现代数学基础丛书·典藏版 35

黎曼曲面

吕以辇 张学莲 著

科学出版社

现代数学基础丛书·典藏版 35

黎曼曲面

吕以辇　张学莲　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要介绍Riemann曲面的基本理论，包括：Riemann曲面的概念、Weierstrass意义下的解析函数与Riemann曲面、覆盖曲面、微分形式与积分、单值化定理及其应用、微分形式空间、紧Riemann曲面和非紧Riemann曲面.

本书可作为大学数学系高年级学生和研究生的教科书，也可作为大专院校其它有关专业师生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础丛书：典藏版. 第1辑／程民德主编. —北京：科学出版社，2015.5

ISBN 978-7-03-044403-5

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①程… Ⅲ. ①数学基础 Ⅳ. ①O14

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第110803号

责任编辑：梅 霖 刘嘉善／责任校对：钟 洋
责任印制：徐晓晨／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1991年4月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2015年7月 印 刷 印张：10 3/4
字数：173 000

序　言

Riemann 曲面理论是现代数学的基本理论之一，它不但自身不断地发展，而且越来越广泛地被应用于其它学科．例如，在复分析领域内各分支学科，特别是 Teichmüller 理论及近年来发展很快的复解析动力系统等，都离不开 Riemann 曲面理论作为基础．

本书的目的是给出 Riemann 曲面的必要而基本的理论，以使国内研究生及其他读者，在短时间内能掌握这门理论，并能够将它应用到其他学科中去．

书中主要内容为单值化定理、紧 Riemann 曲面及非紧 Riemann 曲面理论．在单值化定理这一章中，还介绍了 Klein 群及 Fuchs 群等基础知识．在紧 Riemann 曲面这一章中，主要是 Riemann-Roch 定理及其应用，其中特别介绍 q-次全纯微分空间．对 Riemann-Roch 定理的证明采用了经典的因而是初学者比较容易理解的方法．对于非紧 Riemann 曲面论，本书证明了关于亚纯函数构造的 Mittag-Leffler 定理，并用无穷乘积构造了全纯函数的 Weierstrass 定理．我们通过具体作出 Cauchy 核、Cauchy 积分及通过 Runge 定理，用逼近方法，给出这些定理的构造性证明，证明的思想方法力求与平面复分析的方法相似，这对于进一步研究非紧 Riemann 曲面上的函数论问题将会有好处．

国内关于 Riemann 曲面理论的书至今不多．1978 年伍鸿熙教授到中国科学院数学研究所讲授紧 Riemann 曲面理论．后来，伍鸿熙教授、陈志华教授和我合作写成《紧黎曼曲面引论》一书（科学出版社，1983 年出版）．该书出版后，对国内数学研究起到了一定的作用．这本《黎曼曲面》希望与《紧黎曼曲面引论》相辅相成．读者如果先读一下这本书，将会比较容易地读上述的《紧黎曼曲面引论》．这两本书合在一起，将会使读者更系统地了解 Riemann 曲面理论．

本书部分内容曾先后在北京大学数学系等单位为研究生及大学高年级学生讲授过．在此基础上，我与张学莲副教授合作编撰成这本书．在整理誊清的过程中，得到伍鹏程同志及研究生华敏刚、彭贵爱的帮助，谨对他们表示感谢．由于时间较紧，书中难免有不妥之处，敬请读者提出宝贵意见．

吕以辇
中国科学院数学研究所
1989 年 12 月

《现代数学基础丛书》已出版书目

1　数理逻辑基础(上册)　1981.1　胡世华　陆钟万　著
2　数理逻辑基础(下册)　1982.8　胡世华　陆钟万　著
3　紧黎曼曲面引论　1981.3　伍鸿熙　吕以辇　陈志华　著
4　组合论(上册)　1981.10　柯　召　魏万迪　著
5　组合论(下册)　1987.12　魏万迪　著
6　数理统计引论　1981.11　陈希孺　著
7　多元统计分析引论　1982.6　张尧庭　方开泰　著
8　有限群构造(上册)　1982.11　张远达　著
9　有限群构造(下册)　1982.12　张远达　著
10　测度论基础　1983.9　朱成熹　著
11　分析概率论　1984.4　胡迪鹤　著
12　微分方程定性理论　1985.5　张芷芬　丁同仁　黄文灶　董镇喜　著
13　傅里叶积分算子理论及其应用　1985.9　仇庆久　陈恕行　是嘉鸿　刘景麟　蒋鲁敏　编
14　辛几何引论　1986.3　J.柯歇尔　邹异明　著
15　概率论基础和随机过程　1986.6　王寿仁　编著
16　算子代数　1986.6　李炳仁　著
17　线性偏微分算子引论(上册)　1986.8　齐民友　编著
18　线性偏微分算子引论(下册)　1992.1　齐民友　徐超江　编著
19　实用微分几何引论　1986.11　苏步青　华宣积　忻元龙　著
20　微分动力系统原理　1987.2　张筑生　著
21　线性代数群表示导论(上册)　1987.2　曹锡华　王建磐　著
22　模型论基础　1987.8　王世强　著
23　递归论　1987.11　莫绍揆　著
24　拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用　1988.1　李　忠　著
25　代数体函数与常微分方程　1988.2　何育赞　萧修治　著
26　同调代数　1988.2　周伯壎　著
27　近代调和分析方法及其应用　1988.6　韩永生　著
28　带有时滞的动力系统的稳定性　1989.10　秦元勋　刘永清　王　联　郑祖庥　著
29　代数拓扑与示性类　1989.11　［丹麦］I. 马德森　著
30　非线性发展方程　1989.12　李大潜　陈韵梅　著

31 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行 仇庆久 李成章 编
32 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
33 解析数论基础 1991.2 潘承洞 潘承彪 著
34 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙 吴兰成 著
35 黎曼曲面 1991.4 吕以辇 张学莲 著
36 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
37 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
38 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录 梁之舜 著
39 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰 王连祥 著
40 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
41 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 杨重骏 何育赞 闻国椿 著
42 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
43 组合矩阵论(第二版) 2005.1 柳柏濂 著
44 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英 李 冲 杨文善 著
45 实分析导论 1998.2 丁传松 李秉彝 布 伦 著
46 对称性分岔理论基础 1998.3 唐 云 著
47 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
48 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
49 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
50 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
51 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
52 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德 郭柏灵 著
53 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
54 拓扑空间中的反例 2000.6 汪 林 杨富春 编著
55 序半群引论 2001.1 谢祥云 著
56 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军 张 祥 董梅芳 著
57 随机分析学基础(第二版) 2001.3 黄志远 著
58 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚 马军海 著
59 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎 陆传荣 张立新 著
60 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
61 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
62 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮 炯 顾凡及 蔡志杰 编著
63 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
64 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵 黄海洋 蒋慕容 著

65 排队论基础 2002.10 孙荣恒 李建平 著
66 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川 崔建莲 著
67 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
68 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙 李登峰 谌秋辉 著
69 集值分析 2003.8 李 雷 吴从炘 著
70 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘 文 著
71 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群 尹景学 王春朋 著
72 有限典型群子空间轨道生成的格(第二版) 2003.10 万哲先 霍元极 著
73 调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版) 2004.3 苗长兴 著
74 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
75 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
76 传染病动力学的数学建模与研究 2004.8 马知恩 周义仓 王稳地 靳 祯 著
77 模李超代数 2004.9 张永正 刘文德 著
78 巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用 2005.1 王玉文 著
79 巴拿赫空间结构和算子理想 2005.3 钟怀杰 著
80 脉冲微分系统引论 2005.3 傅希林 闫宝强 刘衍胜 著
81 代数学中的 Frobenius 结构 2005.7 汪明义 著
82 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
83 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
84 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
85 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
86 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
87 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
88 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
89 散乱数据拟合的模型、方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
90 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
91 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
92 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
93 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
94 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
95 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
96 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
97 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
98 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著

99　矩阵理论及其应用　2007.8　陈公宁　编著
100　集值随机过程引论　2007.8　张文修　李寿梅　汪振鹏　高　勇　著
101　偏微分方程的调和分析方法　2008.1　苗长兴　张　波　著
102　拓扑动力系统概论　2008.1　叶向东　黄　文　邵　松　著
103　线性微分方程的非线性扰动(第二版)　2008.3　徐登洲　马如云　著
104　数组合地图论(第二版)　2008.3　刘彦佩　著
105　半群的 S-系理论(第二版)　2008.3　刘仲奎　乔虎生　著
106　巴拿赫空间引论(第二版)　2008.4　定光桂　著
107　拓扑空间论(第二版)　2008.4　高国士　著
108　非经典数理逻辑与近似推理(第二版)　2008.5　王国俊　著
109　非参数蒙特卡罗检验及其应用　2008.8　朱力行　许王莉　著
110　Camassa-Holm 方程　2008.8　郭柏灵　田立新　杨灵娥　殷朝阳　著
111　环与代数(第二版)　2009.1　刘绍学　郭晋云　朱　彬　韩　阳　著
112　泛函微分方程的相空间理论及应用　2009.4　王　克　范　猛　著
113　概率论基础(第二版)　2009.8　严士健　王隽骧　刘秀芳　著
114　自相似集的结构　2010.1　周作领　瞿成勤　朱智伟　著
115　现代统计研究基础　2010.3　王启华　史宁中　耿　直　主编
116　图的可嵌入性理论(第二版)　2010.3　刘彦佩　著
117　非线性波动方程的现代方法(第二版)　2010.4　苗长兴　著
118　算子代数与非交换 L_p 空间引论　2010.5　许全华　吐尔德别克　陈泽乾　著
119　非线性椭圆型方程　2010.7　王明新　著
120　流形拓扑学　2010.8　马　天　著
121　局部域上的调和分析与分形分析及其应用　2011.4　苏维宜　著
122　Zakharov 方程及其孤立波解　2011.6　郭柏灵　甘在会　张景军　著
123　反应扩散方程引论(第二版)　2011.9　叶其孝　李正元　王明新　吴雅萍　著
124　代数模型论引论　2011.10　史念东　著
125　拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法　2011.12　周作领　尹建东　许绍元　著
126　Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用　2012.3　苗长兴　吴家宏　章志飞　著
127　有约束条件的统计推断及其应用　2012.3　王金德　著
128　混沌、Mel'nikov 方法及新发展　2012.6　李继彬　陈凤娟　著
129　现代统计模型　2012.6　薛留根　著
130　金融数学引论　2012.7　严加安　著
131　零过多数据的统计分析及其应用　2013.1　解锋昌　韦博成　林金官　著

132　分形分析引论　2013.6　胡家信　著
133　索伯列夫空间导论　2013.8　陈国旺　编著
134　广义估计方程估计方程　2013.8　周　勇　著
135　统计质量控制图理论与方法　2013.8　王兆军　邹长亮　李忠华　著
136　有限群初步　2014.1　徐明曜　著
137　拓扑群引论(第二版)　2014.3　黎景辉　冯绪宁　著
138　现代非参数统计　2015.1　薛留根　著

目　录

第一章　Riemann 曲面的概念

§1　曲 面 的 概 念

曲面是指一个连通的 Hausdorff 空间 W，附加上一族$\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$，其中 U_α 是 W 的开集，z_α 是 U_α 到平面$\mathbf{C}$内的开集上的拓扑映照，U_α 组成 W 的开覆盖，即 $W = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.

一个曲面 W，局部地在每一个 U_α 上考虑时，通过拓扑映照 z_α，U_α 与平面$\mathbf{C}$的开集 $z_\alpha(U_\alpha)$一一对应，W 局部地看就是平面开集，简单地说，曲面是局部平面化的 Hausdorff 空间.

对任意 $p \in U_\alpha$，$z_\alpha(p)$称为**局部参数，局部坐标**或**局部变数**，U_α 称为**局部参数邻域，z_α** 称为**局部参数映照**. 如果 $p_0 \in U_\alpha$，圆 $D = \{|z - z_\alpha(p_0)| < r\} \subset z_\alpha(U_\alpha)$，则 $\Delta = z_\alpha^{-1}(D)$称为以 p_0 为心的**局部参数圆. W** 上每一点 p_0 都存在以 p_0 为心的局部参数圆.

曲面 W 上的**弧**(或称**曲线，路径**)，按定义是指一个连续映照 $\gamma: [a, b] \to W$，$t \in [a, b]$，$t \longmapsto \gamma(t)$. 我们将用 ν 表示弧的连续映照，或弧上的点组成的集合 $\gamma = \{\gamma(t): a \leqslant t \leqslant b\}$. $\nu(a)$称为**起点**，$\gamma(b)$称为**终点**. 如果 $\gamma(a) = \gamma(b)$，则 γ 称为**闭曲线**，我们还要约定，如果作参数变换 $\tau: [a, b] \to [c, d]$，使

$$\tau(t) = c + \frac{d - c}{b - a}(t - a),$$

则认为弧 $\gamma: [c, d] \to W$，$\tau \longmapsto \gamma(\tau)$和 $\gamma_1: [a, b] \to W$，$t \longmapsto \gamma_1(t) = \gamma(\tau(t))$是相同的. 因此，弧总可以定义为 $\gamma: [0, 1] \to W$，$t \longmapsto \gamma(t)$，$0 \leqslant t \leqslant 1$.

回顾空间的连通性. 拓扑空间称为**连通的**，如果它不能分解为两个非空的互不相交的开集的和集. 拓扑空间称为**弧连通的**，如果它的任何两点可用一弧来连接，即存在一条弧，起点和终点分别是这两点.

弧连通空间一定是连通空间. 对曲面来说，反过来结论也成立.

定理 1.1　曲面是弧连通的.

证明　设 W 为曲面，首先注意到，对 W 的三点 p_1，p_2 和 p_3，如果 p_1 和 p_2 可用弧连接. p_2 和 p_3 可用弧连接，则 p_1 和 p_3 也可用弧连接. 于是我们只要证明，对固定点 p_0，W 上任一点 p 与 p_0 可用弧连接，为此，设

$$A = \{p \in W: p \text{ 与 } p_0 \text{ 可用弧连接}\},$$

我们要证明 $A = W$. 根据 W 的连通性，如果我们证明了，A 是开集，$W - A$ 也是

开集,而 $p_0 \in A$, $A \neq \varnothing$,因此 $W - A = \varnothing$,便有 $A = W$.

设 $p \in A$,存在以 p 为心的局部参数圆 Δ, Δ 内任一点 q 与 p 可用弧连接,又 p_0 与 p 可用弧连接,因此 q 与 p_0 可用弧连接,于是 $\Delta \subset A$, A 是开集,如果 $p \in W - A$,则 p_0 与 p 不能用弧连接,由此推出,$\forall q \in \Delta$, q 与 p_0 也不能用弧连接,$\Delta \subset W - A$, $W - A$ 是开集,定理证完.

曲面称为**紧的或闭的**,如果它的任何开覆盖,总存在有限的子覆盖,非紧的曲面称为**开曲面**.

§2　Riemann 曲面的定义

Riemann **曲面**是指一个连通的 Hausdorff 空间 W,加上一族$\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$,满足下列条件:

R1. 每一个 U_α 是 W 上开集,对应的 z_α 是 U_α 到复平面 $\mathbf{C}$ 的开集 $z_\alpha(U_\alpha)$ 的拓扑映照;

R2. 所有的 U_α 组成 W 的开覆盖,即 $W = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$;

R3. 如果 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,则映照

$$z_\beta \circ z_\alpha^{-1}: z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是一一解析的映照,即共形映照.

定义中的条件 R1 和 R2 说明 Riemann 曲面是一个曲面,但此曲面又附加了条件 R3. 我们称族$\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$为 Riemann 曲面的**复结构**.

U_α 也称为局部参数邻域,z_α 称为局部参数映照,$\forall p \in U_\alpha$,对应的 $z_\alpha(p)$,称为 p 的局部参数,或称为局部坐标和局部单值化参数,当 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ 时,$z_\beta \circ z_\alpha^{-1}$ 称为局部参数变换,它把 P 的局部参数 $z_\alpha(p)$ 变为局部参数 $z_\beta(p)$,即

$$z_\beta(p) = z_\beta \circ z_\alpha^{-1}(z_\alpha(p)).$$

Riemann 曲面 W 上的点 p,有时就用局部参数 $z = z_\alpha(p)$ 表示,或简单地用 z 表示.

根据 Riemann 曲面的定义,在每个局部参数邻域 U_α 内考虑时,U_α 中的点与 $\mathbf{C}$ 内开集 $z_\alpha(U_\alpha)$ 的点(局部参数)一一对应,而不同的局部参数通过局部参数变换联系,局部参数变换是共形映照. 因此,单复变函数论中的一些共形不变的概念,例如解析函数,调和函数,次调和函数及它们的极值原理,共形映照及拟共形映照,解析曲线与逐段解析曲线等,都可以通过局部参数邻域搬到 Riemann 曲面上. 我们将逐步给予介绍.

现在,我们定义解析函数和共形映照.

Riemann 曲面 W 上的域 G,也是一个 Riemann 曲面,它的复结构由 W 诱导

出,定义为$\{(U_\alpha\cap G, z_\alpha|U_\alpha\cap G)\}$.通常为了方便,$U_\alpha\cap G$ 和 $z_\alpha|U_\alpha\cap G$ 也用 U_α 和 z_α 表示.这里,符号 $z_\alpha|U_\alpha\cap G$ 表示映照 z_α 在 $U_\alpha\cap G$ 上的限制.

定义 设 $G\subset W$ 为一个域,函数 $f:G\to\mathbf{C}$, $p\mapsto f(p)$称为在 G 内**解析**或**全纯的**,如果在任何局部参数邻域 U_α 内,在局部参数 $z=z_\alpha(p)$下,函数

$$f(p)=f(z_\alpha^{-1}(z))=f_\alpha(z)$$

对 z 在 $z_\alpha(U_\alpha)$内是解析的.

如果 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, p 又有局部参数 $w=z_\beta(p)$,则

$$f(p)=f(z_\beta^{-1}(w))=f_\beta(w).$$

但 $w=z_\beta\circ z_\alpha^{-1}(z)$, $f_\beta(w)=f_\alpha(z_\alpha\circ z_\beta^{-1}(w))$.因此,如果 f_α 对 z 是解析的. $z_\alpha\circ z_\beta^{-1}$ 是共形映照,$f_\beta(w)$对 w 也是解析的,这就证明,在 Riemann 曲面上定义解析函数是合理的.对其它共形不变的概念也同样是合理的.

Riemann 曲面上解析函数的存在性是一个重要问题.

命题 设 W 为 Riemann 曲面,$\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$是它的复结构,则每一个局部参数映照 $z_\alpha: U_\alpha\to z_\alpha(U_\alpha)\subset\mathbf{C}$ 就是定义于 U_α 内的一一解析函数(或称解析映照).

这命题是显然的,它说明,Riemann 曲面上局部解析函数总是存在的.反过来,如果 U 是 W 的开集,φ 是 U 到$\mathbf{C}$的开集的一一解析映照,则称 U 为 W 的可容许的局部参数邻域,φ 为可容许的局部参数映照.把所有可容许的(U,φ)并到 W 的原定义的复结构中去,得到 W 的扩充复结构,不难看出,它仍满足条件 R1,R2 和 R3.以后,对于 Riemann 曲面 W,局部参数邻域和局部参数映照,将取之于 W 的扩充复结构,这样将是很方便的.例如,对$\forall p_0\in W$,我们可以取局部参数邻域 U,参数映照 $z=\varphi(p)$,使 $p_0\in U$, $\varphi(p_0)=0$.而且还可使 $\varphi(U)$包含圆 $D:|z|<1$,在 W 上存在p_0 为心的局部参数圆 $\Delta=\varphi^{-1}(D)$.

定义 设 W 和 W'为 Riemann 曲面,映照 $f:W\to W'$称为**解析映照**,如果 f 是连续的,且对于$\forall p_0\in W$, $q_0=f(p_0)$,对 p_0 和 q_0 的任何局部参数邻域 U 和 U',局部参数映照 $z=\varphi(p)$和 $w=\varphi'(q)$, $z_0=\varphi(p_0)$, $w_0=\varphi(q_0)$,在局部参数下

$$w=\varphi'\circ f\circ\varphi^{-1}(z)$$

在点 z_0 的邻域内是解析的.

如果 $f:W\to W'$是一一解析且在上的(即 $f(W)=W'$),则 f 称为 W 到 W'上的**共形映照**.这时,我们称 W 和 W'**共形等价**.

解析映照 $f:W\to\mathbf{C}$ 就是**全纯函数**,而 $f:W\to\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$则称为**亚纯函数**.

§3 Riemann 曲面的简单例子

1) 复平面$\mathbf{C}$在通常意义下是 Riemann 曲面,局部参数邻域是$\mathbf{C}$的开集,局部

参数映照是恒等映照.

2) 扩充复平面$\overline{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$也是 Riemann 曲面,局部参数邻域及局部参数映照取为

$$U_0=\overline{\mathbf{C}}-\{\infty\},z_0=z,$$
$$U_1=\overline{\mathbf{C}}-\{0\},z_1=\begin{cases}1/z, & z\neq\infty,\\ 0, & z=\infty.\end{cases}$$

这里 $U_0\cap U_1=\mathbf{C}-\{0\}$,映照 $z_1\circ z_0^{-1}:\mathbf{C}-\{0\}\to\mathbf{C}-\{0\}$为 $z\longmapsto\frac{1}{z}$是一一解析的.

3) Riemann 球面 S. S 是$\mathbf{R}^3$中的单位球面:$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. 设平面 $x_3=0$ 是复平面$\mathbf{C}$,取 S 到$\mathbf{C}$的球极投影. 在 S 上定义复结构,使 S 成为 Riemann 曲面,局部参数邻域和局部参数映照取为

$$U_0=S-\{(0,0,1)\},z_0=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3},$$

$$U_1=S-\{(0,0,-1)\},z_1=\frac{x_1-ix_2}{1+x_3}.$$

显然,在 $U_0\cap U_1$ 内,$z_0\circ z_1=1$,$z_1\circ z_0^{-1}:\mathbf{C}-\{0\}\to\mathbf{C}-\{0\}$为 $z\longmapsto\frac{1}{z}$. 这就说明,局部参数变换是一一解析的. S 是 Riemann 曲面. 同时,球极投影是 S 到$\overline{\mathbf{C}}$的共形映照,S 共形等价于$\overline{\mathbf{C}}$.

4) 环面. 在拓扑上,把一个平行四边形对边上的点恒等(黏合)起来就成为环面. 现在,我们要在恒等对边的过程中,给出复结构,使环面成为 Riemann 曲面.

设 $w_1,w_2\in\mathbf{C}$,w_1/w_2 不是实数,这时点 O,w_1,w_1+w_2,w_2 组成平行四边形 R 的顶点. 现在,要恒等 R 对边的等价点,使之成为一个 Riemann 曲面,考虑$\mathbf{C}$到$\mathbf{C}$的线性变换 $S(z)=z+n_1w_1+n_2w_2$,$n_1,n_2\in\mathbf{Z}$(整数集),所有的 S 组成一个群Γ. 对$\mathbf{C}$的点定义一个等价关系"$\sim$":$z_1\sim z_2\Leftrightarrow\exists S\in\Gamma$,使 $z_2=S(z_1)$,即存在 $n_1,n_2\in\mathbf{Z}$,使 $z_2=z_1+n_1w_1+n_2w_2$,把$\mathbf{C}$的点按等价关系分类,$z_0\in\mathbf{C}$,则 z_0 所在的等价类用$[z_0]$表示之,即

$$\begin{aligned}[z_0]&=\{z\in\mathbf{C}:z=S(z_0),S\in\Gamma\}\\&=\{z_0+n_1w_1+n_2w_2:n_1,n_2\in\mathbf{Z}\}.\end{aligned}$$

通常称之为一个轨道.

令

$$T=\{[z]:z\in\mathbf{C}\}.$$

定义自然投影映照 $\pi:\mathbf{C}\to T$,使 $\pi(z)=[z]$. 现在定义 T 的邻域系使 T 成为拓扑空间,π 是局部拓扑映照.

对任意$[z_0]\in T$,在$\mathbf{C}$内一定存在以 z_0 为心,以充分小的 r 为半径的圆Δ,使

Δ 内任两点不等价. 因此, $\pi|\Delta:\Delta\to\pi(\Delta)$ 是一一映照, 定义 $[z_0]$ 的邻域为

$$V_{[z_0]}=\pi(\Delta).$$

应该注意到, 对 $\forall S\in\Gamma$, 所有的 $S(\Delta)$ 是互不相交的圆, 且 $\pi(S(\Delta))=V_{[z_0]}$, 在这样定义的邻域系 $V_{[z_0]}$ 下, T 成为拓扑空间, 由于 π 把 $\mathbf{C}$ 的充分小的圆邻域一一的映为 T 的邻域, π 是局部拓扑映照. 不难验证, T 是连通的 Hausdorff 空间.

T 是一个 Riemann 曲面. 局部参数邻域取为 $V_{[z_0]}$. 设 $\pi(\Delta)=V_{[z_0]}$, 因此, 对 $\forall s\in\Gamma$, $\pi(S(\Delta))=V_{[z_0]}$; 局部参数映照取为

$$(\pi|\Delta)^{-1}: V_{[z_0]}\to\Delta,$$

$$(\pi|S(\Delta))^{-1}: V_{[z_0]}\to S(\Delta).$$

考虑平行四边形 R, $\mathbf{C}$ 内每一点在 R 有一等价点, R 内部任两点不等价, R 的边上的点, 有且仅有一等价点在对边上, 因此 T 是 R 恒等对边的等价点而成的环面.

T 是一紧 Riemann 曲面, 因为 $T=\pi(R)$, π 是局部拓扑映照, 因此 T 是紧的, 这里, 我们用了连续映照的一个性质: 连续映照把紧集映为紧集.

应该注意, 这里我们用 $\mathbf{C}$ 的双周期群 Γ 构造 Riemann 曲面 T(环面), 以后我们将看到, 这一方法是具有一般性的.

证明的细节留作习题.

§4　带边界的 Riemann 曲面

类似于闭上半平面或闭单位圆, 可以定义带边界的 Riemann 曲面.

带边界的 Riemann 曲面是一个连通的 Hausdorff 空间 W, 加上一族 $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ 满足下列条件:

$\bar{\mathrm{R}}1$. 族中每一个 U_α 是 W 的开集, 对应的 z_α 是 U_α 到闭上半平面 $\mathrm{Im}z\geqslant 0$ 的相对开集的拓扑映照;

$\bar{\mathrm{R}}2$. 所有的 U_α 组成 W 的开覆盖, 即 $W=\bigcup U_\alpha$;

$\bar{\mathrm{R}}3$. 如果 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, 则映照

$$z_\beta\circ z_\alpha^{-1}: z_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to z_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是闭上半平面的相对开集到另一相对开集的一一解析映照, 其中如果 $z_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 与实轴相交, 则 $z_\beta\circ z_\alpha^{-1}$ 可以越过实轴对称开拓为实轴对称域的一一解析映照.

我们称 U_α 为局部参数邻域, 对应的 z_α 为局部参数映照.