21世纪高等学校教材

孙家乐 许品芳 编著

经济数学方法

JINGJI SHUXUE FANGFA

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

经济数学方法

孙家乐　许品芳　编　著

东南大学出版社

内容提要

本书共两篇，其中第1篇为概率统计，内容包括预备知识——排列与组合、随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基本知识等；第2篇为线性代数，内容包括线性方程组与行列式、n维向量与矩阵、矩阵的运算、线性方程组、逆矩阵、矩阵的运用、投入产出分析、线性规划初步等．每章之后附有习题，书末附有答案．

本书可作为高等学校经管类本科专业及专科专业教材，也可供教师及工程技术人员、管理决策者参考．

图书在版编目(CIP)数据

经济数学方法/孙家乐，许品芳编著．—南京：东南大学出版社，2003.1

ISBN 7-81089-130-8

Ⅰ．经…　Ⅱ．①孙…②许…　Ⅲ．经济数学—高等学校—教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第086392号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼2号　邮编210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销　华东有色地研所印刷厂印刷
开本：700mm×1000mm　1/16　印张：20.5　字数：402千字
2003年4月第1版　2003年4月第1次印刷
印数：1—3000　定价：28.00元

前　言

时至今日，数学几乎已渗透到所有的自然科学与社会科学领域，从而对数学的掌握已成为人们在工作与生活中不可或缺的素质。特别是经济类、管理类学科，已经大量采用近代数学的概念、理论与方法。本教材所介绍的“概率论”与“线性代数”则是被用得最多的数学分支，所以成为经管类大学生必修的数学课程。

根据国家教育部对有关专业的要求，结合经管类同学的特点，本教材从实用出发，力求用形象、通俗的语言，深入浅出地介绍有关知识，为进一步学习和应用数学打下良好基础。

本教材的概率统计部分由许品芳编写，线性代数部分由孙家乐编写，配有充足的习题，并在书后附有答案。

限于编者水平与时间仓促，书中谬误与疏漏在所难免，请广大读者不吝指正。

编　者

于三江学院

2002 年 8 月

目　录

第1篇　概率统计

第2篇　线性代数

第1篇　概率统计

预备知识 —— 排列与组合

0.1　两个基本原理

1. 加法原理

如果要完成某项任务有 n 类办法，而第 $k(k = 1,2,\cdots,n)$ 类办法中又有 m_k 种方法，而且所有方法中没有两个是相同的. 只要选择一类办法中的一种方法就可以完成这项任务，那么完成该项任务共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

例如：从南京到上海可以乘火车、汽车、轮船或飞机. 每天火车有 38 班，汽车有 127 班，轮船有 3 班，飞机有 1 班，则每天共有

$$N = 38 + 127 + 3 + 1 = 169$$

种不同的走法.

2. 乘法原理

如果完成某项任务必须经过 n 个步骤，而完成第 $k(k = 1,2,\cdots,n)$ 个步骤又有 m_k 种方法，那么完成该项任务共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$$

种不同的方法.

例如：王先生有 5 件衬衣，4 件羊毛衫，3 套西装，则有

$$N = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

种搭配穿法.

0.2　排列 —— 与次序有关

1. 不允许重复的排列：选排列与全排列

定义 1　从 n 个不同元素中任取 $r(0 < r \leqslant n)$ 个不同元素，按照一定顺序排

成一列，称为从 n 个元素中取 r 个的**排列**. 这种排列的总数记作 P_n^r(或${}_nP_r$ 或A_n^r 或$P(n,r)$).

当$1 \leqslant r < n$时称为**选排列**;当 $r = n$ 时称为**全排列**.

P_n^r 的计算公式

从 n 个不同的元素中任取一个元素放在第一个位置上,共有 n 种取法,从余下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上,共有 $n-1$ 种取法 …… 最后,从剩下的 $n-(r-1)=n-r+1$ 个元素中任取一个放在第 r 个位置上共有 $n-r+1$ 种取法,于是由乘法原理,排列总数

$$P_n^r = n(n-1)\cdot \cdots \cdot(n-r+1) \tag{0.1}$$

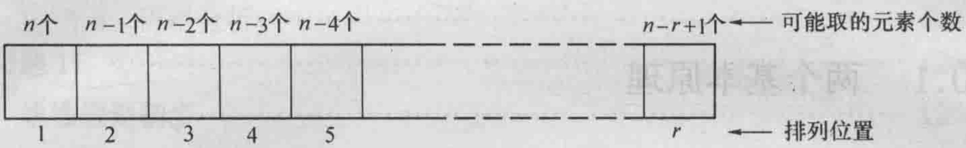

图 0.1

利用阶乘符号 $n! = n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$,式(0.1) 可以表示成

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{0.2}$$

特别有全排列公式

$$P_n^n = n! \tag{0.3}$$

注意,当 $r=0$ 时,$P_n^0 = \dfrac{n!}{n!} = 1$,表示从 n 个元素中不取元素进行排列,为了使公式完备,把这种情况理解为广义的排列.

例 0.1 从全班 40 人中选出 3 人分别担任班长、学习委员、文体委员,共有

$$P_{40}^3 = 40 \times 39 \times 38 = 59\,280$$

种选法.

例 0.2 (1) 有 15 本不同的书,10 个人去借,每人只能借一本,问有多少种不同的借法?

(2) 有 10 本不同的书,15 个人去借,每人最多借一本,每次把书都借完,问有多少种借法?

解 (1) 设想 10 个借书人排成一列,问题变成从 15 本不同的书(元素)中任取 10 本分给 10 个借书人,从而有

$$P_{15}^{10} = \frac{15!}{(15-10)!} = \frac{15!}{5!} = 10\,897\,286\,400$$

种借法.

(2) 设想10本书排成一列,15人借10本书,必有5人借不到,这相当于从15人

(元素)中任选 10 人依次去取书,从而仍有

$$P_{15}^{10} = \frac{15!}{5!} = 10\,897\,286\,400$$

种借法.

例 0.3　在 3 000 与 8 000 之间,有多少个没有重复数字的奇数?

解　3 000 到 8 000 之间的数,千位上只能是 3、4、5、6、7 五个数;作为奇数个位只能是 1、3、5、7、9 五个数;而个位与千位不能重复,注意到可能重复的是 3、5、7 三个数,所以可以分成两类:

一类是千位数是 4 或 6,个位是 1、3、5、7、9 中之一,其余八个数字中任取两个放在百位、十位上,所以共有

$$2 \times 5 \times P_8^2 = 10 \times 8 \times 7 = 560(个)$$

另一类是千位是 3 或 5 或 7,个位是 1、3、5、7、9 中除去千位已取过后余下 4 个中的一个,而十位、百位仍在余下的八个数字中任取,所以共有

$$3 \times 4 \times P_8^2 = 12 \times 8 \times 7 = 672(个)$$

根据加法原理,总共有

$$560 + 672 = 1\,232(个)$$

2. 允许重复的排列

定义 2　从 n 个不同元素中任取 r 个(允许重复取)排成一列,称为从 n 个元素中允许重复取 r 个的排列,其总数记作 U_n^r.

注意到每次均有 n 个元素可选取,所以有公式

$$U_n^r = n^r \tag{0.4}$$

例 0.4　南京市电话号码是 7 位数,问南京市电话局共能容纳多少用户(一个号码算一个用户)?如果电话号码的首位不能为 0 与 1,问南京市电话局可容纳多少用户?

解　因为每位数都有 10 个可能数字,所以共有用户

$$U_{10}^7 = 10^7 = 10\,000\,000(个)$$

若首位除去 0 与 1,还有 8 种可能,余下 6 位,每位有 10 种可能,所以共有用户

$$P_8^1 \cdot U_{10}^6 = 8\,000\,000(个)$$

0.3　组合 —— 与次序无关

定义 3　从 n 个不同元素中任取 $r(r \leqslant n)$个不同的元素,不管次序,算作一组. 称为从 n 个元素中取 r 个的**组合**. 这种组合的总数记作 C_n^r.

组合与排列的区别在于,组合中各元素没有先后次序(位置)之分,而排列中各元素与先后次序(位置)相联系.

我们也可以把选排列分解成下面两个步骤来完成.

第一步，从 n 个不同元素中任取 r 个不同元素组成一组（这是一个组合）；第二步，将这一组 r 个元素进行排列（这是一个全排列）. 从而有

$$P_n^r = C_n^r \cdot P_r^r$$

由此得组合公式

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{P_r^r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{0.5}$$

例 0.5 四国女排超霸赛，每两个队赛一场，问共赛几场？

解 $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = 6$（场）

例 0.6 从 5 位男生 4 位女生中抽出 4 人组成一个小组，要求其中至少有 2 名男生，至少有 1 名女生，问有多少种组织法？

解 只有两种可能：2 男 2 女或 3 男 1 女 . 2 男 2 女有 $C_5^2 \cdot C_4^2$ 种组织法 . 3 男 1 女有 $C_5^3 \cdot C_4^1$ 种组织法 . 由加法原理，共有组织法

$$\begin{aligned} N &= C_5^2 \cdot C_4^2 + C_5^3 \cdot C_4^1 \\ &= \frac{5\times4}{2\times1}\cdot\frac{4\times3}{2\times1} + \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\cdot 4 \\ &= 60 + 40 = 100\text{（种）} \end{aligned}$$

例 0.7 100 件产品中有 10 件次品，从中抽取 5 件，问：(1) 全是正品有多少种取法？ (2) 有 2 件次品有多少种取法？

解 100 件产品中有 10 件次品，还有 90 件是正品（这是隐性条件），现抽取 5 件.

(1) 全是正品，自然是从 90 件正品中取的，所以有取法

$$C_{90}^5 = 43\,949\,268\text{（种）}$$

(2) 2 件次品取自 10 件次品，另 3 件正品取自 90 件正品（隐性要求），所以有取法

$$C_{10}^2 \times C_{90}^3 = 5\,286\,600\text{（种）}$$

例 0.8 一口袋中有 5 只白球，3 只黑球，任取 2 只球，求满足下列条件的各有多少种取法：(1) 取得 2 只白球；(2) 取得 2 只黑球；(3) 取得一只白球一只黑球.

解 (1) 有 $C_5^2 = 10$ 种取法；

(2) 有 $C_3^2 = 3$ 种取法；

(3) 有 $C_5^1 \cdot C_3^1 = 15$ 种取法.

习　题

1. 一条铁路线上有 12 个车站，问需准备多少种不同的车票？若不同两站间的票价不同，那么有多少种不同的票价？

2. 用 0 到 9 这十个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

3．一排 10 个座位，有 5 人就坐，有多少种坐法？

4．10 个球队参加篮球循环赛，一共要比多少场？

5．某施工队有 8 名老工人，5 名新工人，现要派三名工人去完成一项工作，要求其中至少包含一名老工人，问一共有多少种派法？

6．在 100 件产品中有 8 件次品，任取 10 件，其中恰有 2 件次品，问有多少种不同的取法？

7．有 100 件产品，其中有 2 件次品，任取 3 件，问：(1) 一共有多少种不同的取法？(2) 恰有一件次品，共有多少种取法？(3) 至少有一件次品共有多少种取法？

8．某人有百元、伍拾元、贰拾元、拾元、伍元、贰元、壹元、伍角、贰角、壹角人民币各一张，问用这些人民币能够付多少种不同的款项？

9．把 3 封不同的信投入 4 个有编号的信箱，有多少种不同的投法？

10．只有 0、1、2 三个数码，可以编制多少个 4 位商品号码？

11．有 10 把钥匙，其中有 3 把能打开门，问任取两把能打开门，有多少种取法？

1　随机事件与概率

1.1　引言

1.1.1　概率统计的研究对象

在客观世界中,包括自然界与人类社会中有许多现象在事前无法预测其结果,即所谓的不确定现象.如

1. 抛一枚硬币,是出现国徽还是出现币值;
2. 掷一颗骰子,出现几点;
3. 从一副扑克牌中任意抽取一张,是否是红桃 K;
4. 买一张彩票,会不会中奖;
5. 打靶,能否打中目标 .

这些都是事前无法绝对确定的.

凡是在一定条件下可能发生,也可能不发生的现象,称为偶然现象,或称为随机现象.而在一定条件下必然发生或必然不发生的现象叫做必然现象.

在中学所学的知识几乎都是必然现象.如物理定律:在标准大气压下水在100℃ 时沸腾;上抛一块石子,必定落回地面;又如数学定理:圆面积必定是 πr^2,三角形内角和必定是 180°.

人类首先研究必然现象,得出许多必然规律,称之为知识,创立了许多科学.但随机现象也客观存在,有时还不得不研究它.如赌徒要研究赌博之规律;军事家要研究兵器的有效率(即命中率);公交公司要研究各条线路上客流规律,以决定投放多少车辆;彩民也在探讨中奖的机会.人们在大量的重复实践与观察中发现:

随机现象在一次、二次实践中结果是不确定的,但当大量重复实践时却会出现某种规律性,即有相对的稳定性.例如:

1. 当抛硬币次数很多时,出现国徽与币值的次数几乎是相等的(见表 1.1);

表 1.1　抛币试验

试验者	抛掷次数 n	币值朝上次数 μ	频率 $k=\mu/n$
蒲　丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(K.Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(K.Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

2．买彩票大多数人是不会中奖的，但总有少数会中奖，甚至中大奖；

3．公交线上何时人多，何时人少，在非节假日是相对稳定的；

4．一只空容器内每个空气分子的运动方向速度大小都是随机的，但从宏观上看，气体对容器壁的压力却是稳定的．

大量实践表明，在偶然性中隐藏着必然性．

概率统计就是研究大量随机现象中的统计规律性的科学．

1.1.2　概率统计的发展简史

概率统计最早出现在 17 世纪中叶，开始时出现在赌博之中，接着用于产品检验与社会保险．18 ~ 19 世纪应用于人口统计、误差理论、气象预报、地震预报、炮兵射击理论．20 世纪进而扩大应用于生产过程的最佳控制、电子元件的可靠性分析、农业试验、军事科学、公用事业和社会科学的调查统计．因此，概率统计是应用十分广泛的一个数学分支．

本篇内容只介绍概率统计的一些入门知识，为今后学习经济学、市场预测、经营决策及全面质量管理等打下必备基础．

1.2　随机事件

1.2.1　随机事件

1．随机试验

观察某事物在一定条件下发生什么现象，出现什么结果的过程，称为**试验**．例如：

试验 E_1：抛硬币，观察出现国徽或币值的情况；

试验 E_2：掷骰子，观察出现的点数；

试验 E_3：抽扑克牌，观察其花色与点数；

试验 E_4：在一批灯泡中任抽 1 只，测试其寿命；

试验 E_5：商店每周盘点，统计营业额；

试验 E_6：记录某寻呼台 1 分钟接到呼唤的次数；

试验 E_7：统计某个考题在各班的得分率；

试验 E_8：打靶，记录每一枪的环数．

这些试验具有下列共同性：

(1) 可重复性：在相同的条件下可重复进行；

(2) 结果的确定性：每次试验的结果有多种可能性，而且在事先就明确所有可能的结果；

(3) 随机性：在每次试验前，不能准确地预言将出现哪一个结果．