应用型本科院校"十二五"规划教材/数学

主编　于　丽

高等数学

下册　（第2版）

Advanced Mathematics

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

哈爾濱工業大學出版社

应用型本科院校[redacted]数学

主　编　于　丽

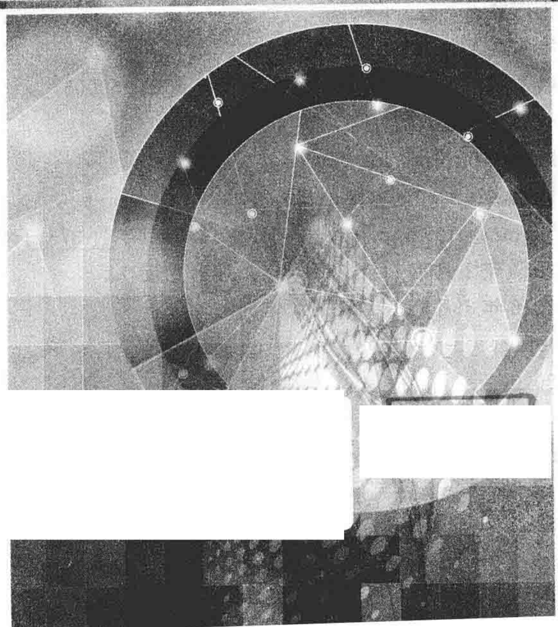
副主编　徐　萍　陈佳妮

　　　　李世巍　丁　敏

高等数学

下册　（第2版）

Advanced Mathematics



哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

全书分上、下两册出版。本册(下册)内容包括:第 5 章向量代数与空间解析几何;第 6 章多元函数微分学;第 7 章多元函数积分学;第 8 章无穷级数;第 9 章 Mathematica 实验。

本书适合于应用型本科院校工程类、经济类、管理类专业学生自学及教学使用,也可供工程技术、科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下/于丽主编.—2 版.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

应用型本科院校“十二五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5800 - 0

应用型本科院校“十二五”规划教材

Ⅰ.①高… Ⅱ.①于… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 318801 号

策划编辑 杜 燕 赵文斌
责任编辑 李广鑫
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨久利印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.25 字数 373 千字
版 次 2014 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 2 版
2016 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 5800 - 0
定 价 30.00 元

《应用型本科院校“十二五”规划教材》编委会

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校“十二五”规划教材》即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校“十二五”规划教材》，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神，根据黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标

及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

《应用型本科院校“十二五”规划教材》的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。

第 2 版前言

随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，应用型教育已进入了一个飞速发展时期。为了更好地适应培养高等技术应用型人才的需要，促进和加强应用型本科院校高等数学的教学改革和教材建设，由哈尔滨远东理工学院数学教研室教师编写了这本非数学类的教材。

在编写中，我们结合应用型本科院校的实际情况，遵循“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，在保证科学性的基础上，吸取了许多国内优秀教材的精华，注意处理基础与应用、理论与实践的关系，适当地削弱理论证明，注重计算能力、分析问题能力、解决问题能力的培养，通俗易懂，既便于学生学习，又便于教师参考。

本教材由于丽任主编，由徐萍、陈佳妮、李世巍、丁敏任副主编。编写分工如下：丁敏编写第 5 章向量代数与空间解析几何；陈佳妮编写第 6 章多元函数微分学；徐萍编写第 7 章多元函数积分学；于丽编写第 8 章无穷级数；李世巍编写第 9 章 Mathematica 实验。

由于水平有限，书中难免有不妥之处，殷切希望广大读者批评指正，以便不断地改善。

编　者

2015 年 12 月

目　　录

第 5 章

向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过建立平面直角坐标系，使平面上的点与二元有序实数组建立了一一对应关系，并把平面上的图形与代数方程对应起来，从而利用代数的方法研究平面几何问题. 空间解析几何也可按照类似的方法，建立空间上的点与三元有序实数组、空间图形与代数方程之间的一一对应关系，并利用代数的方法研究空间几何问题.

本章首先介绍向量的基本知识，将平面向量的有关知识推广到空间向量，并以空间向量为工具讨论空间平面与直线，介绍空间曲面与曲线. 掌握这些内容对于今后学习多元函数的微积分学具有十分重要的作用.

5.1 向量及其线性运算

一、向量的概念

客观世界的事物中，存在着这样一类量，它们既有大小，又有方向，我们称这一类量为向量(或矢量)，例如力、位移、速度等. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，因此在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量(以后简称向量). 在数学上，常用一条有向线段来表示向量，其中有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 如图 5.1，以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$，有时也用一个黑体字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等来表示.

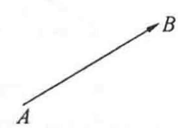


图 5.1

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的大小相同而方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

向量的大小叫作向量的模. 向量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量叫作单位向量. 一般地，我们用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量. 模等于零的向量叫作零向量，记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看作是任意的.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的模相等，即 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，且方向相同，我们称 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 在数学上，经过平行移动后能够完全重合的向量是相等的.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$(设 $\varphi=\angle AOB$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$) 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 5.2)，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 或 $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$，

即$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\varphi$. 如果向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在0到$\pi$之间任意取值.

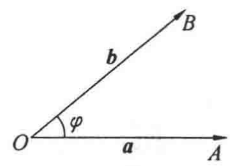


图5.2

如果$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$或$\pi$，称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记作$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 如果$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$，称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在0到$\pi$之间任意取值，因此可以认为零向量与任何向量都平行，也可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上. 因此，两个向量平行，又称为两个向量共线.

类似地，还有向量共面的概念. 设$k(k\geqslant 3)$个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果k个终点和公共起点在一个平面上，称这k个向量共面.

二、向量的线性运算

向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

在几何上将向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的起点放在一起，并以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为邻边作平行四边形，则从起点A到对角顶点C的向量称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和向量，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图5.3). 将向量$\boldsymbol{b}$平移至其起点与$\boldsymbol{a}$的终点重合，从向量$\boldsymbol{a}$的起点至向量$\boldsymbol{b}$的终点的向量也是向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和向量(图5.4). 前者称为向量加法的平行四边形法则，后者称为向量加法的三角形法则. 如图5.5，三角形法则可推广到多个向量的加法.

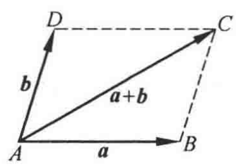


图5.3

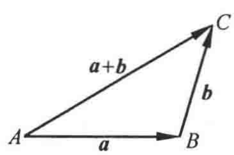


图5.4

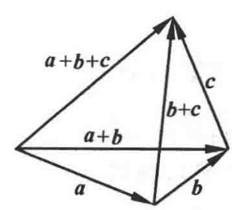


图5.5

由向量加法的规定可知，向量的加法满足如下的性质：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为，由向量加法的规定(三角形法则)，参见图5.3：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},$$

所以交换律成立. 又如图5.5，先作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$再加上$\boldsymbol{c}$，即得和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，若以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$相加，则可得同样结果，所以结合律成立.

2. 向量的减法

前面我们已经定义了负向量，我们规定两个向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差，即把向量$-\boldsymbol{a}$加到向量$\boldsymbol{b}$上，便得$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，即$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$(图5.6).

按此规定，两个向量的减法也可按三角形法则进行：把$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的起点放在一起，从$\boldsymbol{a}$的

终点至 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量即为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 5.7).

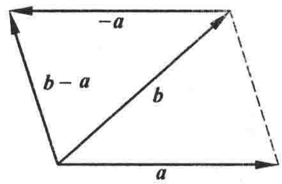


图 5.6

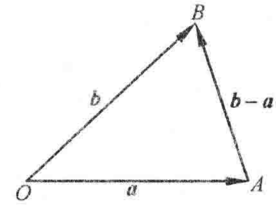


图 5.7

3. 向量与数的乘法

设 λ 为任一实数,向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,并规定:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;

(3) 当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$(零向量),此时它的方向可以是任意的.

特别地,当 $\lambda=\pm1$ 时,有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘法满足如下运算规律:

(1) 交换律:$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda$;

(2) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$(其中 λ、μ 为常数);

(3) 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

证　以下将以结合律为例给予证明. 由向量与数的乘积的规定可知,向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$、$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$、$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行的向量,它们的指向也是相同的,且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a}).$$

前面已经介绍过,模长等于 1 的向量叫作单位向量. 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,显然有

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|},$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 5.1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证　条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值,即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,而且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,即

$$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{0}|=0.$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,故 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$.

定理 5.1 是建立数轴的理论依据.我们知道,给定一个点、一个方向及单位长度,就确定了一条数轴.由于一个单位向量既确定了方向,又确定了单位长度,因此,给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴.设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox(图 5.8),对于轴上任一点 P,对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$,由于 $\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{i}$,根据定理 5.1,必有唯一的实数 x,使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(实数 x 叫作轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值),并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应.于是

图 5.8

$$点\ P\leftrightarrow 向量\ \overrightarrow{OP}\leftrightarrow 实数\ x,$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系.据此,定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知,轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$.

三、空间直角坐标系

空间直角坐标系是平面直角坐标系的自然推广,也是常用的一种空间坐标系.在平面直角坐标系中,一个点的位置可以用两个数组成的有序数组来描绘,而空间中一个点的位置,需要三个数所组成的有序数组来确定.

在空间中取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$,就确定了以点 O 为原点三条具有相同单位长度并且两两互相垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称坐标轴.通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则在铅垂线上,它们的正方向符合右手规则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴的正向时,竖起的大拇指的指向为 z 轴的正向(图 5.9),这样就建立了空间直角坐标系,这个坐标系称为右手直角坐标系,也称为 $O\text{-}xyz$ 坐标系,点 O 称为坐标原点.

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,由 x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面,由 y 轴与 z 轴所确定的坐标面称为 yOz 面,由 z 轴与 x 轴所确定的坐标面称为 zOx 面,这三个平面统称为坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,每部分叫作一个卦限,共八个卦限,其中含有 x 轴、y 轴、z 轴正半轴那个卦限称为第一卦限,其他第二、第三、第四卦限在 xOy 面上方按逆时针方向依次确定,并分别用罗马数字记为 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限,在 xOy 面下方与 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限相对的依次为第五至第八卦限,记为 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限(图 5.10).

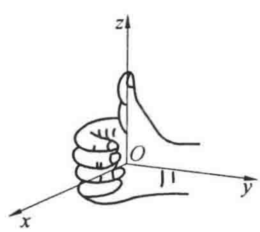


图 5.9

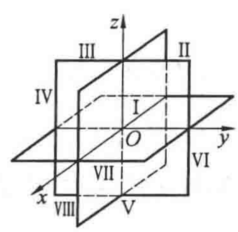


图 5.10

在空间中建立了直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 后,就可以建立空间中的点与 $\mathbf{R}^3$ 中的元素之间的一一对应关系.

在空间中任取一点 M，过点 M 作三个平面分别垂直于三个坐标轴并分别交 x 轴、y 轴、z 轴于点 P、Q、R(图 5.11). 设 P、Q、R 在三个坐标轴上的坐标分别为 x、y、z，则 $(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$，并且元素 (x,y,z) 由点 M 唯一确定. 称 (x,y,z) 为点 M 的坐标，其中 x 称为点 M 的横坐标，y 称为点 M 的纵坐标，z 称为点 M 的竖坐标，记点 M 为 $M(x,y,z)$.

另一方面，对任意的 $(x,y,z)\in \mathbf{R}^3$，则在 x 轴、y 轴、z 轴上分别存在点 P、Q、R，并且它们的坐标为 x、y、z. 过点 P、Q、R 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，这三个平面的交点 M 由 (x,y,z) 唯一确定.

综上可知，空间中的点与 $\mathbf{R}^3$ 中的元素可以建立一一对应关系. 在不致于混淆的情况下，将 $\mathbf{R}^3$ 中的元素称为空间中的点，$\mathbf{R}^3$ 也称为空间.

下面来定义 $\mathbf{R}^3$ 中的任意两点间的距离.

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的任意两点，过点 M_1 与点 M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面，这六个平面围成一个以线段 M_1M_2 为对角线的长方体(图 5.12)，称线段 M_1M_2 的长度为点 M_1 与点 M_2 之间的距离，记为 $|M_1M_2|$. 由图 5.12 可知

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为 $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

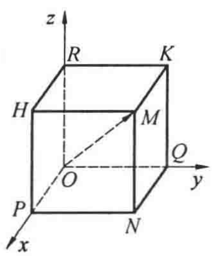


图 5.11

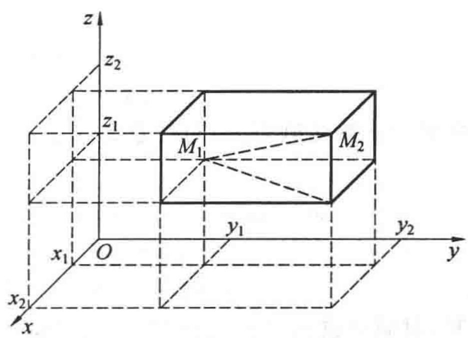


图 5.12

四、向量的坐标表示

下面建立 $\mathbf{R}^3$ 中的点与向量之间的一一对应关系.

在空间中建立直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 后，选取分别与 x 轴、y 轴、z 轴的正方向相同的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，并称它们为 $O\text{-}xyz$ 坐标系下的基本单位向量.

对应空间中的任一向量 $\overrightarrow{OM}$，把它的起点放在坐标原点 $O(0,0,0)$，终点 M 对应的坐标记为 (x,y,z). 以 $\overrightarrow{OM}$ 为对角线并以三个坐标轴为棱作一个长方体(图 5.11)，则

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

于是由 $\boldsymbol{i}\,/\!/\,\overrightarrow{OP}$，$\boldsymbol{j}\,/\!/\,\overrightarrow{OQ}$，$\boldsymbol{k}\,/\!/\,\overrightarrow{OR}$ 可得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$.

由此可得

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 按基本单位向量的分解式，其中 $x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 沿 x 轴、y 轴、z 轴方向的分向量. 此时，有序数组 (x,y,z) 称为 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，并记为 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，

称其为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表达式.

由上面的讨论可推知,对于空间中的每一个向量$\overrightarrow{OM}$,在空间$\mathbf{R}^3$中存在唯一的一点$M(x,y,z)$,使得$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$;反之,对于空间$\mathbf{R}^3$中的每一个点$M(x,y,z)$,也可以唯一确定一个向量$\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$.

向量$\overrightarrow{OM}$称为点M关于原点O的位置向量或向径.由此表明,一个点与该点的向径有相同的坐标,这样空间中所有向量构成的集合与$\mathbf{R}^3$构成一一对应关系,即

$$点\ M\leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z).$$

在不致混淆的情况下,空间中所有向量构成的集合也记为$\mathbf{R}^3$,(x,y,z)也称为三维向量或向量.空间解析几何中所说的向量都是指三维向量.

坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征:如果点M在xOy面上,则$z=0$;在yOz面上,则$x=0$;在zOx面上,则$y=0$.如果点M在z轴上,则$x=y=0$;在x轴上,则$y=z=0$;在y轴上,则$z=x=0$.

利用向量的坐标表达式可知,向量的线性运算有以下三种情况:

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$

λ为任意实数,则有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z);$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z);$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由向量的运算法则可知,对任意的向量$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$、$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$及任意的实数$\lambda$、$\mu$,有

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+\mu(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(\lambda a_x+\mu b_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y+\mu b_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z+\mu b_z)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x+\mu b_x,\lambda a_y+\mu b_y,\lambda a_z+\mu b_z).\end{aligned}$$

由此可知,对向量进行线性运算时,只须对其各个坐标分别进行相应的运算.利用向量的坐标表达式可以得到两向量平行的充分必要条件:

定理 5.2　对于给定的向量$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$、$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}$平行的充分必要条件是:存在实数$\lambda$,使得

$$(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z).$$

【例 5.1】　已知空间中的两点$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$以及实数$\lambda(\lambda\neq-1)$.如果点P在直线AB上,且$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,试求点$P$的坐标.

解　设点P的坐标为(x,y,z),则由$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$可得

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

于是由向量相等的定义可得

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\\ z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\end{cases},$$

即点 P 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

通常将点 P 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，得到线段 AB 的中点 P 的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

通过本例我们看到，记号 (x,y,z) 既可以表示点又可以表示向量. 在几何中，点与向量是两个不同的概念，不可混淆. 因此在遇到记号 (x,y,z) 时，须从上下文去确定它表示的是一个点还是一个向量. 当 (x,y,z) 表示向量时，可对它进行运算；当 (x,y,z) 表示点时，就不能进行运算.

五、向量的模方向角与方向余弦

为了表示向量的方向，我们引入方向角的概念.

对于任意一个向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，由空间 $\mathbf{R}^3$ 中两点间的距离公式可知，向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 的模可用其坐标表示为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

如果 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，则把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向之间的夹角 α、β、γ（规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$）（图 5.13）称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，称 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 由向量的坐标表达式可推得

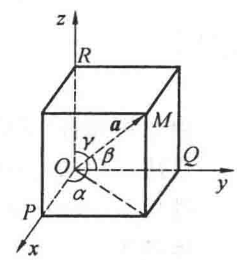


图 5.13

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

从而有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

并且

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(x,y,z)=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_a.$$

上式表明 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

【例 5.2】 求向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 的模，方向角与它的单位向量 $\boldsymbol{e}_a$，并用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示 $\boldsymbol{a}$.

解　因为 $\boldsymbol{a}=(2,-3,5)$，于是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38},\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{\sqrt{38}}(2,-3,5);$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角分别记为 α、β、γ，则方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{38}},\cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{38}},\cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{38}};$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角为

$$\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{38}},\beta=\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{38}}\right),\gamma=\arccos\frac{5}{\sqrt{38}};$$

$$\boldsymbol{a}=\sqrt{38}\,\boldsymbol{e}_a.$$

六、向量在轴上的投影

若撇开 y 轴和 z 轴，单独考虑 x 轴与向量$\overrightarrow{OM}$ 的关系，那么从图 5.13 可见，过点 M 作与 x 轴垂直的平面，此平面与 x 轴的交点即为点 P. 做出点 P，即得向量$\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴上的分向量$\overrightarrow{OP}$，进而由$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，便得向量在 x 轴上的坐标 x，且 $x=|\overrightarrow{OM}|\cos\alpha$.

一般地，设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴(图 5.14). 任给向量$\overrightarrow{OM}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交轴于点 M'(点 M' 叫作点 M 在 u 轴上的投影)，则向量$\overrightarrow{OM'}$ 称为向量$\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的分向量. 设$\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量$\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OM}$ 或 $(\overrightarrow{OM})_u$.

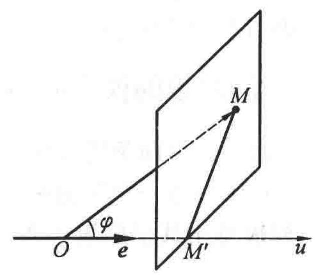


图 5.14

由此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中的坐标 a_x、a_y、a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a},a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a},a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a},$$

或记作

$$a_x=(\boldsymbol{a})_x,a_y=(\boldsymbol{a})_y,a_z=(\boldsymbol{a})_z.$$

由此可知，向量的投影具有与坐标相同的性质：

性质 1　$(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$，其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角；

性质 2　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$；

性质 3　$(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$.

【例 5.3】　设立方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|\overrightarrow{OA}|=a$，求$\overrightarrow{OA}$ 在$\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

解　如图 5.15，记 $\angle AOM=\varphi$，有

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

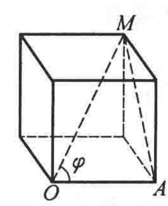


图 5.15

习题 5.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(2,-1,3)$；$B(3,1,-4)$；$C(-1,2,-1)$；$D(-1,-2,-5)$；$E(-1,-1,3)$.

2. 求点 (a,b,c) 关于各坐标面、各坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.