SHIFENXIJICHU

实分析基础

丘京辉 · 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

苏州大学研究生精品课程“实分析”建设项目

实分析基础

丘京辉 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内容提要

本书介绍实分析的基本理论. 全书共分八章，内容包括：集合与映射，拓扑空间，测度空间，积分，Riesz 表示定理与 Borel 测度的正则性，L^p-空间，赋范线性空间初步理论和 Hilbert 空间初步理论. 本书在选材上注重少而精，集中反映实分析的核心内容. 在内容的叙述上，注意由浅入深，循序渐进. 本书语言通俗易懂，推理严谨清晰，便于教学和自学. 书中各章配有例题和习题，可供读者借鉴和练习. 本书可作为大学数学专业硕士生一年级的教材，也可作为数学专业本科生高年级选修课教材. 同时，也可供需要分析数学较多的理工科研究生和大学教师、科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

实分析基础/丘京辉编著. —南京：东南大学出版社，2016.11

ISBN 978-7-5641-6787-5

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①丘… Ⅲ. ①实分析-基本知识 Ⅳ. ①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 239152 号

实分析基础

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 江建中
社 址 南京市四牌楼 2 号
邮 编 210096

经 销 全国各地新华书店
印 刷 兴化印刷有限责任公司
开 本 700 mm×1000 mm 1/16
印 张 12.75
字 数 250 千字
版 次 2016 年 11 月第 1 版
印 次 2016 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5641-6787-5
定 价 32.00 元

前　　言

由于分析的思想在数学和其他科学分支的广泛应用，实分析普遍被选为数学专业硕士研究生一年级的必修课.所谓“实分析”是指近现代数学中那些根植于经典数学分析和实变函数的部分.目前，实分析已发展为包含多个专题的现代分析理论.由于应用和偏好的不同，关于实分析的教材也呈现多种版本，不同形式.但是基本的内容应包括：经典的实变函数本身，一般测度空间及其上的可测函数，抽象积分，拓扑空间，拓扑与测度相结合所产生的理论，L^p -空间，Hilbert 空间和赋范线性空间等.由于实变函数已作为前期知识在本科阶段学习过，故通常研究生的实分析教材不包括这一基础部分.但是，在学习实分析的抽象理论时，我们会经常联系实变函数中相应的结果；由此说明实变函数理论是实分析理论的一个具体的经典的例子，而实分析理论是实变函数理论的抽象化和一般化.那么，这种抽象化和一般化又有何意义呢？我们可通过它对其他学科的作用加以说明.比如，概率空间，它显然不是实变函数中 $\mathbf{R}^k$ 上的 Lebesgue 测度空间，但它是我们实分析讨论的测度空间的一种，即全空间测度为 1 的测度空间.其实，在高等概率论中，随机事件就是概率空间中的可测集，其发生的概率就是测度，随机变量就是一个可测函数，而其数学期望就是它的积分.又如，局部紧群上的 Haar 测度，拓扑测度论和拓扑动力系统等涉及的许多测度空间也常常不是 $\mathbf{R}^k$ 上的 Lebesgue 测度.所有这些内容都是实变函数理论无法囊括的，而必须纳入实分析的理论框架来研究.因而，从实变函数到实分析，并不是一个单纯形式的推广，而是具有丰富内涵的开拓.在有了拓扑空间之后，自然就产生了连续函数空间、有界连续函数空间、具有紧支的连续函数空间及在无穷远处为 0 的连续函数空间等；在有了测度空间之后，自然就产生了可测函数空间、有界可测函数空间、可积函数空间及 p -次可积函数空间等.这些空间通常都是无限维线性空间.这样，引入线性泛函分析的知识，如赋范线性空间、Hilbert 空间的基本理论，自然成为可能与必要.因而，通常实分析的教材也将这部分内容包括在内.

W. Rudin 所著《实分析与复分析》一书是国内外大学广泛使用的数学专业研究生的基础教材(以下，也称该书为原著).这是一本不可多得的好书.学习并掌握该书的内容，对于分析数学的理解将会登上一个新的台阶.多年来，我们一直采用该书的第 1 章到第 5 章作为教学的基本内容.但是初学者直接阅读该书，确实具有

一定的困难. 编者于 1990 年到 2010 年期间，曾担任苏州大学数学科学学院硕士研究生实分析课程的教学工作，深感需要根据实际情况，参照原著，编写一本内容深入浅出、通俗易懂而又理论严谨，且反映现代分析数学思想和成果的教材，以适应数学专业研究生教学的需要. 本书就是一个尝试. 它根据编者 20 年来积累的讲稿和心得整理、修订、充实而成. 全书共分为八章，分别是：集合与映射，拓扑空间，测度空间，积分，Riesz 表示定理与 Borel 测度的正则性，L^p -空间，赋范线性空间初步理论，Hilbert 空间初步理论. 比照原著，在内容的选取和处理方面，本书作了如下一些尝试.

一、关于拓扑学知识的介绍. 在原著中，拓扑学知识是分散在第 1 章和第 2 章各处出现的. 这样的安排有其特色，使学生对于拓扑学的认识和学习有一个逐步深入的过程. 但缺点是理论不系统、不集中；在阶段性给出的结论不全面、不深入. 例如，在第 1 章讲述连续映射时，由于未介绍闭集和网，故未能给出连续映射的闭集刻画和网的刻画. 本书专列一章“拓扑空间”比较系统、全面地介绍拓扑学的重要基础知识. 这样一方面，为以后各章节使用拓扑知识提供了丰富的“仓廪”；另一方面，拓扑学知识本身对于提高学生的抽象分析能力和数学修养也具有重要意义.

二、关于 Urysohn 引理的处理. 在实分析中，通常 Urysohn 引理的叙述是专为证明 Riesz 表示定理而设的，而 Riesz 表示定理涉及的是局部紧 Hausdorff 拓扑空间，故在那里，Urysohn 引理是对局部紧 Hausdorff 拓扑空间而言的. 但是，在一般拓扑学中，通常 Urysohn 引理是对正规空间而言的. 原著文中叙述的 Urysohn 引理取第一种形式，而第 2 章习题中要求学生验证度量空间满足 Urysohn 引理时，又指第二种形式. 历届学生每遇到此问题时，总感到困惑. 本书给出 Urysohn 引理的一种推广形式，它蕴涵上述两种不同形式的 Urysohn 引理；进而说明：虽然这些引理的形式不同，但实质是相似的，故而都名之曰“Urysohn 引理”.

三、由 Riesz 表示定理导出 $\mathbf{R}^k$ 上 Lebesgue 测度的讲法. 原著中，这部分内容由于追求自封闭性，避免直接使用数学分析中的 Riemann 积分，而是另起炉灶，在 $\mathbf{R}^k$ 中引入“胞腔”、“单元”、映射序列“Λ_n”，并进而证明“Λ_n”具有极限映射“Λ”，此即定义于 $C_c(\mathbf{R}^k)$上的正线性泛函(注：$C_c(\mathbf{R}^k)$指定义于 $\mathbf{R}^k$ 上具有紧支的连续函数空间). 由于我们的学生对于这些术语并不熟悉，因而感到神秘而难懂，分散了学生的注意力，影响对于主线的理解. 根据我们的学生对于 Riemann 积分的理解并无太大困难这样的状况，对于 $\mathbf{R}^k$ 上具有紧支的连续函数 f，直接用 Riemann 积分来定义 $\Lambda f:=\int_{\mathbf{R}^k} f(x)\mathrm{d}x$. 这就获得了 $C_c(\mathbf{R}^k)$上的正线性泛函：$f\mapsto\Lambda f, f\in C_c(\mathbf{R}^k)$. 利用 Riesz 表示定理，由 Λ 可导出 $\mathbf{R}^k$ 上一个满足诸多“好”的条件的完备的 Borel 测度(注：实分析书中的 Borel 测度不一定指 Borel 集族上的测度，而是指包含 Borel

集族的 σ-代数上的测度），并证明这个完备的 Borel 测度即实变函数中 $\mathbf{R}^k$ 上的 Lebesgue 测度，同时也导出了 Lebesgue 积分. 这样处理简明扼要，突出主线，较易为学生接受. 其实，在编者执教实分析课程的早期，由于当时课时比较充裕，上述构造 Riemann 积分过程是详细讲述的；这对于理解 Riemann 积分的实质很有帮助. 但其严格而完整的证明需要较长篇幅，建议作为课外讲座或思考题.

四、关于"赋范线性空间初步理论"的讲述. 本书注意渗透拓扑线性空间的思想方法，使证明抓住关键，揭示本质，同时也便于以后将结论推广到更广一类的拓扑线性空间上去.

由于篇幅所限，还有一些重要内容未能收入本书中，如复测度（包括 Radon-Nikodym 定理及 $L^p(\mu)$上有界线性泛函的表示定理）、乘积空间上的积分（包括乘积测度及 Fubini 定理）等. 故本书只能称为实分析的基础或引论. 应当指出，本书许多内容取自 Rudin 的原著，当然，经过重新编排和改写. 此外，编者还参考了国内外大量实分析、实变函数和泛函分析的教材、习题集和专著. 本书的末尾只能列出其中一部分参考文献.

阅读本书仅需数学分析知识和实变函数的基础知识（例如见：张建平，丘京辉编，实变函数（第二版），东南大学出版社，2014 年）. 全书各重要内容的编排按三个系列进行. 以命题、引理、定理、推论为一个系列，编为：名称（章）.（节）.（序号）. 例如，第 7 章第 2 节的相关结论可编为：定理 7.2.1、推论 7.2.2、定理 7.2.3、命题 7.2.4 等. 以定义为一个系列，编为：定义（章）.（节）.（序号）. 例如，定义 7.1.1 指第 7 章第 1 节中第一个定义. 以例为一个系列，编为：例（章）.（节）.（序号）. 例如，例 7.3.1 指第 7 章第 3 节中第一个例. 此外，每章后都附有习题，供读者练习.

编者衷心感谢苏州大学数学科学学院有关领导和同事及苏州大学研究生院有关领导和同志；由于他们的推荐和支持，使编者获得"苏州大学研究生精品课程建设项目——实分析"的资助. 本书也是该建设项目产生的成果之一. 编者还要诚挚感谢 20 年来历届研究生的支持和配合. 我们师生同学，教学相长，留下了美好难忘的记忆. 东南大学出版社的张烨、史静编辑为本书出版付出了辛勤的劳动，编者一并在此表示诚挚的感谢！

由于编者水平所限，错误和不妥之处在所难免，希望广大师生、读者和同行不吝指教.

编者

于 2016 年 3 月

目　录

1 集合与映射

1.1 集合及其运算

集合是指具有某种特定性质的对象的全体. 构成集合的对象称为集合的元素. 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$. 若 x 为集合 A 的元素，则记为 $x\in A$，称 x 属于 A；若 x 非集合 A 的元素，则记为 $x\notin A$，称 x 不属于 A. 表示集合的方法有列举法和描述法. 列举法是列出该集合的所有元素，而描述法则是给出该集合元素所特有的性质的刻画. 例如，设集合 A 是方程 $x^2-x-2=0$ 的根的全体，则可以用列举法表示为 $A=\{-1,2\}$，也可以用描述法表示为 $A=\{x\in\mathbf{R}: x^2-x-2=0\}$.

本书中记自然数集(不含 0) 为 $\mathbf{N}$，整数集为 $\mathbf{Z}$，有理数集为 $\mathbf{Q}$，实数集为 $\mathbf{R}$.

定义 1.1.1 设有集合 A 与 B，如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B，则称集合 A 为集合 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，分别读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 若 $A\subset B$，且 B 中有元素 $x\notin A$，则称集合 A 为集合 B 的真子集. 规定空集 $\varnothing$ 为任何集合的子集.

定义 1.1.2 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A=B$.

例 1.1.1 $\{x\in\mathbf{R}: -1<x<1\}=\{x\in\mathbf{R}: x^2<1\}$.

定义 1.1.3 设有集合 A 与 B. 称集合 $\{x: x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$；称集合 $\{x: x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$.

若有三个不同的集合 A, B, C，可以构造由这些集合组成的集合(常称为集族) $\mathcal{M}=\{A,B,C\}$，这里集合 A,B,C 分别是集族 $\mathcal{M}$ 的元素. 集族也常表示为带有指标的形式. 设 I 为一集合. 若对于每个 $i\in I$，对应有唯一的集合 A_i，则我们有一个指标化的集族 $\{A_i\}_{i\in I}$，这里，I 称为指标集. 对于集族 $\{A_i\}_{i\in I}$ 可定义并集与交集为

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x: \text{存在 } i\in I \text{ 使 } x\in A_i\};$$
$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x: \text{对于任意 } i\in I, \text{有 } x\in A_i\}.$$

例 1.1.2 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的实值函数，则有

$$\{x\in\mathbf{R}: f(x)>0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}: f(x)>\frac{1}{k}\right\};$$

$$\{x \in \mathbf{R}: f(x) \leqslant 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbf{R}: f(x) \leqslant \frac{1}{k}\right\}.$$

若在某个问题中，所考虑的集合皆是 X 的子集，则称 X 为全集(universal set).

定义 1.1.4 设有集合 A 与 B，称集合 $\{x: x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 为 A 与 B 的差集，记作 $A \backslash B$. 当 B 是 A 的子集时，称 $A \backslash B$ 为集合 B 相对于集合 A 的补集或余集. 集合 B 相对于全集 X 的补集简称为集合 B 的补集(或余集)，记为 $B^c = X \backslash B$.

例 1.1.3 设 f 如例 1.1.2 所示，则 $\{x \in \mathbf{R}: f(x) > 0\} = \{x \in \mathbf{R}: f(x) \leqslant 0\}^c$.

下述定理 1.1.1 和定理 1.1.2 是显然的. 我们略去它们的证明.

定理 1.1.1 集合运算有如下性质：

(1) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$;

(2) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(3) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

(4) 分配律 $A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i), A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$.

定理 1.1.2 设 X 是全集，则有

(1) $A \cup A^c = X, A \cap A^c = \varnothing, X^c = \varnothing, \varnothing^c = X$;

(2) $(A^c)^c = A, A \backslash B = A \cap B^c$;

(3) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$;

(4) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B^c$.

定理 1.1.3(De Morgan 法则) 设 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是全集 X 上的一个集族，则有

(1) $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$(简称：和余余积)；

(2) $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$(简称：积余余和).

证 (1) 证明如下：

$$\begin{aligned} x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^c &\Leftrightarrow x \notin A_i, \ \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in A_i^c, \ \forall i \in I \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c. \end{aligned}$$

(2) 可由(1)推出. 把(1)式中的 A_i 换成 A_i^c，则有 $(\bigcup_{i \in I} A_i^c)^c = \bigcap_{i \in I} A_i$. 两边再取余集，即得 $\bigcup_{i \in I} A_i^c = (\bigcap_{i \in I} A_i)^c$. □

定义 1.1.5 设 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 是一个集合序列. 定义

$$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \liminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

它们分别称为集合序列 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 的上、下极限. 若上极限与下极限存在且相等，则称集合序列 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 的极限存在并等于其上极限或下极限，记为 $\lim_{n \to \infty} A_n$.

若$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$为单增序列，即$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$，则$\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$并且$\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k=A_n$. 从而，

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\Big)=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$
$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在且为$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

若$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$为单减序列，即$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$，则$\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k=A_n$并且$\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. 从而，

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n,$$
$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在且为$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

例 1.1.4 设$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$是一个集合序列. 证明：

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n=\{x$：有无限多个$A_n$含有$x\}$；

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n=\{x$：从某个$n$开始所有$A_n$含有$x\}$.

从而有$\liminf\limits_{n\to\infty}A_n\subset\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$.

证 (1) $x\in\limsup\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\quad\Leftrightarrow\quad\forall n\in\mathbf{N}$，有$x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$

$\Leftrightarrow\quad\forall n,\ \exists k\geqslant n$使$x\in A_k$

$\Leftrightarrow$ 有无限多个A_n含有x.

(2) $x\in\liminf\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k\quad\Leftrightarrow\quad\exists n\in\mathbf{N}$使$x\in\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$

$\Leftrightarrow\quad x\in A_k,\ \forall k\geqslant n$.

定义 1.1.6 设X,Y是两个集合，则称$\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$为集合X与Y的直积集(或笛卡儿积)，记为$X\times Y$. 类似地，可定义n个集合$X_1,X_2,\cdots,X_n$的直积集如下：$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in X_i,i=1,2,\cdots,n\}$. 若$x=(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\in X$，则称$x_i$为$x$的第$i$个坐标. 称集合$X_i$为直积集$X$的第$i$个坐标集(或因子集). 通常把$n$个相同的集合$X$的直积集记为$X^n$. 例如$\mathbf{N}^2=\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\{(n,m):n,m\in\mathbf{N}\}$；$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

1.2 映射

定义 1.2.1 设 X,Y 是两个非空集合. 若按某个法则 f, 使对于每个 $x\in X$, Y 中有唯一确定的 y 与之对应, 则称这个对应是从 X 到 Y 的映射(或函数), 记为 $f\colon X\to Y$. X 称为 f 的定义域, 记作 $\mathrm{dom}f=X$.

对每个 $x\in X$, 记 Y 中与 x 对应的点 y 为 $f(x)$, 并称 y 为点 x 在映射 f 下的象. 对每个 $y\in Y$, 如果存在 $x\in X$ 使得 $y=f(x)$, 则称 x 为点 y 在映射 f 下的原象.

定义 1.2.2 若 $A\subset X$, 记 $f(A)=\{y\in Y\colon 存在\ x\in A\ 使\ y=f(x)\}$, 并称 $f(A)$ 为集 A 在映射 f 下的象集. 特别地, 我们称 $f(X)$ 为 f 的值域. 若 $B\subset Y$, 记 $f^{-1}(B)=\{x\in X\colon f(x)\in B\}$, 并称 $f^{-1}(B)$ 为集 B 在映射 f 下的原象集.

定义 1.2.3 设 $f\colon X\to Y$ 为映射. 若对于任意的 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$, 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 是从 X 到 Y 的一个单射. 若 $f(X)=Y$, 则称 f 是从 X 到 Y 的一个满射(也称 f 是映上的或映满 Y 的). 若映射 f 既为单射又为满射, 则称 f 是从 X 到 Y 的一个双射(或 1－1 映射).

定义 1.2.4 设 $f\colon X\to Y$ 是双射, 则对任意 $y\in Y$, 存在唯一 $x\in X$ 使 $y=f(x)$, 称这个从 Y 到 X 的对应为 f 的逆映射, 记作 $f^{-1}\colon Y\to X$.

命题 1.2.1 设映射 $f\colon X\to Y$, 则

(1) 对于任意 $A\subset X$, 有 $A\subset f^{-1}(f(A))$;

(2) 对于任意 $B\subset Y$, 有 $f(f^{-1}(B))\subset B$.

证 (1) 设 $x\in A$, 则 $f(x)\in f(A)$, 故 $x\in f^{-1}(f(A))$, 所以有 $A\subset f^{-1}(f(A))$.

(2) 设 $y\in f(f^{-1}(B))$, 则存在 $x\in f^{-1}(B)$, 使 $y=f(x)$, 故 $y\in B$. 所以有 $f(f^{-1}(B))\subset B$. □

命题 1.2.2 设映射 $f\colon X\to Y$, 则

(1) $A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$, $B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$;

(2) $f(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\bigcup\limits_{i\in I}f(A_i)$, $f(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)\subset\bigcap\limits_{i\in I}f(A_i)$; 若更设 f 为单射, 则 $f(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)=\bigcap\limits_{i\in I}f(A_i)$;

(3) $f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I}B_i)=\bigcup\limits_{i\in I}f^{-1}(B_i)$, $f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I}B_i)=\bigcap\limits_{i\in I}f^{-1}(B_i)$;

(4) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$.

证 我们仅给出(4) 的证明.

$$x\in f^{-1}(B^c)\Leftrightarrow f(x)\in B^c\Leftrightarrow f(x)\notin B\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in(f^{-1}(B))^c.$$

其余命题请读者自己证明. 注意(2) 中包含关系可以是真的. 例如, 设 $f(x)=x^2$,

$x\in(-\infty,+\infty)$，$A_1=[-1,0]$，$A_2=[0,1]$. 则 $A_1\cap A_2=\{0\}$，故 $f(A_1\cap A_2)=\{0\}$，而 $f(A_1)\cap f(A_2)=[0,1]$. □

定义 1.2.5 设有映射 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，则称 $h(x)=g(f(x))$ 所定义的映射 $h: X\to Z$ 为 g 与 f 的复合映射，记作 $h=g\circ f$.

定义 1.2.6 设 $A\subset X$，映射 $f: X\to Y$，$g: A\to Y$. 若 $f(x)=g(x)$，$\forall x\in A$，则称映射 g 为 f 在集合 A 上的限制，记作 $g=f\mid A$. 此时，也称映射 f 为 g 在 X 上的一个延拓(或扩张).

定义 1.2.7 设 X 为全集，子集 $A\subset X$. 则称函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in X\backslash A,\end{cases}$$

为定义在 X 上的 A 的特征函数.

例 1.2.1 设 X 为全集，A，B 均为 X 的子集. 则特征函数有如下性质：

(1) $A\subset B\Leftrightarrow \chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$，$x\in X$；

(2) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$，$x\in X$；

(3) $\chi_{A\cap B}=\chi_A(x)\chi_B(x)$，$x\in X$；

(4) $\chi_{A\backslash B}(x)=\chi_A(x)(1-\chi_B(x))$，$x\in X$.

有了函数概念，我们可以考虑无穷多个集合的直积，这推广了定义 1.1.6.

定义 1.2.8 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 为一个集族. 该集族的直积，记作 $\prod\limits_{i\in I}X_i$，乃是这样一个集合：它的元素是定义于 I 上的函数 x，使对于每个 $i\in I$，$x(i)\in X_i$. 如此，

$$\prod_{i\in I}X_i=\{x: I\to\bigcup_{i\in I}X_i: x(i)\in X_i, i\in I\}.$$

我们称 $x(i)$ 是 x 的 i-坐标，并记 $x(i)$ 为 x_i.

例 1.2.2 设 X 为一个集合. X 中的一个点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 实际上可看成一个定义于自然数集 $\mathbf{N}$ 上，取值于 X 中的函数 $x: \mathbf{N}\to X$. 这里，$x(n)=x_n$，$n\in\mathbf{N}$. 显然，X 中点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 的全体所成的集合恰恰是 $X^{\mathbf{N}}$.

1.3 关系，偏序与等价

设 X 为一全集，$G\subset X\times X$ 为非空. G 可确定 X 上的二元关系 $\widetilde{G}$ 如下：称 $x\widetilde{G}y$ 若 $(x,y)\in G$. 对于 X 中任意两个元素 x，y，有可能 $x\widetilde{G}y$ 成立，也有可能 $x\widetilde{G}y$ 不成立.

定义 1.3.1 称 X 上的二元关系 $\widetilde{G}$ 为自反的，若 $x\widetilde{G}x$，$\forall x\in X$.

称 X 上的二元关系 $\widetilde{G}$ 为对称的，若 $x\widetilde{G}y \Leftrightarrow y\widetilde{G}x$.

称 X 上的二元关系 $\widetilde{G}$ 为反对称的，若 $x\widetilde{G}y$ 且 $y\widetilde{G}x \Rightarrow x = y$.

称 X 上的二元关系 $\widetilde{G}$ 为传递的，若 $x\widetilde{G}y$ 且 $y\widetilde{G}z \Rightarrow x\widetilde{G}z$.

偏序与等价是两种常见的关系，它们的定义如下.

定义 1.3.2 称 X 上的二元关系 $\widetilde{G}$ 为偏序(常记作 $\prec$)，若 $\widetilde{G}$ 是自反、传递且反对称的. 称 X 上的二元关系 $\widetilde{G}$ 为等价关系(常记作 $\sim$)，若 $\widetilde{G}$ 是自反、传递且对称的.

定义 1.3.3 X 上的偏序 $\prec$ 称为全序，若对于 $\forall x, y \in X$, $x \prec y$ 或 $y \prec x$ 至少有一个成立. 设$(X, \prec)$ 为偏序集. X 的非空子集 A 称为 X 的全序子集(或链)，若对于 $\forall x, y \in A$, $x \prec y$ 或 $y \prec x$ 至少有一个成立. 元素 $u \in X$ 称为 A 的上界，若对于 $\forall x \in A$，有 $x \prec u$. 元素 $v \in X$ 称为 X 的极大元，若 $x \in X$ 且 $v \prec x \Rightarrow x = v$.

以下几个公理是相互等价的. 以后在需要时，我们将按方便选用其中之一.

Zorn 引理 若偏序集$(X, \prec)$ 的任何全序子集在 X 中都有上界，则 X 中存在极大元.

Hausdorff 极大原理 每个非空偏序集$(X, \prec)$ 存在一个极大全序子集 A(即，若有 X 的全序子集 B 使 $A \subset B$，则必有 $A = B$).

Zermelo 选择公理 设 $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ 是两两不交的非空集组成的集族. 则存在集合 B 满足：

① $B \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$；

② B 与 $\mathbf{A}$ 中每个集合有且仅有一个公共元素，即，对于每个 $i \in I$, $B \cap A_i$ 为单点集.

最后，利用等价关系我们作出一个集合的商集.

例 1.3.1 设 X 为全集，$\sim$ 是 X 上的等价关系. 对于 $x \in X$，定义 $E_x = \{y \in X: y \sim x\}$. 显然，$x \in E_x$，故每个 $E_x \neq \varnothing$. 若 $y, z \in E_x$，则 $y \sim x$ 且 $z \sim x$. 由等价关系的对称性和传递性知，$y \sim z$. 即，E_x 中任意两个元素必等价. 若 $z \in X$ 使存在 $y \in E_x$ 满足 $z \sim y$，则由 $z \sim y$, $y \sim x$ 知 $z \sim x$，即，$z \in E_x$. 也就是说，若 $z \in X$ 与 E_x 中某元素等价，则必有 $z \in E_x$. 故对于 $\forall x, y \in X$，要么 $E_x = E_y$，要么 $E_x \cap E_y = \varnothing$. 也就是说，要么 $x \sim y$，要么 $x \sim y$ 不成立. 集族$\{E_x: x \in X\}$ 中的成员(是 X 的子集) 称为 X 在 $\sim$ 下的等价类. 显然，X 可以写成所有这种不交的等价类之并. 在 $\sim$ 下的全体等价类组成的集合称为 X 关于 $\sim$ 的商集，记作 $X/\sim$. 映射 $x \mapsto E_x$ 叫作从 X 到 $X/\{\sim\}$(上) 的自然商映射.

1.4 对等与基数

对于有限集来说，我们可以通过计数的方法来判定它含有几个元素，从而确

定两个不同的有限集所含元素的多少. 但由于每个无限集都含有无限多个元素，故无法通过计数的方法来判定两个不同的无限集谁所含元素更多些. 因此我们要借助双射来引入两个集合所含有的元素一样多的概念，即所谓"对等" 的概念.

定义 1.4.1 设有集合 A, B. 若存在一个从 A 到 B 的双射，则称集合 A 与 B 对等，记作：$A \sim B$. 若存在 $n \in \mathbf{N}$，使 $E \sim \{1, 2, \cdots, n\}$，则称 E 为有限集，空集 $\varnothing$ 也称为有限集. 若集合 E 不是有限集，则称 E 为无限集.

例 1.4.1 $\mathbf{N} \sim \{2n : n \in \mathbf{N}\}$.

证 令 $f(n) = 2n$，则 $f: \mathbf{N} \to \{2n : n \in \mathbf{N}\}$ 是双射.

例 1.4.2 $[0, 1] \sim [0, 4]$.

证 令 $f(t) = 4t$，则 $f: [0, 1] \to [0, 4]$ 是双射.

例 1.4.3 $(-1, 1) \sim \mathbf{R}$.

证 令 $f(x) = \tan \dfrac{\pi x}{2}$，则 $f: (-1, 1) \to \mathbf{R}$ 是双射.

例 1.4.4 设 $a < b$，则 $(a, b) \sim \mathbf{R}$.

证 令 $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{2x - b - a}{b - a}\right)$，则 $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ 是双射.

命题 1.4.1 设有集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，$\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，满足

(1) 对于 $\forall \lambda \in \Lambda$，有 $A_\lambda \sim B_\lambda$；

(2) 对于 $\forall \alpha, \beta \in \Lambda$ 且 $\alpha \neq \beta$，有 $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$，$B_\alpha \cap B_\beta = \varnothing$. 则 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \sim \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$.

证 对每个 $\lambda \in \Lambda$，有 $A_\lambda \sim B_\lambda$，故存在双射 $f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$. 对 $\forall x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，存在唯一的 $\lambda \in \Lambda$，使 $x \in A_\lambda$. 令 $f(x) = f_\lambda(x)$，则可证 $f: \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \to \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ 是双射.

□

下述命题是容易证明的.

命题 1.4.2 对等关系有如下性质：

(1) 自反性 $A \sim A$；

(2) 对称性 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

(3) 传递性 若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$.

基数的概念 由命题 1.4.2 知：集合之间的对等关系"$\sim$"是一种等价关系(见定义 1.3.2). 按照等价关系"$\sim$"将集合进行分类，两个集合当且仅当它们对等时属于同一类(即，同一个等价类). 对每一类予以一个记号，称此记号是该类中任一集的基数(或势). 集合 E 的基数记作 $\overline{\overline{E}}$. 有限集的基数为其所含元素的个数，空集的基数为 0.

定义 1.4.2 设有集合 A 与 B，记 $\overline{\overline{A}} = \alpha$，$\overline{\overline{B}} = \beta$. 若集合 A 与 B 的一个子集

对等，则称 α 不大于 β，记作 $\alpha \leqslant \beta$（或 $\beta \geqslant \alpha$）；若 $\alpha \leqslant \beta$（或 $\beta \geqslant \alpha$）且 $\alpha \neq \beta$，则称 α 小于 β，记作 $\alpha < \beta$（或 $\beta > \alpha$）.

定理 1.4.3（Cantor-Bernstein 定理） 若集合 X 对等于 Y 的一个子集，集合 Y 对等于 X 的一个子集，那么集合 X 与 Y 对等.

证 按假设，存在两个单射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$. 记 $Y_0 = Y$，令

$$\begin{aligned} X_1 &= X \backslash g(Y_0), \quad & Y_1 &= Y \backslash f(X_1), \\ X_2 &= X \backslash g(Y_1), \quad & Y_2 &= Y \backslash f(X_2), \\ &\cdots\ \cdots & &\cdots\ \cdots \\ X_n &= X \backslash g(Y_{n-1}), \quad & Y_n &= Y \backslash f(X_n), \\ &\cdots\ \cdots & &\cdots\ \cdots \end{aligned}$$

再令 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$，$B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Y_n = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Y_n$. 则有

$$X = A \cup (X \backslash A), \quad Y = B \cup (Y \backslash B). \tag{1.4.1}$$

因为 f 与 g 为单射，所以有 $A \sim f(A)$，$B \sim g(B)$ 且有 $g(\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} Y_n) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} g(Y_n)$. 由

$$f(A) = f(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(X_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y \backslash Y_n) = Y \backslash (\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n) = Y \backslash B,$$

知

$$A \sim Y \backslash B. \tag{1.4.2}$$

由

$$g(B) = g(\bigcap_{n=0}^{\infty} Y_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} g(Y_n) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (X \backslash X_{n+1}) = X \backslash (\bigcup_{n=0}^{\infty} X_{n+1}) = X \backslash A,$$

知

$$B \sim X \backslash A. \tag{1.4.3}$$

最后，根据命题 1.4.1，并结合(1.4.1)、(1.4.2) 和(1.4.3) 式，知 $X \sim Y$. □

推论 1.4.4 设 $A \subset B \subset C$ 且 $A \sim C$. 则 $A \sim B \sim C$.

推论 1.4.5 任一区间 I（开区间、闭区间或半开区间）均与直线 $\mathbf{R}$ 对等.

证 取开区间 $(a, b) \subset I$. 则有 $(a, b) \subset I \subset \mathbf{R}$，且 $(a, b) \sim \mathbf{R}$（见例 1.4.4），所以 $I \sim \mathbf{R}$. □

按照基数的概念，我们可以把定理 1.4.3 写作：设有基数 α, β. 若 $\alpha \leqslant \beta$ 且 $\beta \leqslant \alpha$，则 $\alpha = \beta$.

可以证明：对于任意两个基数α,β，三个关系式"$\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta$"中至多成立一式，且至少成立一式.

命题 1.4.6　设映射 $f:X\to Y$. 则

(1) 若 f 为单射，有 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$；

(2) 若 f 为满射，有 $\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$.

证　(1) 若 f 为单射，则 $f:X\to f(X)$ 为双射. 故 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{f(X)}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$.

(2) 若 f 为满射，则对每个 $y\in Y$，从非空集 $f^{-1}(y)$ 中取定一点记作 $g(y)$. 则 $g:Y\to X$ 是单射. 于是由(1) 知 $\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$. □

例 1.4.5　若 $A\subset B$，且 $A\sim(A\cup C)$，试证明 $B\sim(B\cup C)$.

证　由 $A\sim(A\cup C)$，存在双射 $f:A\to(A\cup C)$. 令

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in A,\\ x, & x\in B\backslash A.\end{cases}$$

则 $g:B\to B\cup C$ 是满射(不一定是单射)，故由命题 1.4.6 知 $\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{B\cup C}}$. 另一方面，因为 $B\subset(B\cup C)$，知 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{B\cup C}}$. 合之有 $B\sim(B\cup C)$.

定义 1.4.3　集合 E 的所有子集所成之集称为 E 的幂集，记作 $\mathcal{P}(E)$，即 $\mathcal{P}(E)=\{A:A\subset E\}$. $\mathcal{P}(E)$ 也记作 2^E. 若 E 的基数为 λ，则 $\mathcal{P}(E)$ 的基数通常记为 2^λ.

定理 1.4.7(无最大基数定理)　设 E 是任一集合. 则 $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{\mathcal{P}(E)}}$.

证　(反证法)若存在双射 $f:E\to\mathcal{P}(E)$. 令 $A=\{x\in E:x\notin f(x)\}$. 由 $A\in\mathcal{P}(E)$ 以及 f 为满射，知存在 $y\in E$，使 $f(y)=A$.

(1) 若 $y\in A$，则由 A 的定义，有 $y\notin f(y)=A$，得矛盾.

(2) 若 $y\notin A$，则由 A 的定义，有 $y\in f(y)=A$，也得矛盾.

从而，E 与 $\mathcal{P}(E)$ 不对等. 另外，易知 $\overline{\overline{E}}\leqslant\overline{\overline{\mathcal{P}(E)}}$，所以 $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{\mathcal{P}(E)}}$. □

1.5　可数集

定义 1.5.1　自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$(读作"阿列夫零"). 若 $A\sim\mathbf{N}$，则称 A 为可数集. 有限集与可数集统称为至多可数集. 若无限集不是可数集，则称之为不可数集.

集合 A 为可数集当且仅当 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，即 A 中的元可以用自然数来编号. 事实上，由于 $A\sim\mathbf{N}$，存在双射 $f:\mathbf{N}\to A$. 这就对 A 的元进行了编号：