中学最新教材

精解精析100例丛书

高二数学

沈阳出版社

数学

（代数）

高中二年级

《中学最新教材精解精析100例》丛书

数　学

（代数）

高中二年级

沈阳出版社

1993年·沈阳

（辽）新登字 12 号

《中、小学最新教材精解精析 100 例》丛书

主　编　潘　琪

《中学最新教材精解精析 100 例》高中数学编委会

主　　编　彭声应
副 主 编　丁善勇　崔句甲
本册编写者　彭声应　史本贵
　　　　　　姚伟章　任　林

《中学最新教材精解精析 100 例》丛书

数　学

高二代数

责任编辑：智　君　　封面设计：君　华
责任校对：周友荣　　版式设计：华　云

沈 阳 出 版 社 出 版
（沈阳市和平区 13 纬路 19 号）
新华书店首都发行所发行
辽宁省委机关印刷装订厂印刷

开 本：787×1092 毫米 1/32　　1993 年 4 月第 1 版
印 张：7.5　　1993 年 4 月第 1 次印刷
字 数：170 千字

ISBN 7—80556—983—5/G・253

全套定价：152.10 元　　单册定价：3.90 元

编 者 的 话

为了帮助中、小学生更加灵活、系统地掌握基础知识和基本技能，我们组织一批具有丰富教学经验的特级、高级教师以及年富力强的优秀教师和教研人员，编了这套《中、小学最新教材精解精析100例》丛书。本套丛书具有以下主要特色：

1. 严格以教学大纲和最新教材为依据，切合教学实际。与课堂学习无关的本书不予讨论。

2. 以教材结构为顺序划分单元。既考虑知识的覆盖面，又注意突出重、难点；既强调基础知识和基本技能的训练，又重视综合能力和灵活运用能力的培养；既可随教学进度渐进安排，又可供考前复习使用。

3. 力求以精编减少学生负担，以高质量有效地提高学生的学习水平，从而赢得广大学生的信赖。这是本套丛书编写的目标，也是本丛书最重要的特色和精华所在。

围绕着上述目标，编者广泛征求优秀教师和学生的意见，并审读和分析了历年来多种学生辅导读物的优劣，博取众家之长，摒弃粗制滥造，进行了精心的构思和设计：

全书各单元分“解题指导”和“能力训练”两部分，其中“解题指导”大体上由例题、分析、解答、指导四部分组成。

①例题：针对教学知识点、重难点选择例题，命题新颖、典型、规范，学好本书，可基本掌握课本知识。

②分析：重在明晰解题思路，指出解题关键，分析精当、透彻。

③解答：注意科学性、严密性，不仅无知识性错误，而且表达规范，符合各种正规考试的要求。

④指导：上面“分析”与“解答”均就题论题，重在“举一”；指导建立在“分析”、“解答”基础之上，予以知识点发散和拓宽，重在“反三”，故称之为“举一反三”。学生由此不仅理解、掌握例题所述内容，而且进一步掌握这一类题的解题思路、方法、规律、技巧，并能适应题目灵活变化，从而使学生真正从题海中解放出来，以少胜多，提高解题水平。

“能力训练”部分和该单元知识密切联系，题目构思精当、灵活、科学，题型多样化、标准化。以利进一步消化和巩固所学知识。

“能力训练”和“综合训练”均给出参考答案或提示。

本丛书除强调科学性、新颖性、高效性之外，还特别注重实用性。既保证对课堂教学方便实用，又注重方便学生自学、自测，还有利于家长督学、辅导。

本丛书的编写过程中，编者配合极为协调，大家群策群力，共同苦战，一心推出一套优秀的教学辅导丛书，为提高教学质量尽职尽责尽力，实为佳话。同时，也得到有关专家、同行及多方面朋友的鼎力而助，提出许多宝贵意见，不一一赘述。谨此，深表诚挚的感谢。

由于时间和水平的限制，本丛书难免有不足及疏漏之处，诚请广大读者批评、正。

1992 年 12 月

目录

高中代数(下册)

第五单元

不 等 式

一 解 题 指 导

例 1 求证：(1)$a<b<0, c<0\Rightarrow\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$；

(2)$a<b<0, c<d<0\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.

分析 根据不等式的性质，只有同向不等式才能相加、相乘；异向不等式才能相减、相除. 在进行不等式的相乘、相除时，要注意两数都为正的条件.

证明

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}(1)\,a<b<0\Rightarrow a-b<0\\ c<0\end{array}\right\}\Rightarrow c(a-b)>0\Rightarrow ac>bc\\ \qquad\qquad\qquad a<0,b<0\Rightarrow ab>0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{c}{b}>\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{a}<\frac{c}{b}.$$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\,a<b<0\Rightarrow -a>-b>0\\ \quad c<d<0\Rightarrow -c>-d>0\Rightarrow 0<-d<-c\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\frac{-a}{-d}>\frac{-b}{-c}>0\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$$

指导 在应用不等式的性质证明不等式时必须特别注意性质的特征及其成立的条件，其中有些是充要条件，例如性质 1，$a>b\Leftrightarrow b<a$；有些则是充分条件而不是必要条件，例如，$a>b, c>$

$d \Rightarrow a+c>b+d$，而 $a+c>b+d \Rightarrow a>b, c>d$，则不一定成立，等等．因此，对于性质必须透彻理解，并牢牢记住，另外，同号相乘、相除为正，异号相乘、相除为负，正数大于零，负数小于零，正数大于负数等等．实数的性质，都可与不等式的基本性质一同作为公理用于不等式的证明．

例 2　在实数范围内，回答下列问题：

(1)若 $a>b$，是否一定有 $ac^2>bc^2$？

(2)若 $ac>bc$，是否一定有 $a>b$？

(3)若 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$，是否一定有 $a>b$？

(4)若 $a>b, ab\neq 0$，是否一定有 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$？

(5)若 $a>b, c>d$，能否断定有 $a-c>b-d$？

(6)若 $a>b, c<d, cd\neq 0$，是否能断定有 $\frac{a}{c}>\frac{d}{b}$？

分析　对于 这类问题，主要是看条件是否充分来判断命题的真伪．如果命题为真，则要根据不等式的性质加以严格的证明；如果命题为假，则举一反例即可．

解答　(1)不一定．若 $c\neq 0$，则 $c^2>0$，由不等式的性质有 $ac^2>bc^2$；若 $c=0$，则有 $ac^2=bc^2=0$．

(2)不一定．若 $c>0$，则 $a>b$；若 $c<0$，则 $a<b$．

(3)一定有 $a>b$．

$$\left.\begin{array}{l} c\neq 0 \Rightarrow c^2>0, \\ \frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}. \end{array}\right\} \Rightarrow a>b$$

(4)　不一定．因为 $ab\neq 0$，则有 $ab>0$ 或 $ab<0$．

若 $\left.\begin{array}{l} ab>0 \\ a>b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，

若$\left.\begin{matrix}ab<0\\ a>b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{b}<\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

(5)不能断定.例如,

若 $a=3,b=1,c=2,d=0$ 时,$a-c=b-d$;又若 $a=3,b=1,c=2,d=-1$ 时,有 $a-c<b-d$

(6)不能.例如,若 $a=2,b=1,c=-2,d=1$ 时,则有$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

指导 1.任何一个不等式的两边同乘以零就成为等式了,这一点是很容易忽略的.

2.不等式两边同乘(或同除)以一个数要注意这个数的符号.当乘(或除)以一个正数时,不等号不变向;当乘(或除)以一个负数时,不等号改向.

3.两个不等式相加、相乘时,一定要看清是否为同向不等式,其结果应与原不等式同向;两个不等式相减、相除时,一定要看清是否为异向不等式,其结果应与被减(或被除)不等式同向的不等式.

4.两个不等式相乘、相除、不等式两边乘方、开方时,不等式中的数都应为正数.总之,要紧紧抓住不等式性质的特征及其成立的条件,切不可用特殊代替一般,随意自造性质.

例 3 设 a、$b\in R^{+}$,$a\neq b$,求证$(a^4+b^4)(a^2+b^2)>(a^3+b^3)^2$.

分析 这个不等式的两边的最高次幂都是 a^6、b^6,可以相消,消去最项后,次数降低,而且项数减少了,可考虑用比较法.

证明 $(a^4+b^4)(a^2+b^2)-(a^3+b^3)^2$

$$=a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6-a^6-2a^3b^3-b^6$$

$=a^4b^2-2a^3b^3+a^2b^4$

$=a^2b^2(a^2-2ab+b^2)$

$=a^2b^2(a-b)^2$

$\because a、b\in R^+$，且 $a\neq b$

$\therefore a^2>0, b^2>0, (a-b)^2>0$

$\therefore (a^4+b^4)(a^2+b^2)-(a^3+b^3)^2>0$

$\therefore (a^4+b^4)(a^2+b^2)>(a^3+b^3)^2$

指导 1. 比较法是证明不等式的重要方法，其依据是 $a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$ 和 $a-b\geqslant 0\Leftrightarrow a\geqslant b$ 等等. 或 $a>0, b>0$，$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$；$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；$\frac{a}{b}\geqslant 1\Leftrightarrow a\geqslant b$；$\frac{a}{b}\leqslant 1\Leftrightarrow a\leqslant b$ 等等：

2. 用比较法证明不等式：作差、分解因式（或化为绝对不等式）、判断几个步骤，或作商与“1”进行比较.

例 4 (1)已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1$；

(2)已知 $x_1、x_2、x_3\in R^+$，求证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\geqslant\frac{9}{x_1+x_2+x_3}$

分析 (1)待证不等式的左边的各项为 $a_i x_i$ 的形式，右边为 1，而已知有 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 故可对“1”进行代换.

证明 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n-1$

$=\frac{1}{2}[2a_1x_1+2a_2x_2+\cdots+2a_nx_n-2]$

$=-\frac{1}{2}[2-2a_1x_1-2a_2x_2-\cdots-2a_nx_n]$

$=-\frac{1}{2}[a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-2a_1x_1-2a_2x_2-\cdots$

$$-2a_nx_n+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2]$$

$$=-\frac{1}{2}[(a_1^2-2a_1x_1+x_1^2)+(a_2^2-2a_2x_2+x_2^2)+\cdots+(a_n^2-2a_nx_n+x_n^2)]$$

$$=-\frac{1}{2}[(a_1-x_1)^2+(a_2-x_2)^2+\cdots\cdots+(a_n-x_n)^2]\leqslant 0$$

$$\therefore a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant 1$$

指导 当差式不能立即判断其正、负号而又不能直接分解为几个因式的积时，可考虑配方，即把作差后所得的式子配成一个平方式或几个平方式之和，使之变为绝对不等式. 最常见的绝对不等式有$(a-b)^2\geqslant 0$，当且仅当$a=b$时成立等号.

分析 (2)因为x_1、x_2、$x_3\in R^+$，所以$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}>0$，$\frac{9}{x_1+x_2+x_3}>0$，用基本不等式直接证明，有一定的困难，考虑用商比较来进行证明.

证明 $\because x_1$、x_2、$x_3\in R^+$，故$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}>0$，$\frac{9}{x_1+x_2+x_3}>0$，

作商：

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}}{\frac{9}{x_1+x_2+x_3}}=\frac{x_1+x_2+x_3}{9}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}+1+\frac{x_3}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_3}+1\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left[\left(\frac{x_2}{x_1}-\frac{x_3}{x_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{x_1}-\frac{x_1}{x_3}\right)^2+\left(\frac{x_3}{x_2}-\frac{x_2}{x_3}\right)^2+9\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{9}\times 9=1,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\geqslant\frac{9}{x_1+x_2+x_3}.$$

指导 作差比较，是把差变形的结果与零比较；作商比较，是把商变形的结果与1比较.一般地，作差是容易掌握的；作商时注意加以比较的两个数应为正数，否则同学们容易出错.

例5 求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$

分析 这个不等式左边各项都是两个数的平方和的算术平方根，且 a、b、c 相轮换，而右边为 $a+b+c$ 与 $\sqrt{2}$ 的积，故可考虑用平均值公式.

证明 $\because a^2+b^2\geqslant 2ab$

$\therefore 2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$\therefore \sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}|a+b|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ ……………… ①

同理：$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c)$ ……………………………… ②

$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(c+a)$ ……………………………… ③

①+②+③得

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+b+c+c+a)$$

$$\therefore \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

指导 1.本例是运用基本不等式和配方相结合的方法，巧妙的得出要证的结果.如果在每项的根号下面应用基本不等式，则将无法进行下去.

2.这里用了 $|a+b|\geqslant a+b$，事实上，当 $a+b\geqslant 0$ 时，$|a+b|=a+b$；当 $a+b<0$ 时，$|a+b|>0>a+b$，所以 $|a+b|\geqslant a+b$.

例 6 已知 a、b、c 是不全相等的正数，且 $a+b+c=1$。求证：

(1) $ab+bc+ca\leqslant\frac{1}{3}$；

(2) $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})>64$.

分析 (1)不等式左边各项可分别利用基本不等式，然后再进行配方，使之变为 $(a+b+c)^2$，再利用已知条件 $a+b+c=1$.

证明 $\because 2ab\leqslant a^2+b^2$ ……………………………… ①

$2bc\leqslant b^2+c^2$ ……………………………… ②

$2ca\leqslant c^2+a^2$ ……………………………… ③

由于 a、b、c 为不全相等的正数，故上述三个不等式中，至少有一个不能取等号，故①+②+③得

$$2(ab+bc+ca)<2(a^2+b^2+c^2),$$

$$\therefore ab+bc+ca<a^2+b^2+c^2,$$

$$3(ab+bc+ca)<a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$=(a+b+c)^2=1,$$

$\therefore ab+bc+ca<\frac{1}{3}$.

分析 (2)由已知 $a+b+c=1$，则左边的 1 可考虑用 $a+b+c$ 代换，$1+\frac{1}{a}=\frac{a+a+b+c}{a}$，$1+\frac{1}{b}=\frac{b+a+b+c}{b}$，$1+\frac{1}{c}=\frac{c+a+b+c}{c}$，再对每个因式的分子连续运用基本不等式 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，x、$y\in R^+$.

证明 $\because a$、b、c 为不全相等的正数，且 $a+b+c=1$，故

$$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})$$
$$=\frac{a+a+b+c}{a}\cdot\frac{b+a+b+c}{b}\cdot\frac{c+a+b+c}{c},$$

又 a、b、$c\in R^{+}$，所以

$$a+a+b+c>2\sqrt{a^2}+2\sqrt{bc}$$

$$>2\cdot 2\sqrt{\sqrt{a^2}\sqrt{bc}}=4\sqrt[4]{a^2bc};$$

同理：$b+a+b+c>4\sqrt[4]{ab^2c}$；

$$c+a+b+c>4\sqrt[4]{abc^2}$$

$$\therefore (1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})$$

$$>\frac{4\sqrt[4]{a^2bc}\cdot 4\sqrt[4]{ab^2c}\cdot 4\sqrt[4]{abc^2}}{abc}=64,$$

故原不等式成立.

指导 在用综合证法证明不等式的过程中，不仅要会套用基本不等式，而且也要对不同的题目的特点，善于凑用基本不等式，还要会逆用和变用基本不等式，这样才能熟练掌握，运用自如. 另外，对一些基本不等式的变形和一些重要不等式也要注意记忆和活用，例如 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2$；$ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$ 等等. 但切不可生搬硬套，或随意编造.

例 7 (1)设 α_1、α_2、β_1、β_2 是实数，求证：

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\leqslant\sqrt{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2}\cdot\sqrt{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2};$$

(2)若 $a>0$，$b>0$，$2c>a+b$，证明：

$$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$$

分析 (1)、(2)两题用比较法或综合法证明较难下手，可考虑采用分析法.

解答 (1)若 $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\leqslant 0$，不等式 $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\leqslant\sqrt{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2}\cdot\sqrt{\beta_1{}^2+\beta_2{}^2}$ 显然成立

若 $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2>0$，要证 $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\leqslant\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\cdot\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}$ 成立，

只需证明 $(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2\leqslant(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)$，

即 $2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\leqslant\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2$，

也就是要证 $(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2\geqslant0$.

因为 α_1、α_2、β_1、β_2 是实数，上述不等式恒成立，以上每步可逆，所以原不等式得证.

(2)要证 $c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$，

只需证明 $-\sqrt{c^2-ab}<a-c<\sqrt{c^2-ab}$，

即证 $|a-c|<\sqrt{c^2-ab}$，

也就是 $(a-c)^2<c^2-ab$ ………………………………………… ①

化简上式：$a(a+b)<2ac$.

$\because a>0$，$a+b<2c$，

$\therefore$ 不等式①是成立的，以上每步可逆，所以原不等式得证.

指导 在用分析法证题时，一般要用"要证…只需证…""等价于…""充要条件为…"等等的语言叙述，也可用符号"$\Leftrightarrow$"或"$\Leftarrow$"表示，一定保证不等式的证明每步可逆，以防止犯把证明原命题变为证明它的逆命题的错误.

例8 已知 $a\geqslant3$，求证：

$\sqrt{a+3}-\sqrt{2a}\geqslant\sqrt{a-3}-\sqrt{2a-6}$

分析 从已知条件 $a\geqslant3$ 可以看出，原不等式的两边均为非正值，通过移项使两边均为正值，然后，运用分析法，先两边平方，消去根号，最终证得本题.

解答 $\sqrt{a+3}-\sqrt{2a}\geqslant\sqrt{a-3}-\sqrt{2a-6}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a+3}+\sqrt{2a-6}\geqslant\sqrt{a-3}+\sqrt{2a}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{a+3}+\sqrt{2a-6})^2\geqslant(\sqrt{a-3}+\sqrt{2a})^2$$

$$\Leftrightarrow 3a-3+2\sqrt{(a+3)(2a-6)}\geqslant 3a-3+2\sqrt{2a(a-3)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2-9}\geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{a^2-3a}$$

$$\Leftrightarrow a\geqslant 3.$$

由已知 $a\geqslant 3$，所以原不等式得证.

指导 解这道题如果忘记了分析法要求每步可逆，在假定原不等式成立后，即两端平方，然后接着做下去必会得出荒谬的结果，因为这第一步“两端平方”就是不可逆的（由 $a^2<b^2$，推不出 $a<b$），从这一点可以看出；我们在运用分析法时，一定要注意每步的可逆性！

例 9 求证：$\dfrac{|a^2-b^2|}{2|a|}\geqslant\dfrac{|a|}{2}-\dfrac{|b|}{2}$

分析 不等式的左边的分子 $|a^2-b^2|=|a-b||a+b|$，而分母 $2|a|=|(a-b)+(a+b)|$，因而可以利用绝对值不等式的性质，使分子分母相靠近.

证明 当 $|a|\leqslant|b|$ 时不等式显然成立，这是因为：当 $|a|<|b|$ 时，右边为负数，而左边为正数，“$>$”号成立，当 $|a|=|b|$，左、右两边都是零，故“$=$”号成立.

当 $|a|>|b|$ 时，由绝对值不等式的性质：$|x|+|y|\geqslant|x\pm y|\geqslant|x|-|y|$ 得 $\dfrac{1}{|x|+|y|}\leqslant\dfrac{1}{|x\pm y|}\leqslant\dfrac{1}{|x|-|y|}\quad(|x|>|y|)$，

$$\therefore\frac{|a^2-b^2|}{2|a|}=\frac{|a+b|\cdot|a-b|}{|(a+b)+(a-b)|}$$

$$\geqslant\frac{|a+b|\cdot|a-b|}{|a+b|+|a-b|}=\frac{1}{\dfrac{1}{|a-b|}+\dfrac{1}{|a+b|}}$$

$$\geqslant \frac{1}{\frac{1}{|a|-|b|}+\frac{1}{|a|-|b|}}=\frac{1}{\frac{2}{|a|-|b|}}$$

$$=\frac{|a|-|b|}{2}=\frac{|a|}{2}-\frac{|b|}{2},$$

故$\frac{|a^2-b^2|}{2|a|}\geqslant\frac{|a|}{2}-\frac{|b|}{2}$成立.

指导 1. 对于一个要证的不等式，如果两个字母(或式子)之间大小关系不定，而对其中的某一种(或二种)情况容易证明(或直接能判定)其成立，则可分不同情况逐个讨论，使得证明过程简化.

2. 要分清绝对不等式与绝对值不等式，它们是两个不同的概念，不可混为一谈.

例 10 设 a、b、c 都是小于 1 的正数，求证：三个数$(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 中必有一个不大于$\frac{1}{4}$.

分析 “三个数中必有一个不大于$\frac{1}{4}$”包含的情形有一个数不大于$\frac{1}{4}$，两个数不大于$\frac{1}{4}$，三个数不大于$\frac{1}{4}$，比较复杂；而它的对立的一面是“三个数都大于$\frac{1}{4}$”，仅此一种情形，由此，我们排除“三个数都大于$\frac{1}{4}$”，用反证法.

证明 假设三数都大于$\frac{1}{4}$，即

$$(1-a)b>\frac{1}{4},(1-b)c>\frac{1}{4},(1-c)a>\frac{1}{4}.$$

$\because a$、b、c 都是小于 1 的正数

$\therefore \sqrt{(1-a)b}>\frac{1}{2},\sqrt{(1-b)c}>\frac{1}{2},\sqrt{(1-c)a}>\frac{1}{2}.$