学府考研
中国最严格考研辅导品牌

理工社®

2018 考研数学复习指导全书

◎主编 张同斌
◎策划 考研数学命题研究组

数学二

《复习指导全书》+《基础通关经典1000题》+《强化夺冠经典600题》完美搭配

25载辅导经验 30年执教积淀

11 个考试要求 把控最新复习方向
252 个大纲考点 了解宏观知识体系
415 道精编例题 归纳多种解题方法
182 道同步训练 检测同期复习效果

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

学府考研

中国优秀高端教育品牌

理工社®

2018

考研数学

复习指导全书

（数学二）

主编　张同斌

策划　考研数学命题研究组

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有　侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习指导全书．数学二／张同斌主编．—北京：北京理工大学出版社，2016.9
ISBN 978-7-5682-2435-2

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第131570号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京市通县华龙印刷厂
开　　本／787毫米×1092毫米　1/16
印　　张／28.5
字　　数／657千字
版　　次／2016年9月第1版　2016年9月第1次印刷
定　　价／56.80元

责任编辑／王玲玲
文案编辑／王玲玲
责任校对／周瑞红
责任印制／边心超

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

Preface

前言

为了帮助有志攻读硕士研究生的考生在较短的时间内准确把握考试大纲的要求，把知识织成片、连成网，理解基本概念、基本理论、掌握基本方法，全面提高分析与解决问题的能力，编者根据多年评阅试卷和25年考研辅导班授课经验以及30年高校执教阅历的沉淀，巧妙梳理，精心编写了本书.

本书每一章按以下几部分编排：

考试要求 是最新考研数学大纲对该部分考试内容的考试要求，也是命题的依据，使考生在复习时能够掌控方向，把握重点.

知识网络 从整体的角度考量考试大纲对这部分内容的要求，使单个的知识点形成知识体系，考生能够根据知识网络在较短的时间内了解需要掌握的知识与方法，领会其内在联系.

知识点归纳 系统阐述了考试大纲中要求的基本概念、基本理论、基本方法.既保证了知识的完整性和延续性，又着重突出了考试中的重点和易混淆的内容，以帮助考生深刻理解、融会贯通.

常考题型与例题解析 是本书的特色之一.归纳总结了考研数学的命题规律，将常考知识点按题型进行归类，针对每种题型，精心编排例题，详细给出考点分析，并进行解题方法、技巧的归纳与总结，开拓考生的视野，达到触类旁通、举一反三的效果.

同步训练与同步训练参考答案 是为考生检测复习效果专门设计的.只有通过难度和“口味”与考研真题相仿的好题的训练才能起到夯实基础、提高分析与解决问题能力的作用.这些题目的选题完全基于最新考试大纲并融入近年来命题规律，有些题目是编者根据30年的教学积累以及25年考研辅导班授课经验有针对性地编制而成，具有较好的前瞻性与预测性.

我们相信，致力于巩固数学基础、建立知识网络、展示命题规律、直面仿真训练，完全基于考试大纲规定内容的复习特点而编写的2018年《考研数学复习指导全书》必将在市场竞争中掀起新热潮，使考生在较短时间内得到全面有效的复习，提高应试水平，达到事半功倍的效果.

在本书的编写过程中，编者参考了许多著作与教材，谨向有关作者表示衷心感谢！

限于作者水平，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请读者和同行批评指正.

编　者

2016年3月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

Contents

目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第一篇　高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试要求

(1)理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.

(2)了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(3)理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

(4)掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

(5)理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

(6)掌握极限的性质及四则运算法则.

(7)掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(8)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

(9)理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

(10)了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

知识网络

- 函数 极限 连续
  - 函数
    - 函数的定义及定义域
    - 函数的类型(基本初等函数,初等函数,非初等函数)
    - 函数的特性(有界性、单调性、奇偶性、周期性)
  - 极限
    - 极限的概念
      - 数列极限的定义
      - 函数极限
        - 当 $x\to\infty$ 时函数的极限
        - 当 $x\to x_0$ 时函数的极限(左、右极限)
    - 极限的性质[唯一性,(局部)有界性,(局部)保号性]
    - 极限的计算方法
      - 基本方法(极限的四则运算法则,连续函数在连续点的极限,分段函数在分段点的极限)
      - 利用两个重要极限求极限
      - 利用洛必达法则求未定式的极限
      - 利用等价无穷小替换求极限
      - 极限的存在准则:夹逼定理,单调有界数列必收敛
      - 利用导数定义求极限
      - 利用定积分求和式极限
      - 利用麦克劳林公式求极限
      - 无穷小量
        - 无穷小量的定义及四则运算
        - 无穷小量与无穷大量之间的关系
        - 无穷小量的比较
        - 等价无穷小替换定理
  - 连续
    - 函数在某点连续的定义(连续函数的定义)
    - 初等函数的连续性,分段函数在分段点的连续性
    - 间断点的分类
      - 第一类间断点
        - 可去间断点
        - 跳跃间断点
      - 第二类间断点
        - 无穷间断点
        - 振荡间断点
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 最大最小值定理
      - 有界定理
      - 介值定理及其推论
      - 零点定理

知识点归纳

一、函数

1.函数的定义

设有两个变量 x 和 y,如果对于非空实数集合 D 中的每一个 x,按照一定规则,都有一个确定的 y 与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记为 $y=f(x)$.其中 x 为自变量,y 为因变量,D 称为函数的定义域,并把实数集 $\mathbf{Z}=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域.

2.常见形式的函数

(1)分段函数

如果在不同的自变量变化范围内,函数有着不同的表达形式,这类函数称为分段函数.常见的分段函数有

(Ⅰ)绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

说明 $y=|x|$在 $x=0$ 点连续,但不可导;

$y=x|x|$在 $x=0$ 点可导,从而连续.

(Ⅱ)符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

$|x|=\operatorname{sgn}(x)x.$

(Ⅲ)取整函数 $y=[x]$,即$[x]$是不超过 x 的最大整数.

说明 ①一般的分段函数的形式为

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>x_0,\\ a, & x=x_0,\\ \psi(x), & x<x_0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\neq x_0,\\ a, & x=x_0.\end{cases}$$

由于 $f(x)$在分段点 x_0 的左、右两侧函数表达式不同,因此研究分段函数 $f(x)$在分段点 x_0 处的极限、连续性、可导性等问题时,应分别用左、右极限,左、右连续,左、右导数去讨论.而 $g(x)$在点 x_0 的左、右两侧表达式相同,研究其在分段点 x_0 处的极限、连续性、可导性时,只需用极限、导数定义讨论即可.

②命题中,还经常出现如下形式的分段函数:

$$f(x)=\max\{\varphi(x),\psi(x)\}=\frac{\varphi(x)+\psi(x)+|\varphi(x)-\psi(x)|}{2}=\begin{cases}\varphi(x), & \varphi(x)\geqslant\psi(x),\\ \psi(x), & \varphi(x)<\psi(x),\end{cases}$$

$$g(x)=\min\{\varphi(x),\psi(x)\}=\frac{\varphi(x)+\psi(x)-|\varphi(x)-\psi(x)|}{2}=\begin{cases}\psi(x), & \varphi(x)\geqslant\psi(x),\\ \varphi(x), & \varphi(x)<\psi(x).\end{cases}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

③分段函数在其定义域上是一个函数,而不是两个或多个函数.

(2)反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 $\mathbf{Z}$,如果对于 $\mathbf{Z}$ 中任意一个 y,从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 与之对应,则称变量 x 为变量 y 的函数.记为 $x=\varphi(y)$,$\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

说明①$y=f(x)$ 的图形与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图形重合;$y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

②只有一一对应的函数才有反函数;显然,单调函数一定有反函数.

③反函数的定义域是原函数的值域.

④$f^{-1}[f(x)]=f[f^{-1}(x)]=x$.

(3)复合函数

该函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 U_2,如果 $U_2\subseteq U_1$,则 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义在 D 上的复合函数.其中 x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

说明给定一个复合函数,要写出其复合过程,每一过程都必须是基本初等函数,这一点对复合函数的求导运算非常重要.

(4)幂指函数

形如 $y=[f(x)]^{g(x)}(f(x)>0)$ 形式的函数称为幂指函数.

说明①幂指函数往往出现在求函数极限的函数表达式中,或求幂指函数的导数(微分),运算时往往考虑其下面变化:

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}.$$

②常见的函数还有

(Ⅰ)二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的一元隐函数 $y=y(x)$.

(Ⅱ)参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ 所确定的函数 $y=f(x)$.

(Ⅲ)积分上限函数 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

这些将在以后的学习中逐步展开.

3.函数的类型

(1)基本初等函数

我们把 $\begin{cases}\text{幂函数 } y=x^{\mu}(\mu \text{ 为常数});\\ \text{指数函数 } y=a^x(a>0,a\neq1),y=e^x;\\ \text{对数函数 } y=\log_a x(a>0,a\neq1),y=\ln x;\\ \text{三角函数 } y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x;\\ \text{反三角函数 } y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x\end{cases}$

统称为基本初等函数.

(2)初等函数

由常数与基本初等函数经过有限次的四则运算与有限次的复合构成的并且只能由一个式子表示的函数称为初等函数.

说明 ①初等函数在其有定义的区间上是连续的.

②初等函数是高等数学的主要研究对象,分段函数(一般不是初等函数)是高等数学的另一个重要研究对象.

4.函数的特性

(1)函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在正数 M,使得对任意 $x\in X$,恒有

$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界;

$f(x)\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界;

$f(x)\geqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界;

如果对任意正数 $M>0$,存在 $x_0\in X$,使 $|f(x_0)|>M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

说明 ① $f(x)$ 在 X 上有界 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

②如果 $f(x)$ 在 X 上仅有上界或仅有下界,则 $f(x)$ 在 X 上未必有界.

③常用的几个有界函数需要考生记住.

$|\sin x|\leqslant 1,\quad |\cos x|\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty)$;

$|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}, |\arccos x|\leqslant\pi, x\in[-1,1]$;

$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}, |\operatorname{arccot} x|<\pi, x\in(-\infty,+\infty)$.

(2)函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$.如果对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调增加的;

$f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是不严格单调增加的(单调不减);

$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是严格单调减少的;

$f(x)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是不严格单调减少的(单调不增).

单调增加与单调减少函数统称为单调函数,使函数单调的区间称为单调区间.

说明 $f(x)$ 在区间 I 上是单调函数的等价定义:对任意 $x_1,x_2\in I, x_1\neq x_2$,

$f(x)$ 在区间 I 是严格单调增函数 $\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$;

$f(x)$ 在区间 I 是不严格单调增函数 $\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant 0$;

$f(x)$ 在区间 I 是严格单调减函数 $\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$;

$f(x)$在区间 I 是不严格单调减函数$\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant 0$,

这些等价定义在证明某些积分不等式时有着重要作用.

(3)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,如果对任意 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x)\quad (f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$为偶(奇)函数.

说明 ①偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

②任意一个函数 $f(x)$都可以表示成一个偶函数与奇函数之和(差).即

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}-\frac{f(-x)-f(x)}{2},$$

其中 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数,

$\psi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}\left(\psi(x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}\right)$是奇函数.

③偶(奇)函数的导函数是奇(偶)函数.

④奇函数 $f(x)$的所有原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 是偶函数;偶函数 $f(x)$的所有原函数中只有一个 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数,其中 $f(x)$是连续函数.

⑤如果 $f(x)$在区间$[-a,a]$上连续,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当 } f(x) \text{ 是偶函数时},\\ 0, & \text{当 } f(x) \text{ 是奇函数时}.\end{cases}$$

(4)函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个正数 l,使得对任意 $x\in D(x\pm l\in D)$,有 $f(x+l)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,l 称为 $f(x)$的周期.

说明 ①周期函数的导函数仍然是周期函数,且周期不变.

②周期函数的原函数未必是周期函数.如 $f(x)=\cos x+1$ 是周期为 2π 的周期函数,但 $f(x)$的原函数 $F(x)=\sin x+x+C$ 不是周期函数.

③如果 $f(x)$是周期为 l 的连续函数,则对任意常数 a,有

$$\int_a^{a+l} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

二、极限的概念与性质

1.极限的概念与性质

(1)数列极限的定义

定义 1　(描述性定义)对于数列$\{x_n\}$,当$n\to\infty$时,如果x_n无限接近于某一常数a,则称a是数列$\{x_n\}$的极限,或称数列$\{x_n\}$收敛于a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(\text{当 } n\to\infty).$$

定义 2　("$\varepsilon-N$"定义)设$\{x_n\}$为一数列,如果存在常数a,$\forall\varepsilon>0$(不论它多么小),存在整数$N>0$,当$n>N$时,$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立,则称a是数列$\{x_n\}$的极限,或称数列$\{x_n\}$收敛于a,记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(\text{当 } n\to\infty).$$

否则称数列$\{x_n\}$是发散的.

说明 ①如果数列$\{x_n\}$收敛于a,则它的任意一个子数列都收敛,且极限也为a.

② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$.

(2)自变量$x\to\infty$时函数极限的定义

定义 1　(描述性定义)设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义.当$x\to\infty$时,如果$f(x)$无限接近于某一常数A,则称A是函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty).$$

定义 2　("$\varepsilon-X$"定义)设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义.如果存在常数A,$\forall\varepsilon>0$(不论它多么小),$\exists X>0$,当$|x|>X$时,对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称A是函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to\infty).$$

说明 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

(3)自变量$x\to x_0$时函数极限的定义

定义 1　(描述性定义)设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义.当$x\to x_0$时,如果$f(x)$无限接近于某一常数A,则称A是函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

定义 2　("$\varepsilon-\delta$"定义)设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义.如果存在常数A,$\forall\varepsilon>0$(不论它多么小),$\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,对应的函数值$f(x)$都满足$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称A是函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

说明 ①类似地,可定义左极限与右极限:

当 $x\to x_0^-$ 时，如果 $f(x)$ 无限接近于某一常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A$$

当 $x\to x_0^+$ 时，如果 $f(x)$ 无限接近于某一常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A.$$

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

(4)极限的性质

下列性质对数列极限与函数极限都成立.

(Ⅰ)(存在唯一性)设 $\lim f(x)=A$，$\lim f(x)=B$，则 $A=B$.

(Ⅱ)设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$.

如果 $A>B$，则在 x 变化到一定范围时，$f(x)>g(x)$；

如果当 x 变化到一定范围时，$f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

说明 当 $g(x)\equiv 0$，$B=0$ 时，(Ⅱ)结论即为极限的局部保号性.

(Ⅲ)如果 $\lim f(x)=A$，则存在 $M>0$，当 x 变化到一定范围时，$|f(x)|\leqslant M$，即 $f(x)$ 是有界的.反之不真，如 $x_n=(-1)^n$ 是有界数列，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

2.极限的运算法则

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$.

3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

4) $\lim f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.

说明 ①如果 $A=0$，$B=0$，则由(1)(2)得两个无穷小的和、差、积仍然是无穷小.

②如果 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 一定不存在；

如果 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 都不存在，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 可能存在，也可能不存在；

如果 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 存在，则 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都存在或都不存在.

3.无穷小量与无穷大量

(1)无穷小量的定义

如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量，简称无穷小.

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小量.

(2)无穷大量的定义

如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量,简称无穷大,记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

说明 无穷大(量)一定是无界变量,但无界变量未必是无穷大(量).如 $f(x)=x\sin x$,当 $x\to+\infty$ 时是无界变量,但不是无穷大(量).

(3)无穷小的运算性质

(Ⅰ)有限个无穷小的和仍然是无穷小.

(Ⅱ)有限个无穷小的乘积仍然是无穷小.

(Ⅲ)无穷小与有界变量的乘积仍然是无穷小.即如果 $\lim f(x)=0$,$\exists M>0$,在 x 的某一变化范围内 $|g(x)|\leqslant M$,则 $\lim f(x)g(x)=0$.

说明 无穷大与有界变量的乘积未必是无穷大.如 $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x^2}$,当 $x\to\infty$ 时,x^2 为无穷大,$\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right|\leqslant 1$,但 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}=1$.

(4)无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,

(Ⅰ)如果 $\lim f(x)=\infty$,则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$;

(Ⅱ)如果 $\lim f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$,则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

(5)无穷小与极限的关系

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\alpha(x)=0$.

(6)无穷小的比较

设在自变量的同一变化过程中,$\lim\alpha=0$,$\lim\beta=0$,且 $\alpha\neq 0$.

(Ⅰ)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记为 $\beta=o(\alpha)$;

(Ⅱ)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

(Ⅲ)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$,则称 β 与 α 是同阶无穷小;

(Ⅳ)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c(c\neq 0,k>0)$,则称 β 是 α 的 k 阶无穷小;

(Ⅴ)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.

说明 等价无穷小是一种等价关系,它具有:

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com