北大燕园

· 高等学校辅导教材 ·

线性代数习题全解

同济 · 第六版

主编　陶　伟

中国政法大学出版社

大学数学辅导丛书

线性代数习题全解

同济·第六版

主编 陶 伟

中国政法大学出版社

2016·北京

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题全解/陶伟主编．—北京：中国政法大学出版社，2016. 9
ISBN 978-7-5620-6112-0

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①陶…　Ⅲ．①线性代数-高等学校-题解　Ⅳ．①O151. 2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 125535 号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话	010－58908285（总编室）　58908433（编辑部）　58908334（邮购部）
承　印	北京朝阳印刷厂有限责任公司
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	16. 75
字　数	268 千字
版　次	2016 年 9 月第 1 版
印　次	2016 年 9 月第 1 次印刷
定　价	18. 00 元

前　言

本书是与同济大学应用数学系编《线性代数》(第六版)以及华中科技大学数学系编《线性代数》(第二版)相配套的学习辅导书。

本书按《线性代数》(**同济·第六版**)的章节顺序编排,以便读者与教材同步学习。本书每章包括以下几部分内容:

一、疑难问题解答　本部分针对本章的重难点内容以及读者在学习本章时常问及的一些共同性问题,编选出若干问题予以分析、解答,以帮助读者对重难点内容的理解和掌握。

二、同济·第六版习题解答　本部分对同济·第六版教材中的全部习题给出了详尽的解答,对较典型或难度较大的习题给出几种解法,并做了适当的评注,方便读者在学习过程中进行对照分析。

三、华中科大·第二版习题解答　本部分对华中科大·第二版教材中涉及本章的习题给出了详尽的解答,并做了适当的评注,方便读者在学习过程中进行对照分析。

四、考研试题选解　本部分将涉及本章内容的历年考研试题归纳在一起,并给出了详尽的解答,方便读者了解本课程各章内容在考研试题中的命题方向。

值得提醒的是:解题需亲自动手,通过自己的解题实践,总结各类题型的解题方法。

本书使用了高等教育出版社出版的同济大学应用数学系及华中科技大学数学系编的《线性代数》中的全部习题，在此表示衷心的感谢！本书由**清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航空航天大学、北京理工大学、北京交通大学**等院校一批具有丰富教学经验的青年教师编写。

由于编者水平所限，疏漏错误难免，恳请同行和读者批评指正。

编者

目　　录

第一章　行列式

一、疑难问题解答

1 如何理解行列式的定义？

【答】 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的定义

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 此定义中应注意以下几点：

(1) 和式记号 $\sum$ 是对集合 $P = \{p_1p_2\cdots p_n \mid p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots n$ 的排列$\}$ 作和,因 n 个不同元素的全排列数是 $n!$,于是该和式共有 $n!$项.

(2) 和式中的任一项 σ 是取自 D 中不同行、不同列的元素之积. 由排列知识知,D 中这样不同行、不同列(即两两“不共线”)的 n 个元素之积共有 $n!$个.

(3) 和式中任一项 σ 都带有符号 $(-1)^t$,t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数,即根据此排列的逆序数为偶数或奇数,σ 依次取“+”或“-”. 根据排列的性质,$\frac{n!}{2}$ 个偶排列,$\frac{n!}{2}$ 个奇排列.

由上所述可知,n 阶行列式 D 恰好是 D 的不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和,是一个“积和式”,其中一半带有正号,一半带有负号.

2 (1) 余子式与代数余子式有什么特点?(2) 它们之间有什么联系？

【答】 (1) 对于给定的 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$,(i, j) 元 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 仅与位置(i, j) 有关,而与 D 中第 i 行、第 j 列元素的数值大小和正负无关.

(2) 它们间的联系是 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{i+j}$,因而当 $i+j$ 为偶数时,二者相同;当 $i+j$ 为奇数时,二者相反.

二、习题一(同济・第六版)

1 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

【解】 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

$$= 2\times(-4)\times3+1\times1\times8+0\times(-1)\times(-1)-1\times(-4)\times(-1)-2\times(-1)\times8-3\times1\times0$$

$$=-24+8-4+16=-4.$$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc+abc+abc-c^3-b^3-a^3 = 3abc-a^3-b^3-c^3.$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-ac^2-cb^2$

$$= ca^2-ba^2-ac^2+abc-abc+ab^2+bc^2-cb^2$$

$$= a(ac-ab-c^2+bc)-b(ac-ab-c^2+bc)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a).$$

(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 3xy(x+y)-(x+y)^3-x^3-y^3=-2(x^3+y^3).$

2 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1)1 2 3 4；　(2)4 1 3 2；　(3)3 4 2 1；　(4)2 4 1 3；

(5)1 3 … $(2n-1)$2 4 … $(2n)$；　(6)1 3 … $(2n-1)(2n)(2n-2)$…2.

【解】

(1) 逆序数为0

(2) 逆序数为4：4 1，4 3，4 2，3 2

(3) 逆序数为5：3 2，3 1，4 2，4 1，2 1

(4) 逆序数为3：2 1，4 1，4 3

(5) 逆序数为$\frac{n(n-1)}{2}$：

3 2	1个
5 2,5 4	2个
7 2,7 4,7 6	3个
…………	…
$(2n-1)2,(2n-1)4,(2n-1)6,\cdots,(2n-1)(2n-2)$	$(n-1)$个

(6) 逆序数为$n(n-1)$：

3 2	1个
5 2,5 4	2个
…………	…
$(2n-1)2,(2n-1)4,\cdots,(2n-1)(2n-2)$	$(n-1)$个
4 2	1个
6 2,6 4	2个
…………	…
$(2n)2,(2n)4,\cdots(2n)(2n-2)$	$(n-1)$个

3 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【解】 由定义知,四阶行列式的一般项为 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$,其中 t 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数. 由于 $p_1=1,p_2=3$ 已固定,$p_1p_2p_3p_4$ 只能形如 13□□,即 1324 或 1342. 对应的 t 分别为 $0+0+1+0=1$ 或 $0+0+0+2=2$,故 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求.

4 计算下列各行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

【解】

(1) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_3}{\underset{c_4-7c_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix} \overset{\text{先 } c_3-c_2}{\underset{\text{后 } c_2-2c_1}{=\!=\!=}} -\begin{vmatrix} 4 & -9 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 10 & -17 & -17 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{2+1}\times(-9)\times(-17)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{\underset{r_3-2r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

(3) $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} \overset{r_1/a,r_2/d}{\underset{r_3/f}{=\!=\!=}} adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \overset{c_1/b,c_2/c}{\underset{c_3/e}{=\!=\!=}} abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=\!=\!=}} abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=\!=\!=} -abcdef\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4abcdef.$$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$.

(5) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} (-1)^{1+1} a \cdot \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot \left(b \cdot \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & d \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix}$$

$$= a(bcd + b) + ad + cd + 1$$

$$= abcd + ab + cd + da + 1.$$

(6) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{都减 1 行}]{2,3,4\text{ 行}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行的 2 倍}]{2\text{ 行减 }3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 16.$$

5 求解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$，其中 a,b,c 互不相等.

【解】 (1) 左式 $\xlongequal[r_1 \div (x+3)]{r_1 + r_2} (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_2 - c_1} (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3)(x^2-3).$$

于是方程的解为：$x_1 = -3, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$.

(2) 注意到方程左式为 4 阶范德蒙德行列式，于是有

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c) = 0.$$

因 a,b,c 互不相等，故方程的解为：$x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$.

6 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^3 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$；

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

【证】

(1) 左 $\xlongequal[\text{后 } c_2 - c_3]{\text{先 } c_1 - c_2} \begin{vmatrix} a^2-ab & ab-b^2 & b^2 \\ a-b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a(a-b) & b(a-b) \\ a-b & a-b \end{vmatrix}$

$= (a-b)^2\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3 =$ 右.

(2) 左 $\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 拆分}} \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{第二项按 } c_2 \text{ 拆分}]{\text{第一项按 } c_3 \text{ 拆分}} a^2\begin{vmatrix} x & ay+bz & z \\ y & az+bx & x \\ z & ax+by & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^2\begin{vmatrix} y & z & ax+bx \\ z & x & ax+by \\ x & y & ay+bz \end{vmatrix}$

$\xlongequal[\text{第二项按 } c_3 \text{ 拆分}]{\text{第一项按 } c_2 \text{ 拆分}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$= (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} =$ 右.

【注】最后一步是因为 $\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \xlongequal[\text{后 } c_1 \leftrightarrow c_2]{\text{先 } c_2 \leftrightarrow c_3} (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$.

(3) 左 $\xlongequal[c_3 - c_2]{c_4 - c_1} \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{c_4}{c_3} = 3} 0 = $ 右.

$\left(\frac{c_4}{c_3} = 3\right.$ 表示第 4 列与第 3 列的对应元素之比为 $\left.3\right)$

(4) 考虑 5 阶范德蒙行列式

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}.$$

由于欲证的等式左边行列式 D_4 恰是辅助行列式 $f(x)$ 的元素 x^3 的余子式 M_{45}，即 $D_4 = M_{45} = -A_{45}$，而由

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a),$$

知 x^3 的系数为

$$A_{45} = -(a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

于是

$$左 = D_4 = -A_{45} = (a+b+c+d)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) = 右.$$

(5) **方法一** 对第 4 行展开：

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_0A_{41} + a_1A_{42} + a_2A_{43} + a_3A_{44}$$

$$A_{41} = -M_{41} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{42} = M_{42} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = x,$$

$$A_{43} = -M_{43} = -\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x^2,$$

$$A_{44} = M_{44} = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3.$$

代入上式得证等式.

方法二 把第 4 列的 x 倍加到第 3 列上,再把第 3 列的 x 倍加到第 2 列上,最后把第 2 列的 x 倍加到第 1 列上,得

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 & a_1+a_2x+a_3x^2 & a_2+a_3x & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3.$$

7 设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$,把 D 上下翻转、逆时针旋转 90° 或依副对角线翻转,依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明:$D_1=D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D,\quad D_3=D$.

【证】 (1) 把 D 上下翻转,这实际上等价于总共经 $n(n-1)/2$ 次相邻行的对换:从第 n 行开始,第 n 行经 $n-1$ 次相邻行对换,换到第 1 行,原始的第 $n-1$ 行经 $n-2$ 次对换换到第 2 行,…,原始的第 2 行经 1 次对换换到第 $n-1$ 行,此时原始的第 1 行才成为第 n 行.因此,由 D 变为 D_1,总共改变了

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=n(n-1)/2$$

次符号,或说由 D_1 变回到原来的 D,总共改变了 $n(n-1)/2$ 次符号,故 $D_1=(-1)^{n(n-1)/2}D$.

(2) 把 D 逆时针旋转 90°,这实际上等价于把 D 的转置行列式 D^{T} 上下翻转,由(1) 知 $D_2=(-1)^{n(n-1)/2}D^{\mathrm{T}}$,但 $D^{\mathrm{T}}=D$,故得证 $D_2=(-1)^{n(n-1)/2}D$.

(3) 把 D 依副对角线翻转,这实际上等价于先把 D 逆时针旋转 90° 变为 D_2,然后把 D_2 左右翻转而成为 D_3,同(1) 之理,由 D_2 变为 D_3,总共改变了 $n(n-1)/2$ 次符号,从而 $D_3=(-1)^{n(n-1)/2}D_2$,故 $D_3=(-1)^{n(n-1)/2}(-1)^{n(n-1)/2}D=(-1)^{n(n-1)}D=D$.

8 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$,其中对角线上元素都是 a,未写出的元素都是 0;

(2) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ 提示:利用范德蒙德行列式的结果;

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$,其中未写出的元素都是0;

(5) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & & 1+a_n \end{vmatrix}$;

(6) $D_n=\det(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=|i-j|$;

(7) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

【解】 (1) **方法1°** 把 D_n 按第一行展开得

$$D_n=a^n+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}}a^n+(-1)^{n+1+n}a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1).$$

方法2°

$$D_n\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_n}-\begin{vmatrix} a & 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & & a \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & a & \\ 0 & a & & & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_n}\begin{vmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{vmatrix}=a^{n-2}(a^2-1).$$

(2) **方法1°** 利用各列的元素之和相同,提取公因式.

$$D_n\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_i - c_1} [x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & x-a & & 0 \\ & & \ddots & \\ & * & & \\ & & & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

方法 2° 把 D_n 按第 1 列拆成 2 个行列式,可得递推公式:

$$D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ 0 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)D_{n-1} + a(x-a)^{(n-1)}$$

$$= (x-a)[(x-a)D_{n-2} + a(x-a)^{n-2}] + a(x-a)^{n-1}$$

$$= (x-a)^2 D_{n-2} + 2a(x-a)^{n-1} = \cdots$$

$$= (x-a)^{n-1}D_1 + (n-1)a(x-a)^{n-1}$$

$$= (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

(3) 把所给行列式上下翻转,即为范德蒙德行列式,若再将它左右翻转,由于上下翻与左右翻所用交换次数相等,故行列式经上下翻再左右翻(相当于转 180°,参看第 6 题)其值不变. 于是按范德蒙德行列式的结果,可得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix} = n!(n-1)!\cdots 2!.$$

(4) 用递推法.

$$D_{2n} \xlongequal[c_2 \leftrightarrow c_{2n}]{r_2 \leftrightarrow r_{2n}} \left|\begin{array}{cc:c} a_n & b_n & \\ & & 0 \\ c_n & d_n & \\ \hdashline & 0 & D_{2(n-1)} \end{array}\right| = (a_n d_n - b_n c_n) D_2(n-1),$$

即有递推公式 $D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n)D_2(n-1)$.

另一方面,$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$,利用这些结果,递推得

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n)\cdots(a_1 d_1 - b_1 c_1) = \prod_{k=1}^{n}(a_k d_k - b_k c_k).$$

(5) 把各行都加到第 1 行上,再把 2 至 n 列都减第 1 列:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n a_i & 1+\sum_{i=1}^n a_i & \cdots & 1+\sum_{i=1}^n a_i \\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n a_i & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^n a_i.$$

(6) 将原行列式化为上三角行列式. 为此,从第 2 行起,各行均减去第 1 行,得

$$D_n \xlongequal[i=2,\cdots,n]{r_i - r_1} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & & & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,\cdots,n]{c_1 + \frac{a_1}{a_i}c_i} \begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $b = 1 + a_1 + a_1 \sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} = a_1\left(1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right).$

于是 $D_n = a_1 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right).$

9 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, D 的 (i,j) 元的代数余子式记作 A_{ij},求

$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$.

【解】 $A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$ 等于用 1,3, −2,2 替换 D 的第 3 行对应元素所得行列式,即

$$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4 + c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{按 } c_4 \text{ 展开}]{r_2 \div (-2)} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 + r_2} 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24.$$