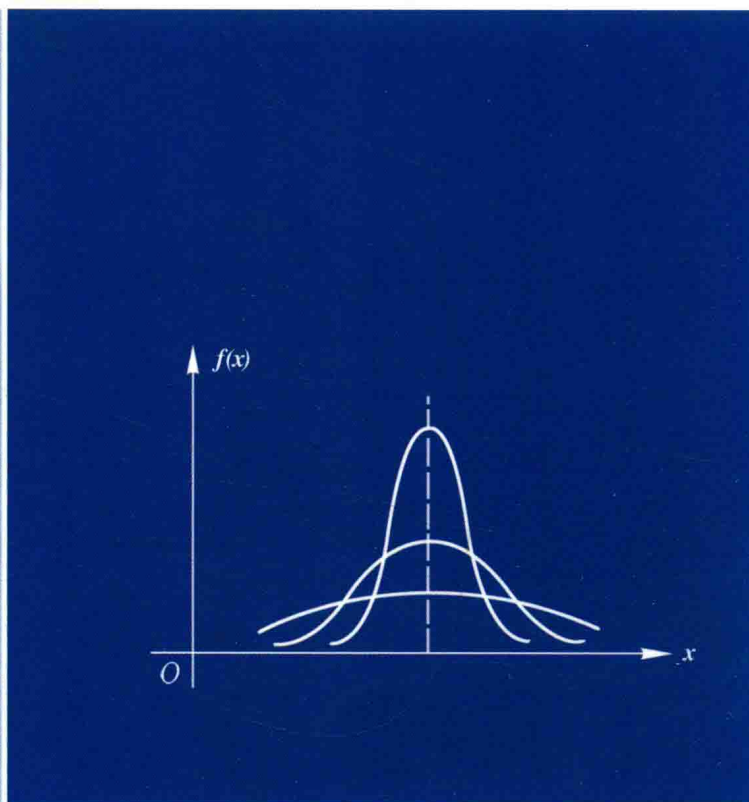
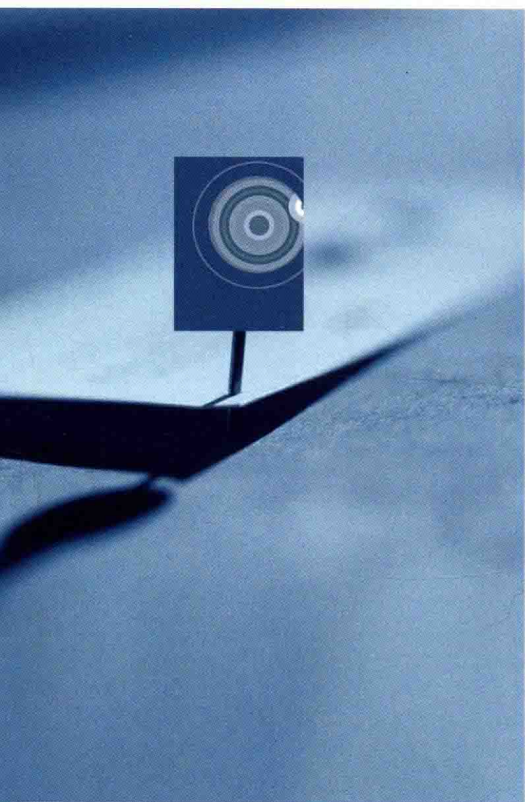




普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

◎ 涂平 贺丽娟 主编



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

主 编 涂 平 贺丽娟
副主编 张 锴 易校尉

华中科技大学出版社
中国·武汉



内 容 简 介

本书依据国家教育部颁布的“概率论与数理统计课程教学基本要求”组织教材内容. 本书内容包括: 随机事件及其概率; 随机变量及其分布; 二维随机变量及其分布; 随机变量的数字特征; 大数定律和中心极限定理; 数理统计的基础知识; 参数估计; 假设检验.

本书可供高等院校不同层次各专业的概率统计课程作为教材使用, 也可供工程技术人员和管理人员自学以及有关人员参加自学考试作为参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/涂平, 贺丽娟主编. —武汉: 华中科技大学出版社, 2016. 9
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-5680-2153-1

I. ①概… II. ①涂… ②贺… III. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 202996 号

概率论与数理统计

Gailulun yu Shuli Tongji

涂 平 贺丽娟 主编

策划编辑: 陈培斌

责任编辑: 王汉江

封面设计: 原色设计

责任校对: 刘 竣

责任监印: 周治超

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027)81321913

录 排: 武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷: 湖北恒泰印务有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16

印 张: 12.75

字 数: 328 千字

版 次: 2016 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 26.00 元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

经过十几年的办学实践,民办大学(独立学院)的办学指导思想已经明确,就是为社会培养更多的应用型人才.在这样的背景下,我们根据民办院校学生的实际情况编写了这本教材.

概率论和数理统计是高等院校各专业的一门必修基础课,也是一门应用性很强的课程.本教材以国家教学大纲的基本要求为基准,对部分理论性较强的内容做了一定的删减,力求做到通过通俗的语言来帮助读者建立基本概念,并希望通过较多的例题,帮助读者掌握一些较难掌握的方法.

本教材分两个部分:第1章至第5章为概率论基础,计划学时数为30~36学时;第6章至第8章为数理统计方法,计划学时数为16~24学时.

本教材在每一章后都安排了一定数量的习题供读者练习.习题分A、B两套,其中A套为基本题,B套为综合题.读者可以根据自己的实际情况取舍.

本教材由涂平、贺丽娟任主编.第1、2章由贺丽娟编写,第3章由易校尉编写,第4、5章由涂平编写,第6、7、8章由张锴编写.在本教材的编写过程中,得到了林益教授、刘次华教授的多次悉心指导,在此表示衷心感谢.

由于编者的水平有限,时间仓促,书中不足之处在所难免,恳请各位专家、同行和广大读者批评指正.

目 录

第一部分 概 率 论

第 1 章 随机事件及其概率	(3)
1.1 随机事件	(3)
1.2 随机事件的概率	(8)
1.3 古典概型	(12)
1.4 条件概率及全概率公式	(15)
1.5 事件的独立性	(21)
习题 1	(26)
第 2 章 随机变量及其分布	(32)
2.1 随机变量的概念	(32)
2.2 离散型随机变量及其概率分布	(33)
2.3 随机变量的分布函数	(39)
2.4 连续型随机变量及其概率密度	(41)
2.5 随机变量函数的分布	(49)
习题 2	(52)
第 3 章 二维随机变量及其分布	(58)
3.1 二维随机变量的基本概念	(58)
3.2 边缘分布	(62)
3.3 条件分布	(66)
3.4 相互独立的随机变量	(69)
3.5 两个随机变量函数的分布	(73)
习题 3	(79)
第 4 章 随机变量的数字特征	(83)
4.1 数学期望	(83)
4.2 方差	(89)
4.3 协方差及相关系数	(94)
习题 4	(97)
第 5 章 大数定律和中心极限定理	(101)
5.1 大数定律	(101)
5.2 中心极限定理	(102)
习题 5	(104)

第二部分 数理统计

第 6 章 数理统计的基础知识	(109)
6.1 总体与样本	(109)
6.2 统计量	(116)
6.3 抽样分布	(120)
习题 6	(127)
第 7 章 参数估计	(131)
7.1 点估计	(131)
7.2 估计量的评选标准	(136)
7.3 置信区间	(139)
7.4 正态总体的置信区间	(141)
习题 7	(147)
第 8 章 假设检验	(152)
8.1 假设检验的基本概念	(152)
8.2 单正态总体的假设检验	(155)
8.3 双正态总体的假设检验	(160)
8.4 分布拟合检验	(164)
习题 8	(170)
习题答案	(175)
附表 I 泊松分布表	(182)
附表 II 正态分布表	(184)
附表 III χ^2 分布表	(185)
附表 IV t 分布表	(187)
附表 V F 分布表	(188)
参考文献	(195)

第一部分

概 率 论

第 1 章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中的一类不确定现象(随机现象)及其规律性的一门应用数学学科. 20 世纪以来, 它已广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域. 本章介绍概率论中的基本概念——随机事件与随机事件的概率, 并进一步讨论随机事件的关系与运算, 以及概率的性质与初等计算方法.

1.1 随机事件

一、随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象: 一类是在一定条件下必然出现的现象, 称为**确定性现象**. 例如, 一枚硬币向上抛起后必然会落地; 同性电荷相互排斥, 异性电荷相互吸引; 在一个标准大气压下, 水加热到 $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ 会沸腾, 冷却到 $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 会结冰; 等等.

另一类则是在一定条件下我们事先无法准确预知其结果的现象, 称为**随机现象**. 例如, 将一枚硬币上抛, 落地时究竟是正面向上还是反面向上, 这在上抛前是无法断言的. 又如, 从一批产品中任意抽出一件来检验, 其结果可能是合格品, 也可能是不合格品, 但事先是不能肯定的.

现实生活中, 随机现象是极为普遍的. 例如: 明年的中秋节能观赏到月亮吗? 未来某日某支股票的价格是多少? 下一届世界杯冠军是谁? 等等.

从亚里士多德时代开始, 哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用, 但直到 20 世纪初, 人们才认识到随机现象亦可以通过数量化方法进行研究.

二、随机试验

由于随机现象的结果事先不能预知, 初看似乎毫无规律. 然而, 人们发现同一随机现象大量重复出现时, 其每种可能的结果出现的频率具有稳定性, 从而表明随机现象也有其固有的规律性. 人们把随机现象在大量重复出现时所表现出的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**.

例如, 在相同条件下, 多次抛掷一枚均匀硬币, 得到正面朝上的次数与抛掷的总次数之比随着次数的增多会呈现出集中在 0.5 附近的渐近趋势. 下面的表 1.1 列出了历史上一些科学家在抛掷硬币试验中得到的相关数据.

表 1.1

试验者	抛掷次数(n)	正面次数(r_n)	正面频率(r_n/n)
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

试验表明: 虽然事先无法准确预知每次抛掷硬币将出现正面还是反面, 但大量重复试验时发现, 出现正面和反面的次数大致相等, 即各占总试验次数的比例大致为 0.5, 并且随着试验

次数的增加,这一比例更加稳定地趋于 0.5.这说明虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性,但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出,试验的结果是有规律可循的,这种规律是随机试验的结果自身所具有的特征.

要对随机现象的统计规律性进行研究,就需要对随机现象进行重复观察,我们把对随机现象的观察称为**随机试验**,简称**试验**,记为 E . 随机试验应具备以下三个特征:

- (1) 可重复性:试验可以在相同的条件下重复进行;
- (2) 可观察性:每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;
- (3) 不确定性:每次试验出现的结果事先不能准确预知,但可以肯定会出现上述所有可能结果中的一个.

E_1 : 掷一颗均匀对称的骰子,观察它朝上一面出面的点数.

E_2 : 掷一颗均匀对称的骰子,观察它朝上一面出现的点数的奇偶性.

E_3 : 一个人进行射击,接连射击两次,观察各次中靶与否.

E_4 : 在某一产品中任选一件,检验其是否合格.

E_5 : 在一批灯泡中随意抽取一只,测试它的寿命.

E_6 : 记录某大型超市一天内光顾的顾客人数.

显然,上述 6 个试验都具有特征(1)~(3),故都是随机试验.

三、样本空间

尽管一个随机试验将要出现的结果是不确定的,但其所有可能结果是明确的,我们把随机试验的每一种可能的结果称为一个**样本点**,它们的全体称为**样本空间**,记为 Ω . 例如,试验 E_1 至 E_6 的样本空间分别为:

$$\Omega_1 = \{1 \text{ 点}, 2 \text{ 点}, 3 \text{ 点}, 4 \text{ 点}, 5 \text{ 点}, 6 \text{ 点}\};$$

$$\Omega_2 = \{\text{奇数}, \text{偶数}\};$$

$$\Omega_3 = \{(\text{中}, \text{中}), (\text{中}, \text{未中}), (\text{未中}, \text{中}), (\text{未中}, \text{未中})\};$$

$$\Omega_4 = \{\text{合格}, \text{不合格}\};$$

$$\Omega_5 = \{t | t \geq 0\};$$

$$\Omega_6 = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

样本空间不仅与试验本身有关,而且还与试验的目的有关. 对于同一个随机试验,试验目的不同,样本空间也不同. 如试验 E_1 和 E_2 , 都是掷一颗均匀对称的骰子,由于试验的目的不一样,其样本空间也不一样.

四、随机事件

在随机试验中,试验的每个可能发生的“结果”被称为**随机事件**,简称**事件**,一般用英文大写字母 A, B, C 等表示.

例如,在上述试验 E_1 中,如果用 A 表示“掷出奇数点”,那么 A 是一个随机事件. 由于在一次试验中,当且仅当掷出的点数为 1, 3, 5 中的任何一个时,才称事件 A 发生了,所以我们把事件 A 表示为 $A = \{1, 3, 5\}$. 同样地,若 B 表示“掷出偶数点”,则 $B = \{2, 4, 6\}$ 也是一个随机事件. 若 C 表示“掷出的点数为 5”,那么 $C = \{5\}$ 同样也是一个随机事件.

对于一个试验 E , 它的样本空间 Ω 是由 E 的全部可能结果组成的集合,而随机事件 A 就是由 E 的一部分可能结果组成的集合,因而事件 A 是样本空间 Ω 的子集,记作 $A \subset \Omega$. 称事件

A 发生,就是当且仅当属于 A 的某一个样本点在试验中出现.

对于一个试验 E ,在每次试验中必然发生的事件,称为**必然事件**;在每次试验中都不发生的事件,称为**不可能事件**.例如,在 E_1 中,“掷出的点数不超过 6 点”是必然事件,若用试验结果的集合来表示,这一事件就是 E_1 的样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 而事件“掷出的点数小于 1”是不可能事件.这个事件不包含 E_1 的任何一个可能结果,故我们用空集的记号 \emptyset 表示不可能事件.

一般地,对于试验 E ,包含它的所有可能的试验结果的样本空间 Ω 是必然事件;不包含它的任何一个试验结果的事件 \emptyset 是不可能事件.今后我们就用 Ω 表示必然事件,用 \emptyset 表示不可能事件.为了运算方便,把必然事件 Ω 和不可能事件 \emptyset 当作随机事件的两个极端情况.

另外,我们称仅含有一个样本点的事件为**基本事件**,如上例中的事件 C ;含有两个或两个以上样本点的事件为**复合事件**,如上例中的事件 A 和 B .

五、事件的关系与运算

因为事件是样本空间的一个子集,所以事件之间的关系与运算可按集合之间的关系与运算来处理.下面给出这些关系与运算在概率论中的提法和含义.

1. 包含与相等关系

注意到事件 A 发生是指当且仅当 A 中的样本点有一个发生.因此,若事件 A 发生必导致事件 B 发生,即 A 中的每个样本点必在 B 中,则称事件 A 包含于事件 B ,或称事件 B 包含事件 A ,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.例如,在“掷骰子”试验中,令 $A = \{\text{出现 2 点或 4 点}\}$, $B = \{\text{出现偶数点}\}$,则 $A \subset B$.

若事件 $A \supset B$ 且 $B \supset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$.

2. 和(并)事件

由“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”构成的事件,称为事件 A 与事件 B 的和(并)事件,记作 $A \cup B$.

例如 E_3 中,设 $C = \{\text{第一次命中}\}$, $D = \{\text{第二次命中}\}$,则 $C \cup D = \{\text{至少命中一次}\}$.

一般地,“ n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 中至少有一个发生”是一个事件,称为 A_1, A_2, \dots, A_n 的和(并)事件,记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$,简记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$.类似地,称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和(并)事件.

3. 积(交)事件

由“事件 A 与事件 B 同时发生”构成的事件,称为事件 A 与事件 B 的积(交)事件,记作 $A \cap B$ 或 AB .

例如 E_3 中, $C \cap D = \{\text{两次都命中}\}$.

与和事件情形相同,可把积事件的概念推广到 n 个事件及可列无穷多个事件的场合,即“ n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 同时发生”是一事件,称为 A_1, A_2, \dots, A_n 的积(交)事件,记作 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 或 $A_1 A_2 \dots A_n$,简记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$.类似地称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的积(交)事件.

4. 差事件

由“事件 A 发生而事件 B 不发生”构成的事件,称为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A - B$.

例如 E_3 中, $C-D = \{\text{第一次命中但第二次未命中}\} = \{\text{仅第一次命中}\}$.

5. 互不相容关系

若事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥. 显然, 基本事件之间都是互不相容的. 若多个事件中任意两个事件都互不相容, 则称这多个事件两两互不相容.

例如 E_3 中, 事件 $C = \{\text{第一次命中}\}$ 与事件 $E = \{\text{仅第二次命中}\}$ 是互不相容的.

当事件 A 、事件 B 互不相容时, $A \cup B$ 可记作 $A + B$.

6. 互逆关系

若事件 A 与事件 B 必有一个发生, 且仅有一个发生, 即 $A \cup B = \Omega, AB = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 为互逆的, 亦称事件 A 与事件 B 是对立事件, 即称 A 是 B 的对立事件(或 B 是 A 的对立事件), 记作 $A = \bar{B}$ (或 $B = \bar{A}$). 显然, \bar{A} 发生是指 A 不发生, 且有 $\bar{\bar{A}} = \Omega - A, \bar{\bar{A}} = A$.

值得注意的是, 若 A, B 互为逆事件, 则必互斥, 但反之不然. 另外, 当事件 A 较为复杂而 \bar{A} 较为简单时, 往往通过研究 \bar{A} 来研究 A .

当将事件看作集合时, 上述 6 种关系和运算与集合中对应的关系和运算完全一致(见表 1.2). 例如, 积事件 $A \cap B$ 是由那些既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合, A 与 B 互不相容则意味着构成 A 的样本点的集合与构成 B 的样本点的集合没有公共元素. 所有 6 种关系和运算都可由文氏图直观地表示出来(见图 1.1).

表 1.2

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间, 必然事件	全集
\emptyset	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	子集
\bar{A}	逆事件	A 的余集
$A \subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少一个发生(和事件)	A 与 B 的和(并)集
$A \cap B$	事件 A 、事件 B 同时发生(积事件)	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$A \cap B = \emptyset$	事件 A 、事件 B 互不相容	A 与 B 无公共元素

注 事件的运算满足如下基本关系:

- (1) $A\bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = \Omega, \bar{\bar{A}} = \Omega - A$;
- (2) 若 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B, AB = A$;
- (3) $A - B = A\bar{B} = A - AB, A \cup B = A \cup (B - A)$.

7. 完备事件组

设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是有限个或可数个事件, 若其满足:

- (1) $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$;

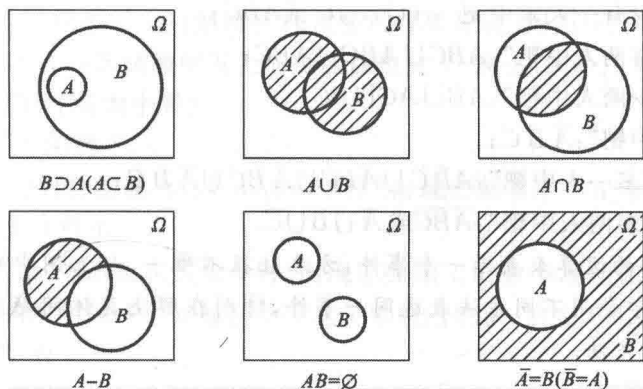


图 1.1

$$(2) \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega,$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一个完备事件组, 也称 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是样本空间 Ω 的一个划分.

显然, \bar{A} 与 A 构成一个完备事件组.

与集合论中集合的运算性质一样, 事件之间的运算满足下述运算规律:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$;
- (2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $(AB)C = A(BC)$;
- (3) 分配律 $A(B \cup C) = AB \cup AC$, $A \cup BC = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- (4) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

注 上述各运算律均可推广到有限个或可数个事件的情形.

例 1 设 A, B, C 是三个事件, 试用 A, B, C 表示下列事件:

- (1) A 发生, B 与 C 都不发生;
- (2) A, B, C 中恰好有一个发生;
- (3) A, B, C 中至少有一个发生;
- (4) A, B, C 都发生;
- (5) A, B, C 都不发生;
- (6) A, B, C 中不多于两个发生.

解 (1) $(A - B) - C = A\bar{B}\bar{C}$;

(2) $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;

(3) $A \cup B \cup C = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$;

(4) $ABC = \overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}}$;

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$;

(6) $\overline{ABC} = \overline{A \cup B \cup C}$

$$= \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC.$$

例 2 甲、乙、丙三人各射一次靶, 记 A 为“甲中靶”, B 为“乙中靶”, C 为“丙中靶”, 则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件:

- (1) “甲未中靶”: \bar{A} ;
- (2) “甲中靶而乙未中靶”: $A\bar{B}$;
- (3) “三人中只有丙未中靶”: ABC ;
- (4) “三人中恰好有一人中靶”: $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$;
- (5) “三人中至少有一人中靶”: $A \cup B \cup C$ 或 $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$;

- (6) “三人中至少有一人未中靶”: $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 或 \overline{ABC} ;
 (7) “三人中恰有两人中靶”: $AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$;
 (8) “三人中至少两人中靶”: $AB \cup AC \cup BC$;
 (9) “三人均未中靶”: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;
 (10) “三人中至多一人中靶”: $\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C}$;
 (11) “三人中至多两人中靶”: \overline{ABC} 或 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

注 用其他事件的运算来表示一个事件,方法往往不唯一,如上例中的(6)和(11)实际上是同一事件,读者应学会用不同方法表达同一事件,特别在解决具体问题时,往往要根据需要选择一种恰当的表达方法.

例3 简化下列各式:

- (1) $(A \cup B) - (A - B)$;
 (2) $(A \cup B)(A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B)$.

解 (1) $(A \cup B) - (A - B) = (A \cup B)\overline{(A - B)} = (A \cup B)\overline{(A\bar{B})}$
 $= (A \cup B)(\bar{A} \cup B)$
 $= (A\bar{A}) \cup (B\bar{A}) \cup (AB) \cup B = B.$

(2) $(A \cup B)(A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B) = (A \cup (B\bar{B}))(\bar{A} \cup B)$
 $= A(\bar{A} \cup B) = (A\bar{A}) \cup (AB) = AB.$

注意:对事件 A, B ,若 $A \subset B$,则有

$$A \cup B = B, \quad AB = A,$$

因此,对任意事件 A ,有

$$A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

最后,我们指出,在进行事件运算时,运算的优先顺序是:补运算为先,积运算其次,和或差的运算最后;若有括号,则括号内的运算优先.

1.2 随机事件的概率

对于一个随机事件 A ,在一次随机试验中,它是否会发生,事先并不能确定.但我们会问,在一次试验中,事件 A 发生的可能性有多大?并希望找到一个合适的数来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.为此,本节首先引入频率的概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

一、频率及其性质

定义 1 若在相同条件下进行 n 次试验,其中事件 A 发生的次数为 n_A ,则称 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率.

易见,频率具有下述基本性质:

- (1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
 (2) $f_n(\Omega) = 1$;
 (3) 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_n).$$

由于事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 刻画了 A 发生的频繁程度, 因而 $f_n(A)$ 愈大, 事件 A 发生愈频繁, 这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性也愈大. 那么, 能否用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的的大小呢?

我们先来考察下面的例子.

例 1 掷一枚均匀对称的硬币, 以 A 表示事件“出现正面朝上”, 记录事件 A 发生的频数及频率, 得数据如表 1.3 所示.

从表 1.3 可以看出, 当试验次数较少时, 出现正面朝上的频率波动比较大, 但是当试验次数增多时, 正面朝上的发生频率明显地在 0.5 这个数附近波动. 历史上也曾有人做过类似的试验, 所得数据见 1.1 节表 1.1.

表 1.3

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表格中的数据可以看出, 随着试验次数逐渐增多, 频率 $f_n(A)$ 总是在 0.5 附近波动, 并呈现出稳定于 0.5 的趋势. 频率的这种“稳定性”就是通常所说的统计规律性, 它揭示了隐藏在随机现象中的必然规律性, 我们用频率的稳定值来刻画事件 A 发生的可能性的的大小是合适的.

思考题 圆周率 $\pi=3.1415926\cdots$ 是一个无限不循环小数, 我国数学家祖冲之第一次把它计算到小数点后七位, 这个纪录保持了 1000 多年! 以后不断有人把它算得更精确. 1873 年, 英国学者沈克士公布了一个 π 的数值, 该数值在小数点后一共有 707 位之多! 但几十年后, 曼彻斯特的费林生对它产生了怀疑. 他统计了 π 的 608 位小数中 0~9 十个数字出现的次数, 得到了表 1.4 中的结果:

表 1.4

数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出现次数	60	62	67	68	64	56	62	44	58	67

你能说出他产生怀疑的理由吗?

定义 2 设有随机试验 E , 若当试验的重复次数 n 充分大时, 事件 A 的发生频率 $f_n(A)$ 稳定地在某数 p 附近摆动, 则称数 p 为事件 A 的概率, 记为

$$P(A) = p.$$

首先, 概率的统计定义不要求随机试验必须具备“有限性”及“等可能性”, 因而它的适用范围更广. 其次, 它提供了估算概率的方法, 即在试验的重复次数很大时, 可以用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 近似代替事件 A 的概率 $P(A)$. 最后, 它提供了一种检验理论或假设正确与否的准则. 具体来说, 如果我们依据某种理论或假设定出某事件 A 的概率为 p , 但不知其是否与实际相符, 为此, 可做大量重复试验并算出 A 发生的频率 $f_n(A)$. 若 $f_n(A)$ 与 p 相差很大, 则认为该理论或假设可能不正确; 若 $f_n(A)$ 与 p 很接近, 则认为实验的结果支持了该理论或假设. 我们将在第 8 章(假设检验)中专门来讨论这一类问题.

尽管概率的统计定义有上述种种优点, 然而, 它的不足之处也是显而易见的. 首先, 依定义 2 要确定某事件的概率, 就必须进行大量重复试验, 这在实际中往往难以办到; 其次, 即便有条件进行大量重复试验, 你也无法按本定义确切地指出何数为频率的稳定值. 以例 1 来说, 如果不是基于对匀称硬币的直观认识, 如何能认定频率是稳定在 0.5, 而不是 0.502 或别的什么数呢?

后述内容中的概率的古典定义和统计定义存在着这样或那样的不足, 这些不足不仅妨碍了概率论自身的发展, 也使人们对作为数学分支的概率论的科学性产生了怀疑. 1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫首先提出了概率的公理化定义, 从此, 概率论有了坚实的理论基础并得到迅速发展. 限于本课程教学大纲的要求, 本书只简单介绍概率公理化定义的一些内容.

二、概率的公理化定义

定义 3 设 E 是随机试验, Ω 是它的样本空间, 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 若 $P(A)$ 满足下列三个条件:

- (1) 非负性 对每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$;
- (2) 完备性 $P(\Omega) = 1$;
- (3) 可列可加性 设 A_1, A_2, \dots 是两两互不相容的事件, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

三、概率的性质

由概率的公理化定义, 可推出概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\emptyset) = 0$.

证明 令 $A_n = \emptyset$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, 且 $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j; i, j = 1, 2, \dots$).

由概率的可列可加性得

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset).$$

由概率的非负性知, $P(\emptyset) \geq 0$, 故由上式可知 $P(\emptyset) = 0$.

注 不可能事件的概率为 0, 但反之不然.

性质 2(有限可加性) 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

证明 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$, 即有

$$A_i A_j = \emptyset \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots).$$

由概率的可列可加性得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) + 0 = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \end{aligned}$$

性质 3 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

证明 因 $A \cup \bar{A} = \Omega$, 且 $A\bar{A} = \emptyset$, 由性质 2 得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

因此 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 4 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$. 特别地, 若 $B \subset A$, 则

(1) $P(A - B) = P(A) - P(B)$;

(2) $P(A) \geq P(B)$.

证明 因 $A = (A - B) \cup AB$, 且 $(A - B)(AB) = \emptyset$, 如图 1.2 所示, 再由概率的有限可加性, 即得 $P(A) = P(A - B) + P(AB)$, 所以

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

特别地, 若 $B \subset A$, 如图 1.3 所示, 则

$$P(A) = P(A - B) + P(AB) = P(A - B) + P(B).$$

又由概率的非负性, 即 $P(A - B) \geq 0$, 有 $P(A) \geq P(B)$.

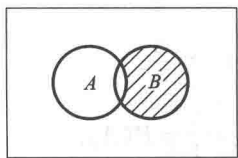


图 1.2

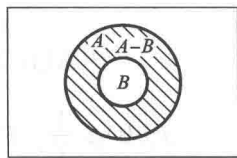


图 1.3

性质 5 对任一事件 A , $P(A) \leq 1$.

证明 因 $A \subset \Omega$, 故由性质 4 得 $P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

性质 6 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明 因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$, 且 $A(B - AB) = \emptyset$, $AB \subset B$, 故有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

注 性质 6 可推广到任意 n 个事件的并的情形, 如 $n=3$ 时, 有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

例 2 已知 $P(\bar{A}) = 0.5$, $P(\bar{A}B) = 0.2$, $P(B) = 0.4$, 求:

(1) $P(AB)$; (2) $P(A - B)$; (3) $P(A \cup B)$; (4) $P(\bar{A}\bar{B})$.

解 (1) 因为 $AB + \bar{A}B = B$, 且 AB 与 $\bar{A}B$ 是不相容的, 故有

$$P(AB) + P(\bar{A}B) = P(B),$$

于是 $P(AB) = P(B) - P(\bar{A}B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$.

(2) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.5 = 0.5$,

$P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.5 - 0.2 = 0.3$.