足结合律。

1.1.2 复数的减法和除法

两个复数 $z_1=a+\mathrm{i}b$、$z_2=c+\mathrm{i}d$ 的减法定义为一个复数 z_1 与另一个复数 z_2 的负数 $-z_2$ 相加，即

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=a+\mathrm{i}b+[(-c)+\mathrm{i}(-d)]=(a-c)+\mathrm{i}(b-d) \tag{1.13}$$

而复数 $z_1=a+\mathrm{i}b$、$z_2=c+\mathrm{i}d$ 的除法定义为一个复数 z_1 与另一个复数 z_2 的倒数 z_2^{-1} 相乘：

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1} \tag{1.14}$$

将 (1.10) 式带入上式：

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = (a+\mathrm{i}b)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \mathrm{i}\frac{d}{c^2+d^2}\right) \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \mathrm{i}\frac{bc-ad}{c^2+d^2}
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

1.1.3 复数的共轭

复数 $z = a + \mathrm{i}b$ 的共轭表达式为

$$
z^* = a - \mathrm{i}b \tag{1.16}
$$

利用复数的加减乘除等运算法则，可得到共轭复数的如下性质：

$$
\begin{aligned}
z + z^* &= 2a \\
zz^* &= a^2 + b^2 \\
(z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^* \\
(z_1 z_2)^* &= z_1^* z_2^*
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

复数的模为 $\|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$，因此：

$$
\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} = \sqrt{zz^*} \tag{1.18}
$$

对于两个复数 z_1 和 z_2，$\|z_1 z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$。

利用 (1.17) 式可得

$$
\begin{aligned}
\|z_1 z_2\|^2 &= (z_1 z_2)(z_1 z_2)^* = z_1 z_2 z_1^* z_2^* \\
&= z_1 z_2^* z_2 z_2^* = \|z_1\|^2 \|z_2\|^2
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

因此，$\|z_1 z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$。

1.2 行 列 式

行列式是数学中的一个函数，即将一个 $n \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 映射到一个标量，记作 $\det(\boldsymbol{A})$ 或 $|\boldsymbol{A}|$。行列式可以看做是有向面积或体积的概念在一般欧几里得空间中的推广。或者说，在 n 维欧几里得空间中，行列式描述的是一个线性变换对“体积”所造成的影响。无论是在线性代数、多项式理论，还是在微积分学中 (如换元积分法中)，行列式作为基本的数学工具，都有着重要的应用。行列式概念最早出现在解线性方程组的过程中。17 世纪晚期，在关孝和与莱布尼茨的著作中已经使用行列式来确定线性方程组解的个数及形式 (吴文俊，1995)。18 世纪开始，行列式开始作为独立的数学概念被研究，19 世纪以后，行列式理论进一步得到发展和完善，矩阵概念的引入使得更多有关行列式的性质被发现，行列式在许多领域都逐渐显现出重要的意义和作用，出现了线性自同态和向量组的行列式的定义。行列式的特性可以被概括为一个交替多线性形式，这个本质使得行列式在欧几里得空间中可以成为描述“体积”的函数 (项武义，1981，2004)。

1.2.1 竖直线记法

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式有时也记作 $|\boldsymbol{A}|$。绝对值和矩阵范数也使用这个记法，有可能和行列式的记法混淆。不过矩阵范数通常以双垂直线来表示 (如 $\|\cdot\|$)，且可以使用下标。此外，矩阵的绝对值是没有定义的。因此，行列式经常使用垂直线记法 (如克莱姆法则和子式)。例如，对于一个矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ 也写作 $|\boldsymbol{A}|$，或明确的写作：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \tag{1.21}$$

即把矩阵的方括号以细长的垂直线取代。

1.2.2 直观定义

一个 n 阶方块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式可直观地定义如下：

$$\det(\boldsymbol{A})=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)} \tag{1.22}$$

式中，S_n 为集合 $1,2,\cdots,n$ 上置换的全体，即集合 $1,2,\cdots,n$ 到自身上的一一映射 (双射) 的全体；$\sum\limits_{\sigma\in S_n}$ 为对 S_n 全部元素的求和，即对于每个 $\sigma\in s_n$，$\operatorname{sgn}(\sigma)\prod\limits_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$ 在加法算式中出现一次；对每一个满足 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 的数对 (i,j)，$a_{i,j}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素；$\operatorname{sgn}(\sigma)$ 为置换 $\sigma\in S_n$ 的符号差，具体地说，满足 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 但 $\sigma(i)>\sigma(j)$ 的有序数对 (i,j) 称为 σ 的一个逆序。如果 σ 的逆序共有偶数个，则 $\operatorname{sgn}(\sigma)=1$，如果共有奇数个，则 $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$。

举例来说，对于三元置换 $\sigma=(2,3,1)$，即 $\sigma(1)=2$，$\sigma(2)=3$，$\sigma(3)=1$ 而言，由于 1 在 2 后，1 在 3 后，所以共有 2 个逆序 (偶数个)，因此 $\operatorname{sgn}(\sigma)=1$，从而 3 阶行列式中项 $a_{1,2},a_{2,3},a_{3,1}$ 的符号是正的。但对于三元置换 $\sigma=(3,2,1)$，即 $\sigma(1)=3$，$\sigma(2)=2$，$\sigma(3)=1$) 而言，可以数出共有 3 个逆序 (奇数个)，因此 $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$，从而 3 阶行列式中项 $a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$ 的符号是负号。

注意到对于任意正整数 n，S_n 共拥有 $n!$ 个元素，因此上式中共有 $n!$ 个求和项，即这是一个有限多次的求和。

对于简单的 2 阶和 3 阶的矩阵，行列式的表达式相对简单，而且恰好是每条主对角线 (左上至右下) 元素乘积之和减去每条副对角线 (右上至左下) 元素乘积之和。

2 阶矩阵的行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}=a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1} \tag{1.23}$$

3 阶矩阵的行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \tag{1.24}$$

但对于阶数 $n \geqslant 4$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$，这样的主对角线和副对角线分别只有 n 条，由于 $\boldsymbol{A}$ 的主、副对角线总条数是 $2n$，少于集合 S_n 的元素数量 $n! = (n-1)n$，因此，行列式的相加项中除了这样的对角线乘积之外，还有其他更多的项。例如，4 阶行列式中，项 $a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}a_{4,4}$ 就不是任何对角线的元素乘积。不过，和 2、3 阶行列式情况相同的是，n 阶行列式中的每一项仍然是从矩阵中选取 n 个元素相乘得到，且保证在每行和每列中都恰好只选取一个元素，而整个行列式恰好将所有这样的选取方法遍历一次。另外，$n \times n$ 矩阵的每一行或每一列也可以看成是一个 n 元向量，这时矩阵的行列式也被称为这 n 个 n 元向量组成的向量组的行列式。

1.2.3 几何意义

行列式的一个自然的源起是 n 维平行体的体积。行列式的定义和 n 维平行体的体积有着本质上的关联。

1. 二维向量组的行列式

在一个二维平面上，两个向量 $\boldsymbol{X} = (a, c)$ 和 $\boldsymbol{X}' = (b, d)$ 的行列式是

$$\det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1.25}$$

比如说，两个向量 $\boldsymbol{X} = (2, 1)$ 和 $\boldsymbol{X}' = (3, 4)$ 的行列式是

$$\det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5 \tag{1.26}$$

经计算可知，当行列式内各个元素都是实数时，行列式表示的是向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}'$ 形成的平行四边形的有向面积，如图 1.1 所示。进一步可得如下关系式：

(1) 行列式为零的条件是当且仅当两个向量共线 (线性相关)，这时平行四边形退化成一条直线。

(2) 如果以逆时针方向为正向的话，有向面积的意义是：平行四边形面积为正当且仅当以原点为不动点将 $\boldsymbol{X}$ 逆时针“转到”$\boldsymbol{X}'$ 处时，扫过的地方在平行四边形里，否则的话面积就是负的。如图 1.1 中，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{X}'$ 所构成的平行四边形的面积就是正的。

(3) 行列式是一个双线性映射。也就是说：

$$\det(\lambda\boldsymbol{X} + \mu\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}') = \lambda\det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') + \mu\det(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}') \tag{1.27}$$

并且

$$\det(\boldsymbol{X}, \lambda\boldsymbol{X}' + \mu\boldsymbol{Y}') = \lambda\det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') + \mu\det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}') \tag{1.28}$$

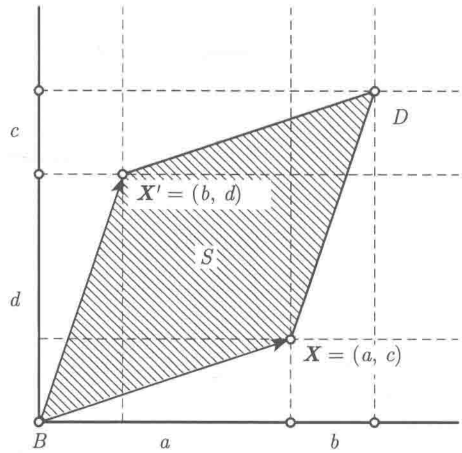


图 1.1　2 维向量行列式表示的面积

其几何意义是：以同一个向量 $\boldsymbol{v}$ 作为一条边的两个平行四边形的面积之和，等于它们各自另一边的向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 加起来后的向量：$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'$ 和 $\boldsymbol{v}$ 所构成的平行四边形的面积，如图 1.2 所示。

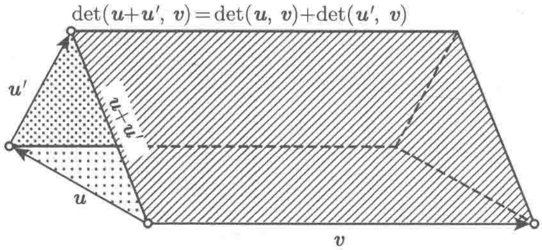


图 1.2　行列式的双线性映射

2. 三维向量组的行列式

在三维的有向空间中，三个三维向量的行列式是

$$\det(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X}'')=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$
$$=xy'z''+x'y''z+x''yz'-xy''z'-x'yz''-x''y'z. \tag{1.29}$$

比如说，三个向量 $(2,1,5)$、$(6,0,8)$ 和 $(3,2,4)$ 的行列式是

$$\det(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X}'')=\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$
$$=2\cdot0\cdot4+6\cdot2\cdot5+3\cdot1\cdot8-2\cdot2\cdot8-6\cdot1\cdot4-3\cdot0\cdot5$$
$$=28 \tag{1.30}$$

当系数是实数时，行列式表示 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{X}'$ 和 $\boldsymbol{X}''$ 三个向量形成的平行六面体的有向体积，也叫做这三个向量的混合积。同样的，三维向量组的行列式有如下性质：

(1) 行列式为零的条件是当且仅当三个向量共线或者共面 (三者线性相关)，这时平行六面体退化为平面图形，体积为零。

(2) 三维空间中有向体积的定义要比二维空间中复杂，一般是根据右手定则来约定，如图 1.3 中 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 所形成的平行六面体的体积是正的，而 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ 所形成的平行六面体的体积是负的。这个定义和行列式的计算并不矛盾，因为行列式中向量的坐标都是在坐标系确定后才决定的，而坐标系的三个方向一般也是按照右手规则来设定的。

(3) 这时行列式是一个“三线性映射”，也就是说，对第一个向量有 $\det(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X}'')=a\det(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X}'')+b\det(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X}'')$，对第二、第三个向量也是如此。其几何意义和二维时基本相同，是指当生成两个平行六面体的每组三个向量中如果有两个是重合的，如 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 和 $(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$，那么它们的体积之总和等于将 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 加起来后的向量 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'$ 和 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 所形成的平行六面体的体积，如图 1.3 所示。

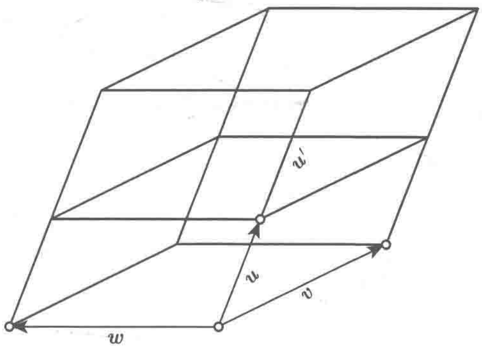


图 1.3　两个相邻平行六面体的体积之和

3. 基底的选择

在以上的行列式中，我们不加选择地将向量在所谓的正交基 (即直角坐标系) 下分解，实际上在不同的基底之下，行列式的值并不相同。这并不是说平行六面体的体积不唯一。恰恰相反，这说明体积的概念依赖于衡量空间的尺度，也就是基底的取法。用基底的变换可以看作线性映射对基底的作用，而不同基底下的行列式代表了基变换对“体积”的影响。可以证明，对于所有同定向的标准正交基，向量组的行列式的值在绝对值意义上是一样的。也就是说，如果我们选择的基底都是“单位长度”，并且两两正交，那么在这样的基之下，平行六面体体积的绝对值是唯一的。

4. 线性变换

设 E 是一个一般的 n 维的有向欧几里得空间。一个线性变换把一个向量线性地变为另一个向量。比如说，在三维空间中，向量 (x,y,z) 被映射到向量 (x',y',z')：

$$\begin{aligned} x' &= a_1x+b_1y+c_1z \\ y' &= a_2x+b_2y+c_2z \\ z' &= a_3x+b_3y+c_3z \end{aligned} \tag{1.31}$$

式中，$a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3)$ 为系数。如图 1.4 所示，正方体 (可以看作原来的一组基形成的) 经线性变换后可以变成一个普通的平行六面体，或变成一个平行四边形 (没有体积)。这两种情况表示了两种不同的线性变换，行列式可以将其很好地分辨出来 (为零或不为零)。

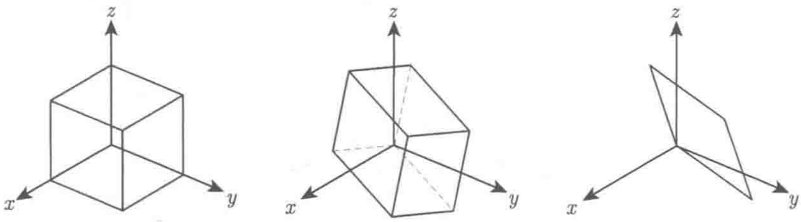


图 1.4　线性映射后的正方体

更详细地说，行列式表示的是线性变换前后平行六面体的体积的变化系数。如果设左边的正方体体积为 1，那么中间的平行六面体的 (有向) 体积就是线性变换的行列式的值，右边的平行四边形体积为 0，因为线性变换的行列式为 0。这里我们混淆了线性变换的行列式和向量组的行列式，但两者是一样的，因为我们在对一组基作线性变换。

1.2.4　行列式的性质

行列式的一些基本性质，可以由它的多线性以及交替性推出。

(1) 在行列式中，一行 (列) 元素全为 0，则此行列式的值为 0。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.32}$$

(2) 在行列式中，某一行 (列) 有公因子 k，则可以提出。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD_1 \tag{1.33}$$

(3) 在行列式中，某一行 (列) 的每个元素是两数之和，则此行列式可拆分为两个相加的行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.34}$$

(4) 行列式中的两行 (列) 互换，改变行列式正负符号。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \tag{1.35}$$

(5) 在行列式中，有两行 (列) 对应成比例或相同，则此行列式的值为 0。

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & 3 \\ 2 & 4 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.36}$$

(6) 将一行 (列) 的 k 倍加进另一行 (列) 里，行列式的值不变。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \tag{1.37}$$

注意: 一行 (列) 的 k 倍加上另一行 (列)，行列式的值改变。

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ ka_{j1}+a_{i1} & ka_{j2}+a_{i2} & & ka_{jn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \tag{1.38}$$

(7) 将行列式的行列互换，行列式的值不变，其中行列互换相当于转置。这个性质可以简单地记作

$$D = |a_{ij}| = |a_{ji}| = D^{\mathrm{T}} \tag{1.39}$$

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.40}$$

(8) 行列式的乘法定理: 方块矩阵的乘积的行列式等于行列式的乘积，即

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) \tag{1.41}$$

特别的，若将矩阵中的每一行每一列上的数都乘以一个常数 r，那么所得到的行列式不是原来的 r 倍，而是 r^n 倍，即 $\det(r\boldsymbol{A}) = \det(r\boldsymbol{I}_n \cdot \boldsymbol{A}) = \det(r\boldsymbol{I}_n)\cdot\det(\boldsymbol{A}) = r^n\det(\boldsymbol{A})$。

以上的乘法公式还可以进一步推广为柯西 - 比内公式 (Cauchy-Binet formula)，从而使得只要两个矩阵的乘积是方块矩阵，就有类似于以上的结果: 假设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m \times n$ 矩

阵，而 $\boldsymbol{B}$ 是一个 $n\times m$ 矩阵。如果 S 是 $\{1,\cdots,n\}$ 中具有 m 个元素的子集 $\{S_1,\cdots,S_m\}$，我们记 $\boldsymbol{A}_S$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中列指标位于 S 中的 $m\times m$ 子矩阵。类似地，记 $\boldsymbol{B}_S$ 为 $\boldsymbol{B}$ 中行指标位于 S 中的 $m\times m$ 子矩阵。那么 $\det(\boldsymbol{AB})=\sum_S \det(\boldsymbol{A}_S)\det(\boldsymbol{B}_S)$，这里求遍 $\{1,\cdots,n\}$ 中 m 个元素的所有可能子集 S[共有 $C(n,m)$ 个]。如果 $m=n$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同样大小的方块矩阵，则只有一个容许集合 S，柯西 - 比内公式退化为通常行列式的乘法公式。如果 $m=1$ 则有 n 个容许集合 S，这个公式退化为点积。如果 $m>n$，没有容许集合 S，约定行列式 $\det(\boldsymbol{AB})$ 是零。

(9) 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，$\det(\boldsymbol{A}^{-1})=[\det(\boldsymbol{A})]^{-1}$。

(10) 由行列式的乘法定理以及 $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=[\det(\boldsymbol{A})]^{-1}$ 可以知道，行列式定义了一个从一般线性群 $[GL_n(\mathbb{F}),\times]$ 到 $(\mathbb{F}^*,\times)$ 上的群同态。

(11) 若将方块矩阵中的元素取共轭，得到的是矩阵的共轭矩阵。共轭矩阵的行列式值等于矩阵行列式值的共轭：$\det(\overline{\boldsymbol{A}})=\overline{\det(\boldsymbol{A})}$。

(12) 若两个矩阵相似，那么它们的行列式相同。这是因为两个相似的矩阵之间只相差一个基底变换，而行列式描述的是矩阵对应的线性映射对体积的影响，而不是体积，所以基底变换并不会影响行列式的值。用数学语言来说，就是：如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，那么存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，所以 $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{PBP}^{-1})=\det(\boldsymbol{P})\cdot\det(\boldsymbol{B})\cdot\det(\boldsymbol{P}^{-1})=\det(\boldsymbol{B})\cdot\det(\boldsymbol{P})\cdot\det(\boldsymbol{P})^{-1}=\det(\boldsymbol{B})$。

(13) 行列式是所有特征值 (按代数重数计) 的乘积。这可由矩阵必和其若尔当标准型相似推导出。特殊地，三角矩阵的行列式等于其对角线上所有元素的乘积。

(14) 由于三角矩阵的行列式计算简便，当矩阵的系数为域时，可以通过高斯消去法将矩阵变换成三角矩阵，或者将矩阵分解成三角矩阵的乘积之后再利用行列式的乘法定理进行计算。可以证明，所有的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以分解成一个上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$、一个下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$，以及一个置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的乘积：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{U}$。这时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式可以写成：$\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{P})\cdot\det(\boldsymbol{L})\cdot\det(\boldsymbol{U})$。

(15) 块矩阵的行列式并不能简单地表示成每个分块的行列式的乘积组合。对于分块的三角矩阵，仍然有类似的结论：

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ 0 & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{D}) \tag{1.42}$$

矩阵的行列式等于对角元素的行列式之乘积。对于一般情况，若对角元素中有一个是可逆矩阵，如说 $\boldsymbol{A}$ 可逆，那么矩阵的行列式可以写做

$$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}) \tag{1.43}$$

(16) 矩阵的行列式和矩阵的迹数有一定的关联，当矩阵的系数为域时，在定义了矩阵的指数函数后，有如下的恒等式：$\det[\exp(\boldsymbol{A})]=\exp[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})]$。

1.3 矩　　阵

在数学中，矩阵 (matrix) 是一个按照长方阵列排列的复数或实数集合 (张贤达，2004)，