

高等学校试用教材

弹性力学

下册

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

弹性力学

下册

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

弹性力学

下 册

徐芝纶 编

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12 字数 290,000

1979年8月第1版 1981年4月第2次印刷

印数15,001—25,500

书号 15012·0178 定价 1.20 元

目 录

(下 册)

第十三章 薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法	1
§ 13-1 有关概念及计算假定	1
§ 13-2 弹性曲面的微分方程	3
§ 13-3 薄板横截面上的内力及应力	7
§ 13-4 边界条件。扭矩的等效剪力	12
§ 13-5 简单例题	16
§ 13-6 简支边矩形薄板的纳维叶解法	21
§ 13-7 矩形薄板的李维解法及一般解法	24
§ 13-8 圆形薄板的弯曲	30
§ 13-9 圆形薄板的轴对称弯曲	33
§ 13-10 圆形薄板在静水压力下的弯曲	39
§ 13-11 变厚度矩形薄板	42
§ 13-12 变厚度圆形薄板	45
§ 13-13 文克勒地基上的基础板	49
§ 13-14 薄板的温度应力	53
第十四章 用差分法及变分法解薄板的小挠度弯曲问题	62
§ 14-1 差分公式。内力及反力的差分表示	62
§ 14-2 差分方程及边界条件	65
§ 14-3 差分法例题	67
§ 14-4 折算弯矩。薄膜比拟。分步差分法	71
§ 14-5 分步差分法应用举例	73
§ 14-6 差分法中对若干问题的处理	76
§ 14-7 瑞次法的应用	81

§ 14-8	瑞次法应用举例	86
§ 14-9	伽辽金法的应用	89
§ 14-10	伽辽金法应用举例	91
第十五章 薄板的稳定问题		97
§ 15-1	薄板受纵横荷载的共同作用	97
§ 15-2	薄板的压曲。临界荷载	101
§ 15-3	四边简支的矩形薄板在均布压力下的压曲	102
§ 15-4	两对边简支的矩形薄板在均布压力下的压曲	106
§ 15-5	极坐标中的压曲微分方程	112
§ 15-6	圆形薄板的压曲	113
§ 15-7	用差分法求临界荷载	117
§ 15-8	用能量法求临界荷载	119
§ 15-9	用能量法求临界荷载举例	122
第十六章 薄板的振动问题		131
§ 16-1	薄板的自由振动	131
§ 16-2	矩形薄板的自由振动	134
§ 16-3	圆形薄板的自由振动	140
§ 16-4	用差分法求自然频率	142
§ 16-5	用能量法求自然频率	145
§ 16-6	用能量法求自然频率举例	148
§ 16-7	薄板的受迫振动	151
第十七章 各向异性板		159
§ 17-1	各向异性体的物理方程	159
§ 17-2	各向异性板的平面应力问题	161
§ 17-3	各向异性板的小挠度弯曲问题	163
§ 17-4	构造上正交各向异性的薄板	166
§ 17-5	小挠度弯曲问题的经典解法	170
§ 17-6	用差分法解小挠度弯曲问题	174
§ 17-7	用变分法解小挠度弯曲问题	176

§ 17-8	压曲问题及振动问题	180
第十八章 薄板的大挠度弯曲问题		184
§ 18-1	基本微分方程及边界条件	184
§ 18-2	无限长薄板的大挠度弯曲	189
§ 18-3	变分法的应用	193
§ 18-4	圆板的轴对称问题	197
§ 18-5	用摄动法解圆板的轴对称问题	199
§ 18-6	用变分法解圆板的轴对称问题	203
第十九章 壳体的一般理论		209
§ 19-1	曲线坐标与正交曲线坐标	209
§ 19-2	正交曲线坐标中的弹性力学几何方程	212
§ 19-3	关于壳体的一些概念	215
§ 19-4	壳体的正交曲线坐标	216
§ 19-5	壳体的几何方程	219
§ 19-6	壳体的内力及物理方程	224
§ 19-7	壳体的平衡微分方程	229
§ 19-8	壳体的边界条件	233
§ 19-9	薄壳的无矩理论	238
第二十章 柱壳		243
§ 20-1	柱壳的无矩理论	243
§ 20-2	容器柱壳的无矩计算	244
§ 20-3	顶盖柱壳的无矩计算	250
§ 20-4	弯曲问题的基本微分方程	253
§ 20-5	圆柱壳在法向荷载下的弯曲	256
§ 20-6	轴对称的弯曲问题	261
§ 20-7	轴对称弯曲问题的近似解答	265
§ 20-8	容器柱壳的近似计算	267
§ 20-9	顶盖柱壳的弯曲问题	271
§ 20-10	顶盖柱壳的三角级数解答	273

§ 20-11 顶盖柱壳的半无矩理论及梁理论	278
第二十一章 回转壳	286
§ 21-1 中面的几何性质	286
§ 21-2 回转壳的无矩理论	288
§ 21-3 轴对称问题的无矩计算	291
§ 21-4 容器回转壳的无矩计算	294
§ 21-5 顶盖回转壳的无矩计算	298
§ 21-6 非轴对称问题的无矩计算	301
§ 21-7 球壳的轴对称弯曲	304
§ 21-8 球壳轴对称弯曲问题的近似解答	308
§ 21-9 球壳受均布压力	312
第二十二章 扁壳	318
§ 22-1 中面的几何性质	318
§ 22-2 基本方程及边界条件	321
§ 22-3 无矩计算。重三角级数解答	324
§ 22-4 无矩计算。单三角级数解答	327
§ 22-5 静水压力作用下的无矩内力	331
§ 22-6 合理中面	345
§ 22-7 用混合法解弯曲问题	347
§ 22-8 混合解函数的引用。级数解答	350
§ 22-9 等曲率扁壳的计算	352
§ 22-10 等曲率扁壳受均布荷载时的简化计算	354
内容索引	363
人名对照表	374

第十三章 薄板的小挠度弯曲问题 及其经典解法

§ 13-1 有关概念及计算假定

在弹性力学里，两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面或棱柱面所围成的物体，称为平板，或简称为板，图 13-1。这两个平行面称为板面，而这个柱面或棱柱面称为侧面或板边。两个板面

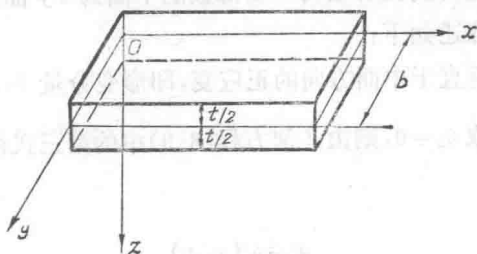


图 13-1

之间的距离 t 称为板的厚度，而平分厚度 t 的平面称为板的中间平面，简称为中面。如果板的厚度 t 远小于中面的最小尺寸 b (例如小于 $b/8$ 至 $b/5$)，这个板就称为薄板，否则就称为厚板。

对于薄板，已经引用一些计算假定从而建立了一套完整的理论，可以用来计算工程上的问题。对于厚板，虽然也有这样或那样的计算方案被提出来，但不便应用于工程实际问题。

当薄板受有一般荷载时，总可以把每一个荷载分解为两个分荷载，一个是作用在薄板的中面之内的所谓纵向荷载，另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载，可以认为它们沿薄板

厚度均匀分布,因而它们所引起的应力、形变和位移,可以按平面应力问题进行计算,如第二章至第七章中所述。横向荷载将使薄板弯曲,它们所引起的应力、形变和位移,可以按薄板弯曲问题进行计算。

当薄板弯曲时,中面所弯成的曲面,称为薄板的弹性曲面,而中面内各点在垂直于中面方向的位移,称为挠度。

本章中只讲述薄板的小挠度弯曲理论,也就是只讨论这样的薄板;它虽然很薄,但仍然具有相当的弯曲刚度,因而它的挠度远小于它的厚度。如果薄板的弯曲刚度很小,以致挠度与厚度属于同阶大小,则须另行建立所谓大挠度弯曲理论,见第十八章。

薄板的小挠度弯曲理论,是以三个计算假定为基础的(这些假定已被大量的实验所证实)。取薄板的中面为 xy 面,图 13-1,这些假定可以陈述如下:

(1) 垂直于中面方向的正应变,即形变分量 ε_z , 极其微小,可以不计。取 $\varepsilon_z=0$, 则由几何方程(8-9)中的第三式得 $\frac{\partial w}{\partial z}=0$, 从而得

$$w = w(x, y). \quad (13-1)$$

这就是说,在中面的任一根法线上,薄板全厚度内的所有各点都具有相同的位移 w , 也就等于挠度。

(2) 应力分量 τ_{zx} 、 τ_{zy} 和 σ_z 远小于其余三个应力分量, 因而是次要的, 它们所引起的形变可以不计(注意: 它们本身却是维持平衡所必需的, 不能不计)。

因为不计 τ_{zx} 及 τ_{zy} 所引起的形变, 所以有

$$\gamma_{zx} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0.$$

通过几何方程(8-9)改用位移表示, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (13-2)$$

由于 $\varepsilon_z = 0, \gamma_{zx} = 0, \gamma_{zy} = 0$, 可见中面的法线在薄板弯曲时保持不伸缩, 并且成为弹性曲面的法线。

因为不计 σ_z 所引起的形变, 所以由物理方程有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (13-3)$$

这就是说, 薄板弯曲问题的物理方程和薄板平面应力问题的物理方程是相同的。

(3) 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移, 即

$$(u)_{z=0} = 0, (v)_{z=0} = 0. \quad (13-4)$$

因为 $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$, 所以有

$$(\varepsilon_x)_{z=0} = 0, (\varepsilon_y)_{z=0} = 0, (\gamma_{xy})_{z=0} = 0.$$

这就是说, 中面的任意一部分, 虽然弯曲成为弹性曲面的一部分, 但它在 xy 面上的投影形状却保持不变。

§ 13-2 弹性曲面的微分方程

薄板弯曲问题是按位移求解的, 取为基本未知函数的是薄板的挠度 w 。因此, 我们要把所有的其它物理量都用 w 来表示, 并建立求解 w 的微分方程, 即所谓弹性曲面微分方程。

首先, 将形变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 用挠度 w 来表示。将方程 (13-2) 对 z 进行积分, 积分时注意 w 只是 x 和 y 的函数, 不随 z 而变, 即得

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z + f_1(x, y), \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z + f_2(x, y).$$

应用方程(13-4),得 $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0$ 。可见

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z, \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y}z.$$

于是可将形变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 用 w 表示如下:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}z. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

在这里,由于挠度 w 是微小的,弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率可以近似地用挠度 w 表示为

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (13-5)$$

所以式(a)也可以改写为

$$\varepsilon_x = \chi_x z, \quad \varepsilon_y = \chi_y z, \quad \gamma_{xy} = 2\chi_{xy} z. \quad (13-6)$$

因为曲率 χ_x, χ_y 和扭率 χ_{xy} 完全确定了薄板所有各点的形变分量,所以这三者就称为薄板的形变分量。

其次,将应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 用 w 来表示。由物理方程(13-3)求解应力分量,得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将式(a)代入式(b),即得所需的表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (13-7)$$

再其次，将应力分量 τ_{zx} 及 τ_{zy} 用 w 来表示。在这里，因为不存在纵向荷载，所以有 $X = Y = 0$ ，而平衡微分方程(8-1)中的前二式可以写成

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.$$

将表达式(13-7)代入，并注意 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ，即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned}$$

注意 w 不随 z 而变，将上列二式对 z 进行积分，得

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + F_1(x, y), \\ \tau_{zy} &= \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + F_2(x, y). \end{aligned}$$

但是，在薄板的下面和上面，有边界条件

$$(\tau_{zx})_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0, \quad (\tau_{zy})_{z=\pm \frac{t}{2}} = 0.$$

应用这些条件求出 $F_1(x, y)$ 及 $F_2(x, y)$ 以后，即得表达式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \tau_{zy} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (13-8)$$

最后，将应力分量 σ_z 也用 w 来表示。利用平衡微分方程(8-1)

中的第三式，取体力分量 $Z=0$ ，得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (c)$$

如果体力分量 Z 并不等于零，我们可以把薄板每单位面积内的体力归入薄板上面的面力，一并用 q 表示，即

$$q = \bar{Z} + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} Z dz \quad (d)$$

这只会对最次要的应力分量 σ_z 引起误差，对其他的应力分量则毫无影响。这样处理，和材料力学中对梁的处理相同。

注意 $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ，将表达式(13-8)代入式(c)，得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 w。$$

对 z 进行积分，并注意 w 不随 z 而变，得

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{t^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 w + F_3(x, y) \quad (e)$$

但是，在薄板的下面，有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=\frac{t}{2}} = 0。$$

将式(e)代入，求出 $F_3(x, y)$ ，再代回式(e)，即得表达式

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[\frac{t^2}{4} \left(z - \frac{t}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(z^3 - \frac{t^3}{8} \right) \right] \nabla^4 w \\ &= -\frac{E t^3}{6(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{t} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{t} \right) \nabla^4 w。 \end{aligned} \quad (13-9)$$

现在来导出求解 w 的微分方程。在薄板的上面，有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}} = -q，$$

其中 q 是薄板单位面积内的横向荷载，包括横向面力及横向体力，如式(d)所示。将表达式(13-9)代入，即得

$$\frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = q，$$

或

$$D\nabla^4 w = q, \quad (13-10)$$

其中的

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (13-11)$$

称为薄板的弯曲刚度,它的因次是[力][长度]。

方程(13-10)称为薄板的弹性曲面微分方程,或挠曲微分方程,是薄板弯曲问题的基本微分方程。求解薄板的小挠度弯曲问题时,须按照薄板侧面上(即板边上)的边界条件,由这个微分方程求出挠度 w ,然后就可以按公式(13-7)至(13-9)求得应力分量。

§ 13-3 薄板横截面上的内力及应力

在绝大多数的情况下,都很难使得应力分量在薄板的侧面上(板边上)精确地满足应力边界条件,而只能应用圣维南原理,使这些应力分量所组成的内力整体地满足边界条件。因此,在讨论薄板弯曲问题的边界条件以前,先来考察这些应力分量所组成的内力。

从薄板内取出一个微小的平行六面体,它的三边的长度分别为 dx 、 dy 和 t ,图13-2。

在垂直于 x 轴的横截面上,作用着 σ_x 、 τ_{xy} 和 τ_{xz} 。由表达式(13-7)可见, σ_x 及 τ_{xy} 与 z 成正比,是 z 的奇函数,所以它们在薄板全厚度上的总和分别等于零,只可能分别合成为弯矩和扭矩。

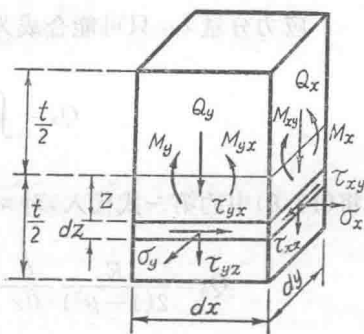


图 13-2

在该横截面的每单位宽度上,应力分量 σ_x 合成为弯矩

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_x dz。$$

将(13-7)中的第一式代入,对 z 进行积分,得

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)。 \end{aligned} \quad (a)$$

与此相似,应力分量 τ_{xy} 将合成为扭矩

$$M_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{xy} dz。$$

将(13-7)中的第三式代入,对 z 进行积分,得

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}。 \end{aligned} \quad (b)$$

应力分量 τ_{xz} 只可能合成为横向剪力,在每单位宽度上为

$$Q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz。$$

将(13-8)中的第一式代入,对 z 进行积分,得

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left(z^2 - \frac{t^2}{4} \right) dz \\ &= -\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w。 \end{aligned} \quad (c)$$

同样,在垂直于 y 轴的横截面上,每单位宽度内的 σ_y 、 τ_{yx} 和 τ_{yz} 也分别合成为如下的弯矩、扭矩和横向剪力:

$$M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \sigma_y dz = -\frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (d)$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z \tau_{yx} dz = -\frac{E t^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = M_{xy}, \quad (e)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz = -\frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (f)$$

利用公式(13-11),式(a)至(f)可以改写为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (13-12)$$

其中的前三式也可以通过表达式(13-5)再改写为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D(\chi_x + \mu \chi_y), \quad M_y = D(\chi_y + \mu \chi_x), \\ M_{xy} &= M_{yx} = D(1-\mu) \chi_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (13-13)$$

利用式(a)至(f),从表达式(13-7)及(13-8)中消去 w , 并利用(13-10)及(13-11)从表达式(13-9)中消去 w , 可以得出各个应力分量与弯矩、扭矩、横向剪力或荷载之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{12M_x}{t^3}z, \\
 \sigma_y &= \frac{12M_y}{t^3}z, \\
 \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \frac{12M_{xy}}{t^3}z, \\
 \tau_{xz} &= \frac{6Q_x}{t^3}\left(\frac{t^2}{4} - z^2\right), \\
 \tau_{yz} &= \frac{6Q_y}{t^3}\left(\frac{t^2}{4} - z^2\right), \\
 \sigma_z &= -2q\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{t}\right)^2\left(1 + \frac{z}{t}\right).
 \end{aligned} \right\} (13-14)$$

沿着薄板的厚度,应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的最大值发生在板面, τ_{xz} 及 τ_{yz} 的最大值发生在中面,而 σ_z 的最大值发生在板的上面,各个最大值为

$$\left. \begin{aligned}
 (\sigma_x)_{z=\frac{t}{2}} &= -(\sigma_x)_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6M_x}{t^2}, \\
 (\sigma_y)_{z=\frac{t}{2}} &= -(\sigma_y)_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6M_y}{t^2}, \\
 (\tau_{xy})_{z=\frac{t}{2}} &= -(\tau_{xy})_{z=-\frac{t}{2}} = \frac{6M_{xy}}{t^2}, \\
 (\tau_{xz})_{z=0} &= \frac{3Q_x}{2t}, \\
 (\tau_{yz})_{z=0} &= \frac{3Q_y}{2t}, \\
 (\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}} &= -q.
 \end{aligned} \right\} (g)$$

注意:以上所提到的内力,都是作用在薄板每单位宽度上的内力,所以弯矩和扭矩的因次都是[力],而不是[力][长度];横向剪力的因次是[力][长度]⁻¹,而不是[力]。

正应力 σ_x 及 σ_y 分别与弯矩 M_x 及 M_y 成正比,因而称为弯应力;剪应力 τ_{xy} 与扭矩 M_{xy} 成正比,因而称为扭应力,剪应力