

主编 王娴 鲍俊艳 谷银山

C A L C U L U S
T U T O R I A L S

微 积 分 学
教 程
(上)

高等教育出版社

微积分学教程 (上)

CALCULUS TUTORIALS

主编 王娴 鲍俊艳 谷银山

副主编 刘红 张玉芬 赵文胜 周厚春

内容简介

本书共 11 章, 分上、下两册. 上册内容包括预备知识、函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数应用和不定积分; 下册内容包括定积分、多元函数微积分学、级数、常微分方程和差分方程. 全书系统介绍了微积分学的基本概念、基本理论和基本方法. 教材结构顺序合理、讲解透彻易懂, 设置同步训练和问题研讨, 同时配备不同层次的习题供学生练习, 注重知识关联与综合能力的提高.

本书可作为高等学校经济管理类专业的微积分教材, 也可作为相关工作人员的参考书.

微积分学教程 Calculus Tutorials

WEIJIFENXUE JIAOCHENG

图书在版编目(CIP)数据

微积分学教程. 上 / 王娴, 鲍俊艳, 谷银山主编.

— 北京: 高等教育出版社, 2016.9

ISBN 978-7-04-045801-5

I. ①微… II. ①王… ②鲍… ③谷… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 149299 号

策划编辑 高丛
责任编辑 高丛
封面设计 张申申
版式设计 张申申
插图绘制 杜晓丹
责任校对 刘莉
责任印制 朱学忠
出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印刷 北京信彩瑞禾印刷厂
开本 850mm × 1168mm 1/16

印张 17.75
字数 270 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版次 2016 年 9 月第 1 版
印次 2016 年 9 月第 1 次印刷
定价 36.80 元

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任 and 行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581999 58582371 58582488//反盗版举报传真 (010) 82086060//反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn//通信地址 北京市西城区德外大街 4 号 高等教育出版社法律事务与版权管理部//邮政编码 100120

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。版权所有 侵权必究。
【物料号 45801-00】

Gottfried Wilhelm Leibniz

1646 – 1716



Sir Isaac Newton

1643 – 1727



BRITISH

前言

Preface

编者

2016年3月

一、微积分学的地位和作用

作为现代数学基础的微积分，它具有与所有数学课程一样的特点，可概括为以下三个方面：一是（高度的）抽象性，二是（严密的）逻辑性，三是（广泛的）应用性。

正是由于数学的广泛应用，才使得它数百年来不断发展、不断完善，使得新的交叉型学科不断出现，使得新的应用领域不断产生，使得它永远具有发展的动力，使得它具有经久不衰的强大生命力。

在经济学中，许多专业课如数理经济学、经济计量学、经济控制论、经济预测学、微观经济学、金融数学……都以数学作为其研究方法。因此微积分也就成为了经济学专业的一门重要基础课。

因此，作为经济管理专业的学生，就应该学好这门课程。

另外，现代数学对我们理性思维方式的培养有着重要的作用。

微积分运用的主要是逻辑、思辨和推演等理性思维方法，它的理论来源于实际，反过来又进一步指导解决实际问题。在微积分的教学中应体现这种理性思维的培养，其作用是其他学科难以替代的，它对大学生全面素质的提高、分析能力的加强、创新意识的启迪都是至关重要的。

因此，作为具有较高综合素质的大学生，也必须学好这门课程。

二、本教材的编写思路

要想学好微积分这门课程，一本好的教材是很重要的。然而，编写一本好的教材又是多么的不容易。

经济管理类各专业的学生中,既有本科批次(一、二、三批)的分别,又有文科、理科生源的区别,各批各科学学生中还有数学基础水平的差别,因此总体水平差距很大。一本教材如何适应各个水平层次的学生是个关键性问题,既不能为了适合基础差的学生而简单降低教学内容的水平,这可能导致耽误基础好的学生,也不能为了满足基础好的学生简单增加内容的难度和深度,这又可能导致给基础差的学生造成巨大的学习困难。因此,要做到两者兼顾,各得所需,使基础差的学生能学会,基础好的学生能提高,这是首要的难点之一。

学生对课程的目标需求也有不同,所有学生都需要为后继的专业课程打下较好的基础,又有不少的学生需要为考研深造打下更厚实的基础,而教材的深度和难度最好要能适应不同的目标需求,这是难点之二。

教学课时的限制造成了学生需要学习较多的知识与教师在有限的时间内又不能讲解太多的矛盾,同时也造成了教材内容在广度和深度上矛盾。因此,如何使学生既能从课本中学到丰富的知识,又便于教师在有限的教学时间内安排好重点和难点内容的讲授,这是编写教材的难点之三。

作为经济管理类的基础课程,应该介绍适当的经济学知识和应用实例,不能是纯数学理论,但它毕竟是数学课,又要保证数学理论体系的完整,保证学生有足够的数学训练,这也是在确定教材内容时要研究的问题。而且除经济实例外,为使学生深刻体会数学的广泛应用,是否应该涉及其他方面的实例,这些问题如何取舍、如何把握,是编写本教材的难点之四。

基于上述问题,在进行了深入的研讨之后,我们确定了编写本教材的基本思路。

一是研究了针对本科教学而制订的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”与针对研究生入学考试而制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中“数学三考试大纲”,将其中要求的基本内容作为本教材的内容,其中的重点也是本教材的重点。

二是本教材要以微积分中的基本概念、基本理论、基本方法等“三基内容”为主进行介绍,保证理论的完整性。

三是不能仅为理论内容的罗列,还应注重对这些知识的“讲解”与“教授”。

四是要使内容的讲授、例题与练习题的配备、扩展内容的设置,体现出由易到难的层次,能使基础不同的学生从中分离出不同的层次而加以学习,并能逐层提高。

五是所举实例以经济活动中的问题为主,适当安排少量其他方面的实例。

三、本教材的特色

1. 精心组织内容、结构顺序合理

章节内容、重点内容遵照顺序合理、由浅入深、由简到繁、内容相关等原则,精心组织,符合相关教学指导文件的要求,便于学生学习。每一章列出主要内容,给出知识点,指出重点和难点及教学建议。

2. 内容充实准确、讲解透彻易懂

多用设问提出问题，多用启发方式，引导思路，讲解通俗易懂，像与学生交谈；定义、定理、证明、解题时严格按标准叙述，讲解说明时用引导交流的语气，使学生在读书时仿佛听老师在讲课；难度较大或重要的定义、定理采用注解，辅助实例等方式讲解透彻；代表性的典型例题先分析思路、步骤，然后进行解答，或先解答，后进行说明和总结一般方法；例题给出多种解法，或给出另一解法的提示，作为思考和练习。

3. 配备同步训练、设置问题研讨

除例题外还设置了同步训练，供学生复习时使用，以强化所学知识与方法，也可供教师授课时灵活使用，丰富课堂教学形式；在适当的位置提出思考题，供学生学习时讨论，培养研究意识、团队合作和知识关联的能力。

4. 注重知识关联、注重综合提高

新内容的讲解注重与旧知识的关联，用“知识回顾”指出旧知识所在位置；对与后续内容相关的地方，用“知识预告”加以提点；某些知识采用二维码链接的形式增加补充内容，以便学生夯实基础；每章最后增加一节参考内容——综合与提高，以便基础较好的学生扩展和提高。

5. 加强练习、巩固基础

习题分A、B、C三部分，A为针对教学内容的基础练习，B为整章内容及已学内容的综合练习；每一章设小测试卷C，重点为三基内容，检验教学效果。

6. 图形丰富、辅助理解

用计算机软件（包括手工矢量图软件、数学软件、3D软件）绘制图形，图形丰富，辅助抽象理论知识的形象理解。

7. 版式布局独特、融入人文元素

采用国际流行版式，外侧设置“笔记区”，用于记录老师补充的内容、不同的讲法、自己的体会等；注意总结学习策略、方法和经验。

8. 设置不同层次，适应不同需要

基本理论与讲解部分是基础性内容，是要求掌握的内容。

有些理论内容（如定理的证明等）较为复杂，大纲并不要求，但又对定理的理解有帮助，则作为“参考内容”以二维码进行链接，供学生选择、参考。

为了适应有较高要求的学生的需要，每一章都设置了一节更高层次的、综合与提高性的选读内容，可起到开阔思路、提高技能、拓展知识面的作用。

四、编写分工

按以下分工，谷银山为负责人，与其他人员共同研讨、编写。

第〇章、第一章、第三章、第十章，谷银山；第二章、第八章，张玉芬、赵文胜；第四章、第九章，鲍俊艳；第五章、第六章，刘红；第七章，王娟；全书由王娟、谷银山统稿。

五、致谢

感谢河北大学有关领导的关心、支持、信任和鼓励，使我们获得了编写本书的巨大精神力量，增加了完成任务的勇气和信心。感谢所有参考书的作者（由于人员众多，不一列出，见参考文献），感谢他们的智慧和成果为我们编写本书提供的极大帮助。感谢我们的同事及所有支持和帮助过我们的家人和朋友。

感谢高等教育出版社的领导及相关工作人员，是他们为本书的出版做了大量、细致的工作。

六、征求意见

由于时间紧、任务量大以及作者水平、经验的限制，本书难免有疏漏和错误之处，敬请各位专家和同仁不吝赐教、批评指正。

请将您的意见或建议致信给我们，我们将不胜感谢。在对本教材进行修订时我们将认真考虑您的意见或建议。我们大家的不懈努力和一丝不苟的认真态度将会使我们的广大学生受益。

电子邮箱：1575285727@qq.com, 736981456@qq.com, 1127485477@qq.com。

邮政信箱：河北大学数学与信息科学学院，071002。

致教师朋友

编者

2016年3月

各位老师：大家好！

经过艰苦的努力，这本教材终于出版了，能为渴求知识的全体学生做一点具体的事情，是我们共同的心愿。

说实话，教材本身还有不细致、不完善之处，还需要全体老师的指正和实践的检验，也只有在使用中不断修改、补充，才能使她日臻完善。

无论您是从事多年教学工作的名师高手，还是走上讲台不久的后起新秀，相信您一定积累了丰富的教学经验，或者产生了全新的心得体会，这些都是我们所期待的财富。

因此，我们真诚期待您能针对本教材的不足，提出宝贵意见和建议，让我们共同关注这部教材的成长和成熟。

在使用教材时，以下几点敬请注意：

您对各种教学方法（“传授式”“示范式”“启发式”“建构式”“研究式”“反转式”等）一定都很熟悉，针对不同的对象、不同的教学内容，能灵活地选择运用这些方法，并能使这些方法相互补充。

教材的设计中对不同的教学方法也有所体现，但是书中的观点仅仅是一家之言，只是作者的有限体会和经验，因此，最主要的是别让本书限制您的讲解思路、授课策略和教学特点，一定要将您自己独到的见解和独特的方法呈现给学生。

教材中所有的知识点讲解都比较详细，便于学生课下复习、阅读，您可以根据教学时间选择重点和难点内容进行讲授。

教材中设置的同步训练、研究讨论等内容，既可作为学生课下复习时使用，也可作为课堂调节。

教材中没有设置知识小结，可督促学生自己完成这项工作。将主要概念、理论、方法加以归纳总结，会收到很好的效果。

最后，我们需要共同探讨的一点是如何使我们的教材与我们的授课变得精彩，从而使学生乐于读书和上课。

敬祝教祺。

致学生朋友

编者

2016年3月

学生朋友们：大家好！

经过较长时间的努力，这份精心为大家设计制作的教材终于和你们见面了。我们全体编写人员均感到由衷的欣慰。

英国当代哲学家 A. N. 怀特黑德说过这样一句话：“这是一个可靠的规律，当数学或哲学著作的作者以模糊深奥的话写作时，他是在胡说八道。”因此，我们在编写本教材时，除了一些严格的理论的表述（即使这些内容也力求使之不深奥）之外，其他的讲解我们都力求通俗易懂，以便于同学们阅读、理解。

在充分分析了经济、管理类学生的知识基础的前提下，我们力求能使教材适合不同层次同学的要求。

如果你的数学基础不是很好，没关系，现在开始学也不晚。为此，本书将所需的中学知识列在了“预备知识”这一章中，你可以随时查阅。对于新知识，你可以先不关注定理的证明，而是先理解它的含义及它的应用，对于较难的例题和练习题也可以暂时放一放，先阅读简单的例题，做基础的练习，掌握好基础之后，再进行提高。

如果你的数学基础很扎实，这太好了，你可以在学习了全部的计划内容、做了所有的练习后，再阅读一些提高性的内容（本书为大家提供了一部分这样的内容），参考一些同步学习指导，为今后更高层次的学习打下坚实基础。

如果你的基础介于上述两者之间，相信你会对课本上的内容做出选择。

要知道，一本书上的观点仅仅是编著者的一家之言，每一位老师在为我们授课时，都会向我们介绍他（她）的独特见解、不同看法、不同做法，这都是值得我们认真学习的。同时，我们在学习时，也会有自己的想法和体会。为此本书在每一页的外侧设计了“笔记区”，以用于记录老师补充的内容、不同的讲解以及自己在学习中的问题、总结、体会等。

要知道，数学的学习不仅要动脑，更要动手。你可以做一个这样的实验：把一个例题读两遍，之后合上书，写出它，这多半是很困难的；如果你把这道题做一遍，再写出它，就显得不再困难。

要知道，学好一门课程是需要付出的，学习数学更是如此，要付出更大的耐心、毅力，付出更多的时间、精力。同时，学习数学也会培养你严谨的作风、敏捷的思维、坚韧的毅力、顽强的性格、持之以恒的态度等优良素质，学习数学也能提升我们的人文素养。可见，数学的确是我们的良师益友！

要知道，任何专业知识的学习，其效果不全在知识的本身，学到的知识是可见的，而在学习过程中培养的能力是无形的，而且是更重要的。

要知道，读书对我们的一生都会起到重大而积极的影响。所有的知识来源于读书（含电子书），而所有的知识又将成为我们思想与创造的源泉。请谨记：读书的价值远远超过网上的闲聊胡扯。

希望这本书能如一位真正的好老师，在向你展示微积分学基础知识的同时，也能在无言中默默地传递给你一份平易、一丝严谨和一种豁达，使你在学习科学知识的同时，也能收获优良的素质，也能兼得人生的启迪。

祝大家：

好好学习，天天快乐！

微积分学基本知识结构

Basic knowledge of Calculus Structure

微积分学 (calculus) 是经典数学分析的主体内容, 包含微分学与积分学两大部分.

微分学 (differential calculus) 的主要内容包括一元函数的导数、多元函数的导数、高阶导数、偏导数、微分、全微分的基本概念、运算法则, 及以此为基础对函数进行研究的一系列方法. 求函数的导数或微分的方法统称为微分法 (differentiation).

积分学 (integral calculus) 的主要内容包括一元函数的定积分、一元函数的不定积分和多元函数的各种积分的概念、理论、计算, 及以此为基础对函数的数量变化进行研究的方法. 求函数各种积分的方法统称为积分法 (integration).

简而言之, 微积分学的目标是研究函数的改变量, 微分学研究函数在某一点 (局部) 的“微观”改变量, 积分学研究函数在某一个范围内 (整体) 的“宏观”改变量.

将函数在一个范围内的宏观改变量“细分”为每一点的微观改变量, 这就是微分; 反之, 将函数在某个范围内每一点的微观改变量“累加”, 成为这个函数在此范围内的总体改变量, 这便是积分.

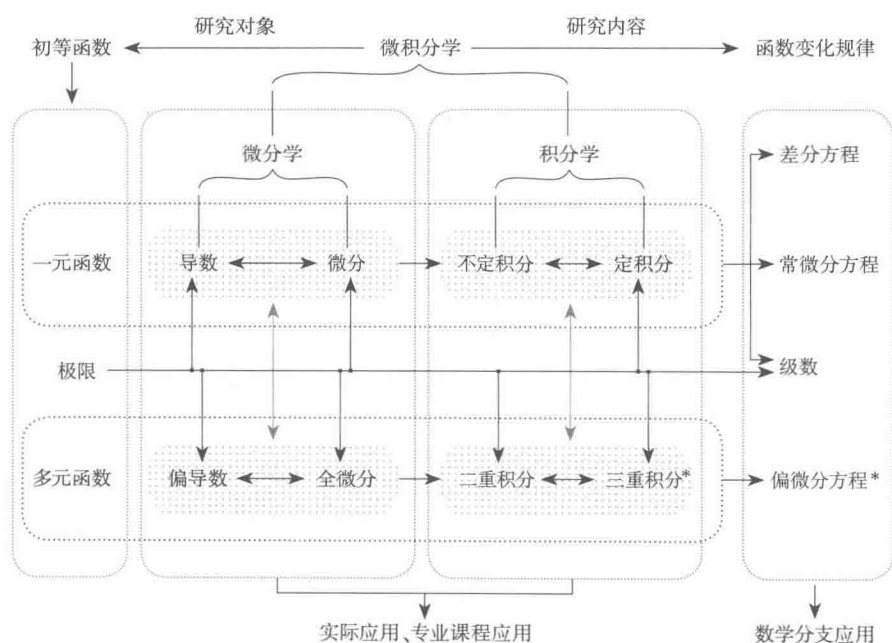
这或许就是微积分学的精要之处, 也算是对微积分学的精妙总结.^①

微积分学基本知识结构如下图所示.

① 据《数学辞海 (第一卷)》所述, 中国第一本微积分译本是 1859 年清代李善兰的《代微积拾级》十八卷. 由此我们也不禁感叹、佩服, 前人的

的确是真正理解了“calculus”一词的精义之后才将其译成了“微积分”一词, 其中的“微”与“积”二字又是多么的精确.

◎ 微积分学基本知识结构图



注 *图中虚线方框中的内容不是本课的学习内容。

∴ 知识模块或模块组 \longleftrightarrow 模块相互联系 \longrightarrow 前端以后端为基础。

思考题

1. 从图中可以看出微积分学包含哪些较大的知识模块？如何划分出这些模块？
2. 各模块间是相互独立的吗？各模块中的内容是各自独立的吗？
3. 微积分学的一个重要基础内容是什么？它影响到哪些知识的学习？
4. 微积分的应用包含在哪些主要方面？

目录

Contents

第〇章 预备知识	001
§0.1 实数集	002
一、数的表示	002
二、区间	003
三、邻域	004
§0.2 常用公式与符号集	005
一、基础公式	005
二、三角公式	006
三、常用符号	008
四、充分、必要、充分必要条件	009
§0.3 行列式简介	009
一、行列式的定义	009
二、行列式的简单性质	010
§0.4 极坐标简介	011
一、极坐标系	011
二、极坐标与直角坐标的关系	012
三、直角坐标方程转化为极坐标方程	013
§0.5 复数简介	014
一、复数及相关概念	014
二、复平面及复数的表示	015
三、复数的运算	016
第一章 函数	021
§1.1 函数的概念	022

	一、常量与变量	022
	二、函数的概念	022
	三、分段函数	025
	四、隐函数	026
	五、应用问题建立函数举例	027
§1.2	函数的性质	028
	一、函数的奇偶性	028
	二、函数的单调性	029
	三、函数的有界性	030
	四、函数的周期性	032
§1.3	反函数与复合函数	032
	一、反函数	032
	二、复合函数	034
§1.4	基本初等函数	036
	一、常数函数	037
	二、幂函数	037
	三、指数函数	037
	四、对数函数	038
	五、三角函数	038
	六、反三角函数	040
§1.5	初等函数	041
	一、多项式函数	041
	二、有理函数	042
	三、幂指函数	045
§1.6	常用经济函数简介	045
	一、需求函数与供给函数	045
	二、成本、收入、利润函数	047
*§1.7	综合与提高	048
	习题一	052
第二章	极限与连续	059
§2.1	数列的极限	060
	一、数列的概念	060
	二、数列极限的概念	061
§2.2	函数的极限	064
	一、函数极限的定义	064

	二、极限符号的使用约定	069
	三、极限的性质	069
§2.3	无穷小量与无穷大量	071
	一、无穷小量	072
	二、无穷大量	074
	三、无穷大量与无穷小量的关系	075
§2.4	极限运算法则	076
	一、函数极限的四则运算法则	076
	二、复合函数的极限运算法则	081
	三、幂指函数的极限运算法则	082
§2.5	极限存在准则 两个重要极限	083
	一、极限存在准则	083
	二、两个重要极限	085
§2.6	无穷小量的比较	091
§2.7	函数的连续性与间断点	093
	一、函数的连续性	093
	二、函数的间断点	096
§2.8	连续函数的运算与初等函数的连续性	098
	一、连续函数的和、差、积、商的连续性	098
	二、反函数与复合函数的连续性	098
	三、初等函数的连续性	099
§2.9	闭区间上连续函数的性质	101
	一、有界性与最大值最小值定理	101
	二、零点定理与介值定理	102
*§2.10	综合与提高	103
	习题二	108
第三章	导数与微分	117
§3.1	两个经典实例	118
	一、变速直线运动的速度	118
	二、平面曲线切线的斜率	118
§3.2	导数与导函数的概念	119
	一、导数的概念	120
	二、导数的几何意义	122
	三、左、右导数的概念	122
	四、导函数的概念	124

	五、函数连续性与可导性的关系	125
§3.3	基本函数的导数公式与四则运算法则	126
	一、几个简单的导数公式	127
	二、导数的四则运算法则	129
	三、反函数的求导法则	132
	四、导数的基本公式	133
§3.4	复杂函数的求导法则	135
	一、复合函数的导数——链式求导法则	135
	二、隐函数的求导法则	138
	三、幂指函数的导数——取对数求导法则	140
	四、抽象函数的导数	141
	五、参数方程确定的函数的求导法则	142
§3.5	高阶导数	144
	一、高阶导数的概念	144
	二、高阶导数求导实例	145
§3.6	微分	147
	一、微分的定义	147
	二、微分的性质	148
	三、基本微分公式与运算法则	150
	四、微分计算的例题	153
	五、微分在近似计算中的应用	154
§3.7	导数在经济中的简单应用	155
	一、边际与边际分析	155
	二、弹性与弹性分析	156
*§3.8	综合与提高	159
	一、导数定义的灵活应用	159
	二、分段函数的导(函)数	161
	三、高阶导数求导实例	162
	习题三	165
第四章 中值定理及导数应用		177
§4.1	中值定理	178
	一、费马定理	178
	二、罗尔中值定理	179
	三、拉格朗日中值定理	180
	四、柯西中值定理	182