高等学校试用教材

弹性力学

下册

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

弹性力学

下册

徐芝纶 编

人民教育出版社

高等学校试用教材

弹 性 力 学

下 册

徐 芝 纶 编

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印 装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12 字数 290,000

1979 年 8 月第 1 版 1981 年 4 月第 2 次印刷

印数 15,001—25,500

书号 15012·0178 定价 1.20 元

目　录

（下　册）

第十三章 薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法

§13-1 有关概念及计算假定

在弹性力学里，两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面或棱柱面所围成的物体，称为平板，或简称为板，图 13-1。这两个平行面称为板面，而这个柱面或棱柱面称为侧面或板边。两个板面

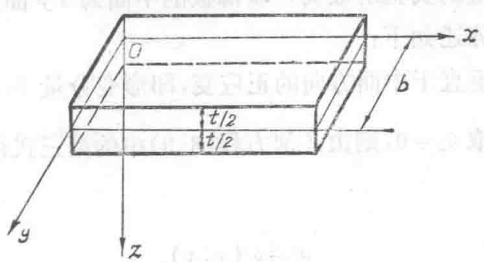

图 13-1

之间的距离 t 称为板的厚度，而平分厚度 t 的平面称为板的中间平面，简称为中面。如果板的厚度 t 远小于中面的最小尺寸 b（例如小于$b/8$ 至 $b/5$），这个板就称为薄板，否则就称为厚板。

对于薄板，已经引用一些计算假定从而建立了一套完整的理论，可以用来计算工程上的问题。对于厚板，虽然也有这样或那样的计算方案被提出来，但不便应用于工程实际问题。

当薄板受有一般荷载时，总可以把每一个荷载分解为两个分荷载，一个是作用在薄板的中面之内的所谓纵向荷载，另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载，可以认为它们沿薄板

厚度均匀分布,因而它们所引起的应力、形变和位移,可以按平面应力问题进行计算,如第二章至第七章中所述。横向荷载将使薄板弯曲,它们所引起的应力、形变和位移,可以按薄板弯曲问题进行计算。

当薄板弯曲时,中面所弯成的曲面,称为薄板的弹性曲面,而中面内各点在垂直于中面方向的位移,称为挠度。

本章中只讲述薄板的小挠度弯曲理论,也就是只讨论这样的薄板:它虽然很薄,但仍然具有相当的弯曲刚度,因而它的挠度远小于它的厚度。如果薄板的弯曲刚度很小,以致挠度与厚度属于同阶大小,则须另行建立所谓大挠度弯曲理论,见第十八章。

薄板的小挠度弯曲理论,是以三个计算假定为基础的(这些假定已被大量的实验所证实)。取薄板的中面为 xy 面,图 13-1,这些假定可以陈述如下:

(1) 垂直于中面方向的正应变,即形变分量 ε_z,极其微小,可以不计。取 $\varepsilon_z=0$,则由几何方程(8-9)中的第三式得 $\dfrac{\partial w}{\partial z}=0$,从而得

$$w=w(x,y)。\tag{13-1}$$

这就是说,在中面的任一根法线上,薄板全厚度内的所有各点都具有相同的位移 w,也就等于挠度。

(2) 应力分量 τ_{zx}、τ_{zy} 和 σ_z 远小于其余三个应力分量,因而是次要的,它们所引起的形变可以不计(注意:它们本身却是维持平衡所必需的,不能不计)。

因为不计 τ_{zx} 及 τ_{zy} 所引起的形变,所以有

$$\gamma_{zx}=0,\quad \gamma_{yz}=0。$$

通过几何方程(8-9)改用位移表示,即得

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y}。\tag{13-2}$$

由于 $\varepsilon_z=0,\gamma_{zx}=0,\gamma_{yz}=0$，可见中面的法线在薄板弯曲时保持不伸缩，并且成为弹性曲面的法线。

因为不计 σ_z 所引起的形变，所以由物理方程有

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y),\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x),\\
\gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}。
\end{aligned}\right\}\tag{13-3}$$

这就是说，薄板弯曲问题的物理方程和薄板平面应力问题的物理方程是相同的。

(3) 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移，即

$$(u)_{z=0}=0,(v)_{z=0}=0。\tag{13-4}$$

因为 $\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$， $\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$，所以有

$$(\varepsilon_x)_{z=0}=0,(\varepsilon_y)_{z=0}=0,(\gamma_{xy})_{z=0}=0。$$

这就是说，中面的任意一部分，虽然弯曲成为弹性曲面的一部分，但它在 xy 面上的投影形状却保持不变。

§ 13-2 弹性曲面的微分方程

薄板弯曲问题是按位移求解的，取为基本未知函数的是薄板的挠度 w。因此，我们要把所有的其它物理量都用 w 来表示，并建立求解 w 的微分方程，即所谓弹性曲面微分方程。

首先，将形变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy} 用挠度 w 来表示。将方程 (13-2) 对 z 进行积分，积分时注意 w 只是 x 和 y 的函数，不随 z 而变，即得

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z+f_1(x,y),\quad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z+f_2(x,y)。$$

应用方程(13-4)，得 $f_1(x,y)=0, f_2(x,y)=0$。可见

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z,\quad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z。$$

于是可将形变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy} 用 w 表示如下：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z,\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z,\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}z。\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

在这里，由于挠度 w 是微小的，弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率可以近似地用挠度 w 表示为

$$\chi_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \chi_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\chi_{xy}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\tag{13-5}$$

所以式(a)也可以改写为

$$\varepsilon_x=\chi_x z,\varepsilon_y=\chi_y z,\ \gamma_{xy}=2\chi_{xy}z。\tag{13-6}$$

因为曲率 χ_x、χ_y和扭率 χ_{xy} 完全确定了薄板所有各点的形变分量，所以这三者就称为薄板的形变分量。

其次，将应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 用 w 来表示。由物理方程(13-3)求解应力分量，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y),\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x),\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}。\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

将式(a)代入式(b)，即得所需的表达式：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。
\end{aligned}\right\}\tag{13-7}
$$

再其次，将应力分量 τ_{zx} 及 τ_{zy} 用 w 来表示。在这里,因为不存在纵向荷载,所以有 $X=Y=0$,而平衡微分方程(8-1)中的前二式可以写成

$$
\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y},\quad \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}。
$$

将表达式(13-7)代入，并注意 $\tau_{yx}=\tau_{xy}$，即得

$$
\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)=\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,
$$

$$
\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right)=\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w。
$$

注意 w 不随 z 而变,将上列二式对 z 进行积分，得

$$
\tau_{zx}=\frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+F_1(x,y),
$$

$$
\tau_{zy}=\frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w+F_2(x,y)。
$$

但是,在薄板的下面和上面,有边界条件

$$
(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\qquad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0。
$$

应用这些条件求出 $F_1(x,y)$ 及 $F_2(x,y)$ 以后,即得表达式

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{zx} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(z^2-\frac{t^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,\\
\tau_{zy} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(z^2-\frac{t^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w。
\end{aligned}\right\}\tag{13-8}
$$

最后,将应力分量 σ_z 也用 w 来表示。利用平衡微分方程(8-1)

中的第三式，取体力分量$Z=0$，得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}。\tag{c}$$

如果体力分量Z并不等于零，我们可以把薄板每单位面积内的体力归入薄板上面的面力，一并用q表示，即

$$q=\bar{Z}+\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} Z dz。\tag{d}$$

这只会对最次要的应力分量σ_z引起误差，对其他的应力分量则毫无影响。这样处理，和材料力学中对梁的处理相同。

注意$\tau_{xz}=\tau_{zx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，将表达式(13-8)代入式(c)，得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{t^2}{4}-z^2\right)\nabla^4 w。$$

对z进行积分，并注意w不随z而变，得

$$\sigma_z=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{t^2}{4}z-\frac{z^3}{3}\right)\nabla^4 w+F_3(x,y)。\tag{e}$$

但是，在薄板的下面，有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=\frac{t}{2}}=0。$$

将式(e)代入，求出$F_3(x,y)$，再代回式(e)，即得表达式

$$\begin{aligned}\sigma_z&=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{t^2}{4}\left(z-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(z^3-\frac{t^3}{8}\right)\right]\nabla^4 w\\&=-\frac{Et^3}{6(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{t}\right)^2\left(1+\frac{z}{t}\right)\nabla^4 w。\end{aligned}\tag{13-9}$$

现在来导出求解w的微分方程。在薄板的上面，有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}}=-q,$$

其中q是薄板单位面积内的横向荷载，包括横向面力及横向体力，如式(d)所示。将表达式(13-9)代入，即得

$$\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^4 w=q,$$

或

$$D\nabla^4 w=q,\tag{13-10}$$

其中的

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\tag{13-11}$$

称为薄板的弯曲刚度，它的因次是[力][长度]。

方程（13-10）称为薄板的弹性曲面微分方程，或挠曲微分方程，是薄板弯曲问题的基本微分方程。求解薄板的小挠度弯曲问题时，须按照薄板侧面上(即板边上)的边界条件，由这个微分方程求出挠度 w，然后就可以按公式(13-7)至(13-9)求得应力分量。

§ 13-3 薄板横截面上的内力及应力

在绝大多数的情况下，都很难使得应力分量在薄板的侧面上(板边上)精确地满足应力边界条件，而只能应用圣维南原理，使这些应力分量所组成的内力整体地满足边界条件。因此，在讨论薄板弯曲问题的边界条件以前，先来考察这些应力分量所组成的内力。

从薄板内取出一个微小的平行六面体，它的三边的长度分别为dx、dy 和 t，图 13-2。

在垂直于 x 轴的横截面上，作用着 σ_x、τ_{xy} 和 τ_{xz}。由表达式(13-7)可见，σ_x 及 τ_{xy} 与 z 成正比，是 z 的奇函数，所以它们在薄板全厚度上的总和分别等于零，只可能分别合成为弯矩和扭矩。

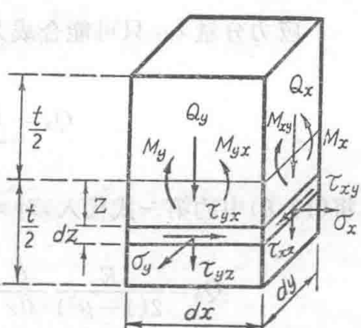

图 13-2

在该横截面的每单位宽度上，应力分量 σ_x 合成为弯矩

$$M_x=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\sigma_x dz。$$

将(13-7)中的第一式代入，对 z 进行积分，得

$$M_x=-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz$$

$$=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)。\quad (a)$$

与此相似，应力分量 τ_{xy} 将合成为扭矩

$$M_{xy}=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\tau_{xy} dz。$$

将(13-7)中的第三式代入，对 z 进行积分，得

$$M_{xy}=-\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz$$

$$=-\frac{Et^3}{12(1+\mu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。\quad (b)$$

应力分量 τ_{xz} 只可能合成为横向剪力，在每单位宽度上为

$$Q_x=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz。$$

将(13-8)中的第一式代入，对 z 进行积分，得

$$Q_x=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\left(z^2-\frac{t^2}{4}\right)dz$$

$$=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w。\quad (c)$$

同样，在垂直于 y 轴的横截面上，每单位宽度内的 σ_y、τ_{yx} 和 τ_{yz} 也分别合成为如下的弯矩、扭矩和横向剪力：

$$M_y=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\sigma_y dz=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad (d)$$

$$M_{yx}=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\tau_{yx} dz=-\frac{Et^3}{12(1+\mu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=M_{xy}, \quad (e)$$

$$Q_y=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w。 \quad (f)$$

利用公式(13-11)，式(a)至(f)可以改写为

$$\left.\begin{aligned}
&M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
&M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
&M_{xy}=M_{yx}=-D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\\
&Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,\\
&Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w,
\end{aligned}\right\} \quad (13\text{-}12)$$

其中的前三式也可以通过表达式(13-5)再改写为

$$\left.\begin{aligned}
&M_x=D(\chi_x+\mu\chi_y),\ M_y=D(\chi_y+\mu\chi_x),\\
&M_{xy}=M_{yx}=D(1-\mu)\chi_{xy}。
\end{aligned}\right\} \quad (13\text{-}13)$$

利用式(a)至(f)，从表达式(13-7)及(13-8)中消去 w，并利用(13-10)及(13-11)从表达式(13-9)中消去 w，可以得出各个应力分量与弯矩、扭矩、横向剪力或荷载之间的关系如下：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{12M_x}{t^3}z,\\
\sigma_y&=\frac{12M_y}{t^3}z,\\
\tau_{xy}=\tau_{yx}&=\frac{12M_{xy}}{t^3}z,\\
\tau_{xz}&=\frac{6Q_x}{t^3}\left(\frac{t^2}{4}-z^2\right),\\
\tau_{yz}&=\frac{6Q_y}{t^3}\left(\frac{t^2}{4}-z^2\right),\\
\sigma_z&=-2q\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{t}\right)^2\left(1+\frac{z}{t}\right)。
\end{aligned}\right\}\tag{13-14}
$$

沿着薄板的厚度，应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 的最大值发生在板面， τ_{xz} 及 τ_{yz} 的最大值发生在中面，而 σ_z 的最大值发生在板的上面，各个最大值为

$$
\left.\begin{aligned}
(\sigma_x)_{z=\frac{t}{2}}&=-(\sigma_x)_{z=-\frac{t}{2}}=\frac{6M_x}{t^2},\\
(\sigma_y)_{z=\frac{t}{2}}&=-(\sigma_y)_{z=-\frac{t}{2}}=\frac{6M_y}{t^2},\\
(\tau_{xy})_{z=\frac{t}{2}}&=-(\tau_{xy})_{z=-\frac{t}{2}}=\frac{6M_{xy}}{t^2},\\
(\tau_{zx})_{z=0}&=\frac{3Q_x}{2t},\\
(\tau_{zy})_{z=0}&=\frac{3Q_y}{2t},\\
(\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}}&=-q。
\end{aligned}\right\}\tag{g}
$$

注意：以上所提到的内力，都是作用在薄板每单位宽度上的内力，所以弯矩和扭矩的因次都是[力]，而不是[力][长度]；横向剪力的因次是[力][长度]$^{-1}$，而不是[力]。

正应力 σ_x 及 σ_y 分别与弯矩 M_x 及 M_y 成正比，因而称为弯应力；剪应力 τ_{xy} 与扭矩 M_{xy} 成正比，因而称为扭应力，剪应力