



21 世纪高等学校教材

孙家乐 许品芳 编著

# 经济数学方法

JINGJI SHUXUE FANGFA

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS



97/98

# 经济数学方法

F224.0

4

孙家乐 许品芳 编 著

东南大学出版社

## 内 容 提 要

本书共两篇,其中第1篇为概率统计,内容包括预备知识——排列与组合、随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基本知识等;第2篇为线性代数,内容包括线性方程组与行列式、 $n$ 维向量与矩阵、矩阵的运算、线性方程组、逆矩阵、矩阵的运用、投入产出分析、线性规划初步等。每章之后附有习题,书末附有答案。

本书可作为高等学校经管类本科专业及专科专业教材,也可供教师及工程技术人员、管理决策者参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

经济数学方法 / 孙家乐, 许品芳编著. — 南京: 东南大学出版社, 2003.1

ISBN 7-81089-130-8

I. 经... II. ①孙...②许... III. 经济数学—高等学校—教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 086392 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人: 宋增民

江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷

开本: 700mm×1000mm 1/16 印张: 20.5 字数: 402 千字

2003 年 4 月第 1 版 2003 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—3000 定价: 28.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换。电话:025-3795802)

# 前 言

时至今日,数学几乎已渗透到所有的自然科学与社会科学领域,从而对数学的掌握已成为人们在工作与生活中不可或缺的素质。特别是经济类、管理类学科,已经大量采用近代数学的概念、理论与方法。本教材所介绍的“概率论”与“线性代数”则是被用得最多的数学分支,所以成为经管类大学生必修的数学课程。

根据国家教育部对有关专业的要求,结合经管类同学的特点,本教材从实用出发,力求用形象、通俗的语言,深入浅出地介绍有关知识,为进一步学习和应用数学打下良好基础。

本教材的概率统计部分由许品芳编写,线性代数部分由孙家乐编写,配有充足的习题,并在书后附有答案。

限于编者水平与时间仓促,书中谬误与疏漏在所难免,请广大读者不吝指正。

编 者

于三江学院

2002年8月

# 目 录

## 第 1 篇 概率统计

|                           |      |
|---------------------------|------|
| 预备知识——排列与组合 .....         | (1)  |
| 0.1 两个基本原理 .....          | (1)  |
| 0.2 排列——与次序有关 .....       | (1)  |
| 0.3 组合——与次序无关 .....       | (3)  |
| 习题 .....                  | (4)  |
| 1 随机事件与概率 .....           | (6)  |
| 1.1 引言 .....              | (6)  |
| 1.1.1 概率统计的研究对象 .....     | (6)  |
| 1.1.2 概率统计的发展简史 .....     | (7)  |
| 1.2 随机事件 .....            | (7)  |
| 1.2.1 随机事件 .....          | (7)  |
| 1.2.2 样本空间 .....          | (8)  |
| 1.2.3 事件之间的关系与运算 .....    | (9)  |
| 1.3 概率 .....              | (10) |
| 1.3.1 概率的统计定义 .....       | (11) |
| 1.3.2 概率的古典定义——古典概型 ..... | (12) |
| 1.3.3 概率的加法公式 .....       | (14) |
| 1.4 条件概率与概率的基本公式 .....    | (16) |
| 1.4.1 条件概率 .....          | (16) |
| 1.4.2 乘法公式 .....          | (18) |
| 1.4.3 全概公式 .....          | (19) |
| 1.4.4 逆概公式 .....          | (21) |
| 1.5 贝努里概型 .....           | (23) |
| 1.5.1 事件的独立性 .....        | (23) |
| 1.5.2 贝努里概型(重复独立试验) ..... | (25) |
| 1.5.3 二项概率公式 .....        | (26) |
| 习题 1 .....                | (28) |
| 2 随机变量及其分布 .....          | (33) |
| 2.1 随机变量 .....            | (33) |



|       |                    |      |
|-------|--------------------|------|
| 2.1.1 | 随机变量               | (33) |
| 2.1.2 | 离散型随机变量及其概率分布      | (34) |
| 2.1.3 | 二项分布与泊松分布          | (36) |
| 2.2   | 分布函数               | (40) |
| 2.2.1 | 连续型随机变量及其分布函数      | (40) |
| 2.2.2 | 密度函数               | (43) |
| 2.2.3 | 均匀分布与指数分布          | (47) |
| 2.3   | 正态分布               | (49) |
| 2.3.1 | 正态分布的一般概念          | (49) |
| 2.3.2 | 标准正态分布             | (50) |
| 2.3.3 | 正态分布标准化            | (51) |
| 2.3.4 | $3\sigma$ 规则       | (52) |
| 2.3.5 | 一个中心极限定理           | (53) |
| 2.4*  | 多维随机变量及其分布         | (54) |
| 2.4.1 | 二维离散型随机变量          | (54) |
| 2.4.2 | 二维随机变量的分布函数        | (55) |
| 2.4.3 | 二维连续型随机变量          | (56) |
| 2.4.4 | 二维离散型随机变量的边际分布     | (57) |
| 2.4.5 | 二维连续型随机变量的边际分布     | (58) |
| 2.4.6 | 随机变量的独立性           | (60) |
|       | 习题 2               | (61) |
| 3     | 随机变量的数字特征          | (68) |
| 3.1   | 数学期望               | (68) |
| 3.1.1 | 离散型随机变量的数学期望       | (68) |
| 3.1.2 | 3 个常用的离散型随机变量的数学期望 | (70) |
| 3.1.3 | 连续型随机变量的数学期望       | (70) |
| 3.1.4 | 数学期望的性质            | (71) |
| 3.2   | 方差                 | (72) |
| 3.2.1 | 随机变量的方差概念          | (72) |
| 3.2.2 | 6 个常用分布的方差         | (73) |
| 3.2.3 | 方差的性质              | (76) |
| 3.3*  | 二维随机变量的数字特征        | (77) |
| 3.3.1 | 边际数学期望与边际方差        | (77) |
| 3.3.2 | 条件数学期望——回归曲线与相关比   | (78) |
| 3.3.3 | 协方差与相关系数           | (79) |
|       | 习题 3               | (81) |

|                                     |      |
|-------------------------------------|------|
| 4 数理统计基本知识                          | (84) |
| 4.1 总体、样本与统计量                       | (84) |
| 4.1.1 总体与个体                         | (84) |
| 4.1.2 样本                            | (84) |
| 4.1.3 简单随机抽样                        | (85) |
| 4.1.4 统计量                           | (85) |
| 4.1.5 样本均值与样本方差                     | (86) |
| 4.1.6 3种常用统计量的分布                    | (86) |
| 4.2 参数估计                            | (88) |
| 4.2.1 数学期望的点估计                      | (88) |
| 4.2.2 方差的点估计                        | (89) |
| 4.2.3 样本的变异系数                       | (90) |
| 4.2.4 已知方差 $\sigma^2$ , 对数学期望进行区间估计 | (91) |
| 4.2.5 未知方差 $\sigma^2$ , 对数学期望的区间估计  | (92) |
| 4.2.6 方差的区间估计                       | (93) |
| 4.3 假设检验                            | (94) |
| 4.3.1 问题的提出                         | (94) |
| 4.3.2 基本思想                          | (95) |
| 4.3.3 $\bar{U}$ 检验                  | (95) |
| 4.3.4 $T$ 检验                        | (97) |
| 4.3.5 $\chi^2$ 检验                   | (97) |
| 习题 4                                | (99) |

## 第 2 篇 线性代数

|                   |       |
|-------------------|-------|
| 5 线性方程组与行列式       | (101) |
| 5.1 线性方程组         | (101) |
| 5.1.1 几个实例        | (101) |
| 5.1.2 基本概念        | (102) |
| 5.2 二阶、三阶行列式      | (104) |
| 5.2.1 二阶、三阶行列式    | (104) |
| 5.2.2 三阶行列式的性质    | (107) |
| 5.2.3 行列式展开定理     | (109) |
| 5.3 $n$ 阶行列式      | (112) |
| 5.3.1 基本概念        | (112) |
| 5.3.2 $n$ 阶行列式的计算 | (113) |

|                                  |       |
|----------------------------------|-------|
| 5.3.3 $n$ 阶线性方程组的解法——克莱姆法则 ..... | (114) |
| 习题 5 .....                       | (117) |
| 6 $n$ 维向量与矩阵 .....               | (121) |
| 6.1 $n$ 维向量 .....                | (121) |
| 6.1.1 $n$ 维向量的概念 .....           | (121) |
| 6.1.2 向量组的线性相关性 .....            | (123) |
| 6.1.3 加长向量组的线性无关性 .....          | (125) |
| 6.1.4 向量组的极大线性无关组 .....          | (126) |
| 6.2 矩阵概念 .....                   | (127) |
| 6.2.1 基本概念 .....                 | (127) |
| 6.2.2 矩阵的秩 .....                 | (129) |
| 6.2.3 利用秩研究向量间的线性关系 .....        | (130) |
| 6.3 矩阵的初等变换 .....                | (131) |
| 6.3.1 初等变换的定义 .....              | (131) |
| 6.3.2 利用初等变换求秩 .....             | (134) |
| 习题 6 .....                       | (137) |
| 7 矩阵的运算 .....                    | (141) |
| 7.1 矩阵的各种形式 .....                | (141) |
| 7.1.1 零矩阵 .....                  | (141) |
| 7.1.2 对角矩阵与单位矩阵 .....            | (142) |
| 7.1.3 转置矩阵 .....                 | (142) |
| 7.1.4 三角矩阵 .....                 | (144) |
| 7.2 矩阵的运算 .....                  | (144) |
| 7.2.1 矩阵的加、减法 .....              | (144) |
| 7.2.2 数与矩阵的乘法 .....              | (147) |
| 7.2.3 矩阵与矩阵的乘法 .....             | (149) |
| 7.3 矩阵的分块 .....                  | (156) |
| 7.3.1 分块矩阵基本概念 .....             | (156) |
| 7.3.2 分块矩阵的加、减法与数乘 .....         | (156) |
| 7.3.3 分块矩阵的乘法与转置 .....           | (158) |
| 习题 7 .....                       | (160) |
| 8 线性方程组 .....                    | (166) |
| 8.1 线性方程组的相容性 .....              | (166) |
| 8.1.1 相容的线性方程组 .....             | (166) |
| 8.1.2 解的判别定理 .....               | (167) |



|                            |       |
|----------------------------|-------|
| 8.1.3 利用初等行变换求解方程组 .....   | (170) |
| 8.2 齐次线性方程组 .....          | (174) |
| 8.2.1 齐次线性方程组解的性质 .....    | (174) |
| 8.2.2 齐次线性方程组解的结构定理 .....  | (175) |
| 8.3 非齐次线性方程组 .....         | (181) |
| 8.3.1 非齐次线性方程组解的性质 .....   | (181) |
| 8.3.2 非齐次线性方程组解的结构定理 ..... | (181) |
| 习题 8 .....                 | (188) |
| 9 逆矩阵 .....                | (193) |
| 9.1 逆矩阵概念 .....            | (193) |
| 9.1.1 逆矩阵的定义 .....         | (193) |
| 9.1.2 逆阵的性质 .....          | (195) |
| 9.1.3 方阵可逆的充要条件 .....      | (197) |
| 9.2 利用初等变换求逆阵 .....        | (200) |
| 9.2.1 初等变换与初等阵 .....       | (200) |
| 9.2.2 利用初等行变换求逆阵 .....     | (202) |
| 9.3 利用逆阵求解矩阵方程 .....       | (205) |
| 习题 9 .....                 | (209) |
| 10 矩阵的应用 .....             | (214) |
| 10.1 海赛(Heaviside)矩阵 ..... | (214) |
| 10.1.1 二阶海赛矩阵 .....        | (214) |
| 10.1.2 三阶海赛矩阵 .....        | (215) |
| 10.2 矩阵决策 .....            | (216) |
| 10.2.1 设备更新问题 .....        | (216) |
| 10.2.2 市场营销决策问题 .....      | (219) |
| 10.3 马尔可夫分析 .....          | (223) |
| 10.3.1 市场占有率预测 .....       | (224) |
| 10.3.2 产品销售量预测 .....       | (225) |
| 10.3.3 最佳维修策略 .....        | (227) |
| 10.4 模糊综合评判 .....          | (230) |
| 10.4.1 单因素的模糊评判 .....      | (230) |
| 10.4.2 多因素综合评判 .....       | (231) |
| 习题 10 .....                | (236) |
| 11 投入产出分析 .....            | (240) |
| 11.1 投入产出分析基本概念 .....      | (240) |

|        |                   |       |
|--------|-------------------|-------|
| 11.1.1 | 基本概念              | (240) |
| 11.1.2 | 投入产出表             | (241) |
| 11.2   | 投入产出模型            | (245) |
| 11.2.1 | 直接消耗系数矩阵与列昂节夫矩阵   | (245) |
| 11.2.2 | 完全消耗系数矩阵及中间投入系数矩阵 | (250) |
| 11.2.3 | 投入产出基本预测模型        | (253) |
| 11.3   | 投入产出模型应用举例        | (254) |
| 11.3.1 | 国民经济部门生产计划调整预测    | (254) |
| 11.3.2 | 检查现有计划方案          | (255) |
| 11.3.3 | 劳动力需求预测           | (256) |
| 11.3.4 | 价格分析              | (257) |
| 习题 11  |                   | (260) |
| 12     | 线性规划初步            | (264) |
| 12.1   | 线性规划及其数学模型        | (264) |
| 12.1.1 | 基本概念              | (264) |
| 12.1.2 | 建立模型举例            | (265) |
| 12.2   | 两变量线性规划问题的图解法     | (269) |
| 12.2.1 | 图解法               | (269) |
| 12.2.2 | 列举法               | (272) |
| 12.3   | 线性规划问题的标准型及基本理论   | (273) |
| 12.3.1 | 线性规划模型的标准型        | (273) |
| 12.3.2 | 线性规划的基本理论         | (275) |
| 12.4   | 单纯形法              | (277) |
| 12.4.1 | 单纯形解法的步骤          | (278) |
| 12.4.2 | 利用单纯形表求线性规划问题     | (278) |
| 习题 12  |                   | (286) |
| 习题答案   |                   | (292) |
| 附表 1   | 标准正态分布的函数表        | (309) |
| 附表 2   | 泊松分布表             | (310) |
| 附表 3   | $t$ 分布表           | (311) |
| 附表 4   | $\chi^2$ 分布表      | (312) |
| 附表 5   | $F$ 分布表           | (314) |

# 第 1 篇 概率统计

## 预备知识 —— 排列与组合

### 0.1 两个基本原理

#### 1. 加法原理

如果要完成某项任务有  $n$  类办法, 而第  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 类办法中又有  $m_k$  种方法, 而且所有方法中没有两个是相同的. 只要选择一类办法中的一种方法就可以完成这项任务, 那么完成该项任务共有

$$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

种不同的方法.

例如: 从南京到上海可以乘火车、汽车、轮船或飞机. 每天火车有 38 班, 汽车有 127 班, 轮船有 3 班, 飞机有 1 班, 则每天共有

$$N = 38 + 127 + 3 + 1 = 169$$

种不同的走法.

#### 2. 乘法原理

如果完成某项任务必须经过  $n$  个步骤, 而完成第  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) 个步骤又有  $m_k$  种方法, 那么完成该项任务共有

$$N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$$

种不同的方法.

例如: 王先生有 5 件衬衣, 4 件羊毛衫, 3 套西装, 则有

$$N = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

种搭配穿法.

### 0.2 排列 —— 与次序有关

#### 1. 不允许重复的排列: 选排列与全排列

**定义 1** 从  $n$  个不同元素中任取  $r$  ( $0 < r \leq n$ ) 个不同元素, 按照一定顺序排

成一列,称为从  $n$  个元素中取  $r$  个的排列. 这种排列的总数记作  $P_n^r$  (或  ${}_nP_r$  或  $A_n^r$  或  $P(n, r)$ ).

当  $1 \leq r < n$  时称为选排列; 当  $r = n$  时称为全排列.

$P_n^r$  的计算公式

从  $n$  个不同的元素中任取一个元素放在第一个位置上, 共有  $n$  种取法, 从余下的  $n-1$  个元素中任取一个放在第二个位置上, 共有  $n-1$  种取法 …… 最后, 从剩下的  $n-(r-1) = n-r+1$  个元素中任取一个放在第  $r$  个位置上共有  $n-r+1$  种取法, 于是由乘法原理, 排列总数

$$P_n^r = n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+1) \quad (0.1)$$

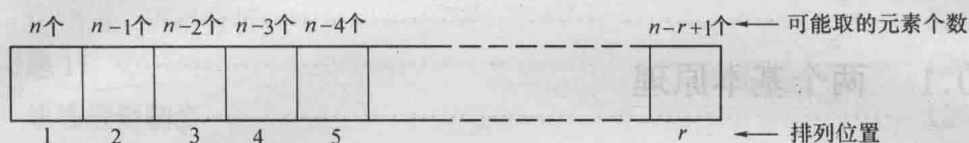


图 0.1

利用阶乘符号  $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ , 式(0.1) 可以表示成

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (0.2)$$

特别有全排列公式

$$P_n^n = n! \quad (0.3)$$

注意, 当  $r = 0$  时,  $P_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1$ , 表示从  $n$  个元素中不取元素进行排列, 为了使公式完备, 把这种情况理解为广义的排列.

**例 0.1** 从全班 40 人中选出 3 人分别担任班长、学习委员、文体委员, 共有

$$P_{40}^3 = 40 \times 39 \times 38 = 59\,280$$

种选法.

**例 0.2** (1) 有 15 本不同的书, 10 个人去借, 每人只能借一本, 问有多少种不同的借法?

(2) 有 10 本不同的书, 15 个人去借, 每人最多借一本, 每次把书都借完, 问有多少种借法?

**解** (1) 设想 10 个借书人排成一列, 问题变成从 15 本不同的书(元素)中任取 10 本分给 10 个借书人, 从而有

$$P_{15}^{10} = \frac{15!}{(15-10)!} = \frac{15!}{5!} = 10\,977\,280\,000$$

种借法.

(2) 设想 10 本书排成一列, 15 人借 10 本书, 必有 5 人借不到, 这相当于从 15 人

(元素)中任选 10 人依次去取书,从而仍有

$$P_{15}^{10} = \frac{15!}{5!} = 10\,897\,286\,400$$

种借法.

**例 0.3** 在 3 000 与 8 000 之间,有多少个没有重复数字的奇数?

**解** 3 000 到 8 000 之间的数,千位上只能是 3、4、5、6、7 五个数;作为奇数个位只能是 1、3、5、7、9 五个数;而个位与千位不能重复,注意到可能重复的是 3、5、7 三个数,所以可以分成两类:

一类是千位数是 4 或 6,个位是 1、3、5、7、9 中之一,其余八个数字中任取两个放在百位、十位上,所以共有

$$2 \times 5 \times P_8^2 = 10 \times 8 \times 7 = 560(\text{个})$$

另一类是千位是 3 或 5 或 7,个位是 1、3、5、7、9 中除去千位已取过后余下 4 个中的一个,而十位、百位仍在余下的八个数字中任取,所以共有

$$3 \times 4 \times P_8^2 = 12 \times 8 \times 7 = 672(\text{个})$$

根据加法原理,总共有

$$560 + 672 = 1\,232(\text{个})$$

## 2. 允许重复的排列

**定义 2** 从  $n$  个不同元素中任取  $r$  个(允许重复取)排成一列,称为从  $n$  个元素中允许重复取  $r$  个的排列,其总数记作  $U_n^r$ .

注意到每次均有  $n$  个元素可选取,所以有公式

$$U_n^r = n^r \quad (0.4)$$

**例 0.4** 南京市电话号码是 7 位数,问南京市电话局共能容纳多少用户(一个号码算一个用户)?如果电话号码的首位不能为 0 与 1,问南京市电话局可容纳多少用户?

**解** 因为每位数都有 10 个可能数字,所以共有用户

$$U_{10}^7 = 10^7 = 10\,000\,000(\text{个})$$

若首位除去 0 与 1,还有 8 种可能,余下 6 位,每位有 10 种可能,所以共有用户

$$P_8^1 \cdot U_{10}^6 = 8\,000\,000(\text{个})$$

## 0.3 组合 —— 与次序无关

**定义 3** 从  $n$  个不同元素中任取  $r$  ( $r \leq n$ ) 个不同的元素,不管次序,算作一组.称为从  $n$  个元素中取  $r$  个的组合.这种组合的总数记作  $C_n^r$ .

组合与排列的区别在于,组合中各元素没有先后次序(位置)之分,而排列中各元素与先后次序(位置)相联系.

我们也可以把选排列分解成下面两个步骤来完成.



第一步,从  $n$  个不同元素中任取  $r$  个不同元素组成一组(这是一个组合);第二步,将这一组  $r$  个元素进行排列(这是一个全排列).从而有

$$P_n^r = C_n^r \cdot P_r^r$$

由此得组合公式

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{P_r^r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (0.5)$$

**例 0.5** 四国女排超霸赛,每两个队赛一场,问共赛几场?

**解**  $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6$  (场)

**例 0.6** 从 5 位男生 4 位女生中抽出 4 人组成一个小组,要求其中至少有 2 名男生,至少有 1 名女生,问有多少种组织法?

**解** 只有两种可能:2 男 2 女或 3 男 1 女. 2 男 2 女有  $C_5^2 \cdot C_4^2$  种组织法. 3 男 1 女有  $C_5^3 \cdot C_4^1$  种组织法. 由加法原理,共有组织法

$$\begin{aligned} N &= C_5^2 \cdot C_4^2 + C_5^3 \cdot C_4^1 \\ &= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \cdot \frac{4 \times 3}{2 \times 1} + \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \cdot 4 \\ &= 60 + 40 = 100 \text{ (种)} \end{aligned}$$

**例 0.7** 100 件产品中有 10 件次品,从中抽取 5 件,问:(1) 全是正品有多少种取法? (2) 有 2 件次品有多少种取法?

**解** 100 件产品中有 10 件次品,还有 90 件是正品(这是隐性条件),现抽取 5 件.

(1) 全是正品,自然是从 90 件正品中取的,所以有取法

$$C_{90}^5 = 43\,949\,268 \text{ (种)}$$

(2) 2 件次品取自 10 件次品,另 3 件正品取自 90 件正品(隐性要求),所以有取法

$$C_{10}^2 \times C_{90}^3 = 5\,286\,600 \text{ (种)}$$

**例 0.8** 一口袋中有 5 只白球,3 只黑球,任取 2 只球,求满足下列条件的各有多少种取法:(1) 取得 2 只白球;(2) 取得 2 只黑球;(3) 取得一只白球一只黑球.

**解** (1) 有  $C_5^2 = 10$  种取法;

(2) 有  $C_3^2 = 3$  种取法;

(3) 有  $C_5^1 \cdot C_3^1 = 15$  种取法.

## 习 题

1. 一条铁路线上有 12 个车站,问需准备多少种不同的车票?若不同两站间的票价不同,那么有多少种不同的票价?

2. 用 0 到 9 这十个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

3. 一排 10 个座位,有 5 人就坐,有多少种坐法?
4. 10 个球队参加篮球循环赛,一共要比多少场?
5. 某施工队有 8 名老工人,5 名新工人,现要派三名工人去完成一项工作,要求其中至少包含一名老工人,问一共有多少种派法?
6. 在 100 件产品中有 8 件次品,任取 10 件,其中恰有 2 件次品,问有多少种不同的取法?
7. 有 100 件产品,其中有 2 件次品,任取 3 件,问:(1) 一共有多少种不同的取法?(2) 恰有一件次品,共有多少种取法?(3) 至少有一件次品共有多少种取法?
8. 某人有一百元、伍拾元、贰拾元、拾元、伍元、贰元、壹元、伍角、贰角、壹角人民币各一张,问用这些人民币能够付多少种不同的款项?
9. 把 3 封不同的信投入 4 个有编号的信箱,有多少种不同的投法?
10. 只有 0、1、2 三个数码,可以编制多少个 4 位商品号码?
11. 有 10 把钥匙,其中有 3 把能打开门,问任取两把能打开门,有多少种取法?

# 1 随机事件与概率

## 1.1 引言

### 1.1.1 概率统计的研究对象

在客观世界中,包括自然界与人类社会中有许多现象在事前无法预测其结果,即所谓的不确定现象.如

1. 抛一枚硬币,是出现国徽还是出现币值;
2. 掷一颗骰子,出现几点;
3. 从一副扑克牌中任意抽取一张,是否是红桃 K;
4. 买一张彩票,会不会中奖;
5. 打靶,能否打中目标.

这些都是事前无法绝对确定的.

凡是在一定条件下可能发生,也可能不发生的现象,称为偶然现象,或称为随机现象.而在一定条件下必然发生或必然不发生的现象叫做必然现象.

在中学所学的知识几乎都是必然现象.如物理定律:在标准大气压下水在  $100^{\circ}\text{C}$  时沸腾;上抛一块石子,必定落回地面;又如数学定理:圆面积必定是  $\pi r^2$ ,三角形内角和必定是  $180^{\circ}$ .

人类首先研究必然现象,得出许多必然规律,称之为知识,创立了许多科学.但随机现象也客观存在,有时还不得不研究它.如赌徒要研究赌博之规律;军事家要研究兵器的有效率(即命中率);公交公司要研究各条线路上客流规律,以决定投放多少车辆;彩民也在探讨中奖的机会.人们在大量的重复实践与观察中发现:

随机现象在一次、二次实践中结果是不确定的,但当大量重复实践时却会出现某种规律性,即有相对的稳定性.例如:

1. 当抛硬币次数很多时,出现国徽与币值的次数几乎是相等的(见表 1.1);

表 1.1 抛币试验

| 试验者                 | 抛掷次数<br>$n$ | 币值朝上次数<br>$\mu$ | 频率<br>$k = \mu/n$ |
|---------------------|-------------|-----------------|-------------------|
| 蒲 丰 (Buffon)        | 4 040       | 2 048           | 0.506 9           |
| 皮尔逊                 | 12 000      | 6 019           | 0.501 6           |
| (K. Pearson)<br>皮尔逊 | 24 000      | 12 012          | 0.500 5           |

2. 买彩票大多数人是不会中奖的,但总有少数会中奖,甚至中大奖;
3. 公交线上何时人多,何时人少,在非节假日是相对稳定的;
4. 一只空容器内每个空气分子的运动方向速度大小都是随机的,但从宏观上看,气体对容器壁的压力却是稳定的.

大量实践表明,在偶然性中隐藏着必然性.

概率统计就是研究大量随机现象中的统计规律性的科学.

### 1.1.2 概率统计的发展简史

概率统计最早出现在 17 世纪中叶,开始时出现在赌博之中,接着用于产品检验与社会保险. 18 ~ 19 世纪应用于人口统计、误差理论、气象预报、地震预报、炮兵射击理论. 20 世纪进而扩大应用于生产过程的最佳控制、电子元件的可靠性分析、农业试验、军事科学、公用事业和社会科学的调查统计. 因此,概率统计是应用十分广泛的一个数学分支.

本篇内容只介绍概率统计的一些入门知识,为今后学习经济学、市场预测、经营决策及全面质量管理等打下必备基础.

## 1.2 随机事件

### 1.2.1 随机事件

#### 1. 随机试验

观察某事物在一定条件下发生什么现象,出现什么结果的过程,称为试验. 例如:

试验  $E_1$ : 抛硬币,观察出现国徽或币值的情况;

试验  $E_2$ : 掷骰子,观察出现的点数;

试验  $E_3$ : 抽扑克牌,观察其花色与点数;

试验  $E_4$ : 在一批灯泡中任抽 1 只,测试其寿命;

试验  $E_5$ : 商店每周盘点,统计营业额;

试验  $E_6$ : 记录某寻呼台 1 分钟接到呼唤的次数;

试验  $E_7$ : 统计某个考题在各班的得分率;

试验  $E_8$ : 打靶,记录每一枪的环数.

这些试验具有下列共同性:

- (1) 可重复性: 在相同的条件下可重复进行;
- (2) 结果的不确定性: 每次试验的结果有多种可能性,而且在事先就明确所有可能的结果;
- (3) 随机性: 在每次试验前,不能准确地预言将出现哪一个结果.