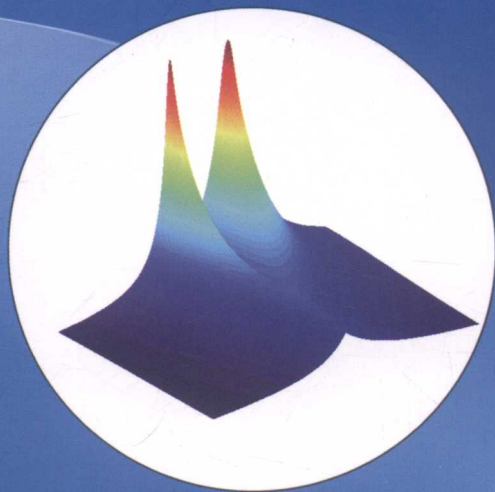


分数阶系统的分岔与共振

Bifurcation and Resonance
in Fractional-order Systems

杨建华 著



科学出版社

分数阶系统的分岔与共振

杨建华 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

分数阶微积分及相关研究是近年来科研领域的研究热点, 该项研究不仅具有重要的理论意义, 而且具有潜在的应用价值。本书内容主要取材于作者及合作者近几年的研究成果, 深入浅出地讲解分数阶系统的分岔与共振行为。

本书侧重于介绍分数阶系统分岔与共振的一些新的研究方法, 这些方法有的是作者近年来所提出的, 有的是作者对原方法进行的改进与发展。全书内容共分为 9 章, 涉及不同周期激励下分数阶线性系统的共振分析, 不同分数阶非线性系统的叉形分岔、鞍结分岔、跨临界分岔、分岔转换以及分岔行为对共振现象的影响。本书采用待定系数法研究分数阶线性系统的稳态响应, 使求解过程大为简化, 发展了“快慢变量分离法”用以研究双频周期信号激励下分数阶非线性系统的分岔与共振行为, 作者提出了三种不同的数值方法模拟平衡点的静态分岔, 研究了分数阶阻尼对响应幅值增益及共振模式的影响规律。

本书不仅有理论研究, 还给出了关键图形的 MATLAB 仿真程序供读者参考。本书中系统所受的激励, 既可视作力, 也可视为各种形式的信号。本书适合于机械、力学、通信、物理、应用数学等领域的科研人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶系统的分岔与共振/杨建华著. —北京: 科学出版社, 2017.2

ISBN 978-7-03-051750-0

I. ①分… II. ①杨… III. ①线性系统(自动化)—系统分析②非线性系统(自动化)—系统分析 IV. ①TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 027124 号

责任编辑: 惠 雪 沈 旭 / 责任校对: 李 影

责任印制: 张 倩 / 封面设计: 许 瑞

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2017 年 3 月第一次印刷 印张: 11

字数: 220 000

定价: 79.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

分数阶微积分的提出具有悠久的历史,但在进入 21 世纪之后才有了飞跃性的发展。目前分数阶微积分是科学与工程领域的研究热点,虽然已取得了丰富的成果,但距其在工程中广泛地实际应用还有较远距离。分数阶系统具有常规整数阶系统不具有的优点,甚至被一些科研人员称为“21 世纪系统”。由此可见,研究分数阶微积分以及分数阶系统的动力学行为具有重要的意义和价值。

本书主要研究分数阶系统的分岔与共振行为,侧重于介绍一些新方法来分析分数阶系统的动力学行为。非线性系统分岔和共振的种类丰富多彩,本书重点介绍的是双频信号激励下非线性系统平衡点的静态分岔以及共振行为。在以往的研究成果中,静态分岔一般由系统分岔参数的变化引起,本书研究的分岔行为由高频激励、分数阶阻尼以及时滞系统的时滞量所引起,其新颖的分岔方式与结果能够引起本领域读者的兴趣。本书研究的平衡点静态分岔包括叉形分岔、鞍结分岔、跨临界分岔以及扰动下其他分岔方式向鞍结分岔的转化行为。对共振行为的研究,本书首先引入待定系数法分析不同形式周期激励下线性系统幅频响应曲线的共振行为,接着用快慢变量分离法研究双频信号激励下非线性系统的振动共振。振动共振是近年来提出的一种新的非线性动力学现象,研究双频信号引起的非线性系统的响应情况,探讨微弱低频信号对系统响应的重要影响规律。

本书共分为 9 章。第 1 章,介绍分数阶导数的定义以及分数阶导数的常用性质,本章不对这些内容做过于详细的介绍,而侧重于介绍后续章节所用到的内容。数值计算在本书中占据很大比重,本章简要介绍分数阶微分方程两种常用的数值计算方法。第 2 章,用待定系数法求解简谐激励下分数阶线性系统的响应特性,并通过傅里叶系数和叠加原理给出任意周期激励下分数阶线性系统的各阶响应特性。第 3 章,求解基础激励下分数阶线性系统的响应特性,通过将周期激励展开成傅里叶级数,利用叠加原理求得基础激励为一般周期形式激励时线性系统的动力传递系数,并解决了激励在某些特殊点不可导的问题。第 4~9 章,依据快慢变量分离法研究分数阶非线性系统的不同静态分岔与共振行为。第 4 章,研究双频信号激励下分数阶 Duffing 系统的叉形分岔及振动共振问题,给出分数阶阻尼以及激励信号对系统叉形分岔与振动共振的影响规律。第 5 章,研究外激与参激联合激励下,系统的叉形分岔与振动共振,提出模拟平衡点静态分岔的第一种数值计算方法。第 6 章,研究分数阶非线性系统的鞍结分岔,讨论不同参数对鞍结分岔的影响,提出模拟平衡点静态分岔的第二种数值计算方法。第 7 章,研究分数阶非线性系统的分岔转换现象,在高频

扰动作用下发生跨临界分岔的系统,其分岔行为由跨临界分岔转化为鞍结分岔,提出模拟平衡点静态分岔的第三种数值计算方法,并讨论不同参数引起的共振行为。第 8 章,提出变尺度振动共振理论,基于变尺度振动共振原理可以增强任意频率的微弱低频特征信号。第 9 章,研究含时滞反馈的分数阶非线性系统的叉形分岔与振动共振行为,并详细讨论阻尼阶数、时滞反馈对系统叉形分岔以及振动共振的影响规律。

非线性系统的动力学行为非常丰富,除了本书介绍的平衡点静态分岔以及振动共振,还有其他重要形式的分岔行为,比如 Hopf 分岔、周期分岔等,共振行为除了振动共振还有幅频响应曲线呈现的主共振、亚谐及超谐共振以及随机共振等。非线性系统的解析分析方法,除了本书提出的快慢变量分离法,还有诸多的分析方法,比如平均法、多尺度法、摄动法等。限于本书的章节内容以及作者的知识水平,本书对这些内容暂不做介绍。

本书的相关研究内容及本书的出版得到了国家自然科学基金(非线性系统的变尺度随机共振与振动共振及其相互作用机理研究,项目编号:11672325)、江苏高校优势学科建设工程资助项目以及江苏高校品牌建设工程资助项目等多个项目的资助,在此表示诚挚的感谢。

本书主要取材于作者与合作者近五年的研究成果,为方便读者学习和验证,给出了一些重要图形的 MATLAB 仿真程序。书中每一个程序,都凝聚着作者的大量心血。尽管有些程序不够完美,不够简洁,但作者对书中所有的程序都进行了数次调试,力求准确无误。由于分数阶微积分的计算特点,加之程序循环过程中的运算量过大,程序仿真计算需要的时间较长。为突出本书的简洁性和实用性,本书只给出部分重要图形的 MATLAB 仿真计算程序,并对程序中的一些语句做了注释。

由于本书编写时间仓促加之作者水平有限,无论在理论讲解还是程序编写方面,都难免有错漏及不足之处,恳请同行专家和广大读者批评指正,不吝赐教,也欢迎进行学术问题的交流与讨论,作者邮箱 jianhuayang@cumt.edu.cn。

杨建华

2016 年 12 月于中国矿业大学

目 录

前言

第 1 章 分数阶导数的基础知识	1
1.1 分数阶导数的定义	1
1.2 分数阶导数的基本性质	2
1.3 分数阶微分方程的数值算法	3
1.3.1 同一微分方程中含有一个导数项方程的数值求解	3
1.3.2 同一微分方程中含有两个导数项方程的数值求解	6
1.4 本章重要图形的 MATLAB 仿真程序	6
参考文献	8
第 2 章 周期激励下分数阶线性系统的稳态响应	11
2.1 简谐激励下系统响应的幅频特性	11
2.1.1 近似解析解	11
2.1.2 数值仿真结果	13
2.2 非简谐周期激励下系统响应的幅频特性	15
2.2.1 周期方波激励下系统响应的幅频特性	16
2.2.2 周期全波正弦激励下系统响应的幅频特性	17
2.3 本章重要图形的 MATLAB 仿真程序	19
参考文献	23
第 3 章 基础激励下分数阶线性系统的稳态响应	24
3.1 简谐激励下系统的动力传递系数	24
3.1.1 近似解析解	24
3.1.2 数值仿真结果	25
3.2 非简谐周期激励下系统的动力传递系数	26
3.2.1 周期方波激励下系统的动力传递系数	27
3.2.2 周期全波正弦激励下系统的动力传递系数	28
3.2.3 周期三角波激励下系统的动力传递系数	29
参考文献	31
第 4 章 分数阶非线性系统的叉形分岔与振动共振	32
4.1 非线性系统的振动共振	32
4.1.1 传统意义的共振	32

4.1.2	振动共振现象及度量指标	33
4.1.3	振动共振与信号的调制	37
4.1.4	振动共振与随机共振	39
4.2	分数阶 Duffing 系统的叉形分岔与振动共振	39
4.2.1	过阻尼形式的分数阶 Duffing 系统	40
4.2.2	欠阻尼形式的分数阶 Duffing 系统	47
4.3	分数阶五次方非线性系统的叉形分岔与振动共振	51
4.3.1	叉形分岔	52
4.3.2	振动共振	58
	参考文献	60
第 5 章	参激分数阶非线性系统的叉形分岔与共振现象	64
5.1	分数阶 Mathieu-Duffing 系统	64
5.2	叉形分岔	66
5.3	共振分析	68
5.3.1	系统参数引起的共振	68
5.3.2	幅频响应	70
5.4	本章重要图形的 MATLAB 仿真程序	74
	参考文献	76
第 6 章	分数阶非线性系统的鞍结分岔与共振现象	78
6.1	响应幅值增益	78
6.2	鞍结分岔	80
6.2.1	阻尼阶数对分岔的影响	80
6.2.2	不对称参数对分岔的影响	84
6.3	三种共振	85
6.3.1	高频激励引起的共振	85
6.3.2	阻尼阶数引起的共振	87
6.3.3	不对称参数引起的共振	89
6.4	本章重要图形的 MATLAB 仿真程序	89
	参考文献	91
第 7 章	分数阶非线性系统的分岔转换与共振现象	93
7.1	跨临界分岔	93
7.2	响应幅值增益	95
7.3	鞍结分岔	97
7.3.1	系统参数引起的鞍结分岔	97
7.3.2	高频激励引起的鞍结分岔	100

7.4	共振分析	104
7.5	本章重要图形的 MATLAB 仿真程序	107
	参考文献	109
第 8 章	高频激励下分数阶非线性系统的变尺度振动共振	110
8.1	理论分析	110
8.1.1	过阻尼分数阶 Duffing 系统	110
8.1.2	欠阻尼分数阶 Duffing 系统	112
8.2	数值模拟	114
8.2.1	过阻尼分数阶 Duffing 系统	115
8.2.2	欠阻尼分数阶 Duffing 系统	122
8.3	变尺度振动共振的相关讨论	125
8.4	本章重要图形的 MATLAB 仿真程序	125
	参考文献	129
第 9 章	含时滞项的分数阶非线性系统的叉形分岔与振动共振	130
9.1	含时滞项的分数阶过阻尼 Duffing 系统的叉形分岔与振动共振	130
9.1.1	叉形分岔	130
9.1.2	振动共振	133
9.1.3	数值模拟	140
9.2	含时滞项的分数阶欠阻尼双稳系统的叉形分岔与振动共振	142
9.2.1	响应幅值增益	142
9.2.2	分岔分析	143
9.3	含分数阶时滞项的欠阻尼双稳系统的振动共振	152
9.3.1	响应幅值增益	153
9.3.2	振动共振	155
9.3.3	数值模拟	157
9.4	本章重要图形的 MATLAB 仿真程序	160
	参考文献	163
索引		165

第 1 章 分数阶导数的基础知识

本章介绍分数阶导数的基础知识, 主要包括分数阶导数的基本定义、分数阶导数的基本性质、分数阶微分方程的常用数值算法等内容。

1.1 分数阶导数的定义

1695 年, 在洛必达 (L'Hôpital) 和莱布尼茨 (Leibniz) 交往的书信中, 首次提出了分数阶导数。洛必达提出, 如果求导的阶数为 $1/2$ 阶, 会产生什么结果? (“What if the order will be $1/2$?”) 莱布尼茨则认为虽然当下不能解决这个问题, 但预测将来会在这一领域有丰富的成果 (“It will lead to a paradox, from which one day useful consequence will be drawn”)^[1]。他们的这一次通信, 可看作是分数阶导数产生的萌芽。

如今距离分数阶导数的提出已经三百余年, 莱布尼茨的预言已成为现实, 分数阶微积分及相关知识的研究不仅在理论上取得了飞跃的发展, 也逐渐开始了在工程领域的应用探索。整数阶微积分可以看作是分数阶微积分的特例, 分数阶微积分具有整数阶微积分不具有的诸多优点。由于分数阶微积分不如整数阶微积分的物理意义明确, 且计算量大, 因此在很长一段时间里, 分数阶微积分发展较为缓慢。近几十年, 随着计算机技术的发展, 解决了分数阶微积分计算量大的问题, 且人们对分数阶微积分的物理意义研究也越来越深入。分数阶微积分已成为研究反常扩散、流变学、电化学、生物工程、量子复杂系统、金融学、多孔介质力学、非牛顿流体力学、黏弹性力学、振动控制、软物质物理、信号分析、图像处理、自动化过程控制等学科的有力数学工具^[2-31], 分数阶系统甚至被称为“21 世纪系统”^[32]。

分数阶导数的定义不像常规整数阶导数有唯一的定义式, 根据不同的研究背景, 分数阶导数在其发展的过程中被给予了多种形式的定义式。目前使用较多的有 Riemann-Liouville 定义、Caputo 定义和 Grünwald-Letnikov 定义。

函数 $f(t)$ 的 Riemann-Liouville 形式分数阶导数定义式为

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right] \quad (1.1)$$

式中, α 表示求导的阶数, $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbf{N}$, $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数, 考虑到实际的工程背景, 一般选取 α 的值为 $0 < \alpha \leq 2$ ^[33]。虽然 Riemann-Liouville 定义具有

良好的数学性质,但在工程应用中却受到诸多的限制。例如,初值问题在工程中具有重要意义,但常数的分数阶导数在 Riemann-Liouville 定义下却不为零,这是限制其工程应用的一个因素。

函数 $f(t)$ 的 Caputo 形式分数阶导数定义式为

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \quad (1.2)$$

在 Caputo 定义下常数的分数阶导数为零。Caputo 定义在工程应用中,其物理意义更加明确,但 Caputo 定义下对分数阶微积分进行离散计算比较困难。

函数 $f(t)$ 的 Grünwald-Letnikov 形式分数阶导数定义式为

$$\left. \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \right|_{t=kh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh-jh) \quad (1.3)$$

式中,二项式系数为

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}, j \geq 1 \quad (1.4)$$

二项式系数还可以写为

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} \quad (1.5)$$

Grünwald-Letnikov 形式的分数阶导数易于离散,方便进行数值运算。

对于部分函数,以上三种不同形式的分数阶导数定义式是等价的,可以相互通用。

1.2 分数阶导数的基本性质

线性性质: 常数与函数乘积的分数阶导数等于常数与该函数分数阶导数的乘积;两函数和的分数阶导数等于它们分数阶导数的和。线性性质也可描述为分数阶导数运算同时满足齐次性和可加性,概括为公式

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [\lambda f(t) + \gamma g(t)] = \lambda \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) + \gamma \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} g(t) \quad (1.6)$$

尺度变换性质: 已知时间尺度 $\tau = \beta t$, 函数 $x(t) = z(\tau)$, 则

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \beta^\alpha \frac{d^\alpha z(\tau)}{d\tau^\alpha} \quad (1.7)$$

尺度变换性质可通过 Grünwald-Letnikov 形式的分数阶导数定义式证明 [34]。

时间平移不变性质: 分数阶导数运算对时间平移具有不变性, 即

$$\frac{d^\alpha x(t-a)}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha x(\tau)}{d\tau^\alpha} \Big|_{\tau=t-a} \quad (1.8)$$

莱布尼茨法则: 两函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的分数阶导数都存在, 则它们乘积的分数阶导数为

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} [f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)g^{(k)}(t) \quad (1.9)$$

交换性和可加性: 函数 $f(x)$ 的分数阶导数运算满足交换性和可加性, 即

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \left[\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) \right] = \frac{d^\beta}{dt^\beta} \left[\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) \right] = \frac{d^{\alpha+\beta}}{dt^{\alpha+\beta}} f(t) \quad (1.10)$$

特别的, 当 $\beta = -\alpha$ 时,

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \left[\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}} f(t) \right] = \frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}} \left[\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) \right] = \frac{d^0}{dt^0} f(t) = f(t) \quad (1.11)$$

以上为分数阶导数运算常用的重要性质, 其他更详尽的性质描述可参考相关文献资料 [35]。

1.3 分数阶微分方程的数值算法

关于分数阶微分方程的数值算法较多, 国内外有诸多学者专注于研究分数阶微分方程的数值计算问题 [36-41]。本小节仅介绍 Grünwald-Letnikov 分数阶导数定义法以及预估校正法, 以下根据同一微分方程中含有导数项数目的不同来分别进行介绍。

1.3.1 同一微分方程中含有一个导数项方程的数值求解

1. Grünwald-Letnikov 分数阶导数定义法

研究一个方程中只含有一个导数项的微分方程

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x) + F(t), \quad \alpha \in (0, 2] \quad (1.12)$$

$f(x)$ 是给定的函数, $F(t)$ 是确定性外激励。记 $w_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$, 计算得到 [1]

$$w_0^\alpha = 1, \quad w_k^\alpha = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) w_{k-1}^\alpha, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.13)$$

如果 $\alpha = 1$, 则

$$w_0^1 = 1, \quad w_1^1 = -1, \quad w_k^1 = 0, \quad (k = 2, 3, \dots, n) \quad (1.14)$$

因此, 对于 $\alpha = 1$ 的特例, Grünwald-Letnikov 形式的分数阶导数定义式退化为常规的导数定义式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h} \quad (1.15)$$

将式 (1.13) 代入式 (1.3), 在零初始条件下得到

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \left[x(k) + \sum_{j=1}^{k-1} w_j^\alpha x(k-j) \right] = f[x(k-1)] + F(k-1) \quad (1.16)$$

当 h 取较小值时可以去掉极限符号, 因此进一步得到迭代公式

$$x(k) = - \sum_{j=1}^{k-1} w_j^\alpha x(k-j) + h^\alpha \{f[x(k-1)] + F(k-1)\} \quad (1.17)$$

利用式 (1.17) 可以将形如式 (1.12) 的分数阶微分方程进行数值计算。当 $\alpha = 1$ 时, 式 (1.17) 变为常微分方程数值计算的欧拉算法

$$x(k) = x(k-1) + h \{f[x(k-1)] + F(k-1)\} \quad (1.18)$$

2. 预估校正法

Caputo 导数具有较好的工程应用背景, 预估校正法 (predictor-corrector) 是基于 Caputo 导数给出的。预估校正法有多种形式, 本书仅介绍一种最常用的形式。在任意的初始条件 $x(0) = x_0$ 下, 利用预估校正法对方程 (1.12) 进行数值迭代计算的公式为

$$x(k+1) = x_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} [f(x_p(k+1)) + F(k+1)] + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{i=0}^k a_{i,k+1} [f(x(i)) + F(i)] \quad (1.19)$$

式中, 系数 $a_{i,k+1}$ 表示校正项的权重系数

$$a_{i,k+1} = \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & i=0 \\ (k-i+2)^{\alpha+1} + (k-i)^{\alpha+1} - 2(k-i+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq i \leq k \end{cases} \quad (1.20)$$

$x_p(k+1)$ 为 $x(k+1)$ 的预估值

$$x_p(k+1) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^k b_{i,k+1} [f(x(k)) + F(k)] \quad (1.21)$$

式中, $b_{i,k+1}$ 表示预估项的权重系数

$$b_{i,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} [(k-i+1)^\alpha - (k-i)^\alpha] \quad (1.22)$$

3. Grünwald-Letnikov 分数阶导数定义法与预估校正法的对比

现同时采用基于 Grünwald-Letnikov 分数阶导数定义的数值算法和预估校正法求取分数阶微分方程的数值解。选取 $f(x) = x - x^3$ 和 $F(t) = R \cos(\omega t)$, 即对以下分数阶非线性方程进行数值计算

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = x - x^3 + R \cos(\omega t), \quad \alpha \in (0, 2] \quad (1.23)$$

图 1.1 是数值仿真结果, 从图上可以看出采用两种数值算法得到的结果基本是一致的, 这从一个侧面验证了这两种算法的正确性。图 1.1 表明, 系统的瞬态响应和稳态响应都受系统阶数的影响, 尤其是稳态响应的振幅与系统阶数的依赖关系, 是本书后续章节重点关注的内容。图 1.1 的 MATLAB 仿真程序见 1.4 节。

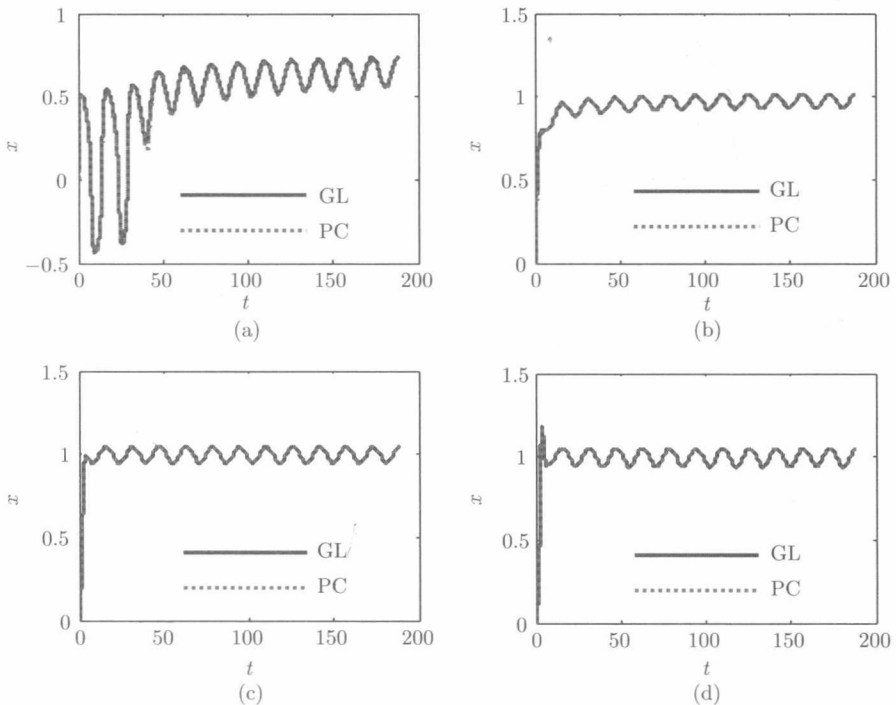


图 1.1 方程 (1.23) 的响应时间序列, (a) $\alpha=0.1$, (b) $\alpha=0.5$, (c) $\alpha=1.0$, (d) $\alpha=1.5$, 其他计算参数为 $R=0.1$, $\omega=0.4$, 计算的时间步长为 $h=0.01$, 初始条件为 $x(0)=0$ 。GL 表示基于 Grünwald-Letnikov 分数阶导数定义法的计算结果, PC 表示基于预估校正法的计算结果

1.3.2 同一微分方程中含有两个导数项方程的数值求解

对同一微分方程中含有两个导数项的方程进行数值模拟,需先把方程降阶为多个方程组成的方程组,使每个方程中各含有一个导数项,然后再按照 1.3.1 节的方法进行处理。例如,考虑如下形式的分数阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = f(x) + F(t), \quad \alpha \in (0, 2] \quad (1.24)$$

$f(x)$ 是给定的函数, $F(t)$ 是外激励。根据分数阶导数运算的可加性,对方程 (1.24) 进行降阶处理,可令

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^\beta y}{dt^\beta}, \quad \beta = 2 - \alpha \\ \frac{d^\beta y}{dt^\beta} = -\delta y + f(x) + F(t) \end{cases} \quad (1.25)$$

采用方程 (1.25) 进行计算,需计算两个方程, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^\beta y}{dt^\beta}$ 无需直接计算,但须计算的两个方程都是分数阶导数方程。对于同一方程中含有更多导数项的方程,也可采取相同的方法进行降阶处理。

1.4 本章重要图形的 MATLAB 仿真程序

图 1.1 的 MATLAB 仿真程序如下:

```
clear all; %清除所有变量的储存数据
close all; %关闭目前所有的图形窗口
clc; %清除command窗口的所有文字
fs=100; %采样频率
h=1/fs; %计算的时间步长
omega1=0.4; %信号频率
N=round(2*pi/omega1*fs*12); %采样点数取为信号一个周期内点数的整数倍
n=1:N;
t=n/fs; %采样时间的离散序列
F=0.1*cos(omega1.*t); %外激励时间序列
w=zeros(1,N); %二项式系数数列赋初值
x0=0; %状态变量赋初值
alpha=[0.1 0.5 1.0 1.5]; %分数阶阻尼的阶数取四个不同值
for s=1:4
```

```

%以下使用预估校正法画图
x=zeros(1,N); %时间响应序列赋初值
fn=zeros(1,N);
fn1=zeros(1,N);
a=zeros(1,N);
b=zeros(1,N);
fn10=x0-x0^3;
a10=alpha(s);
b10=h^alpha(s)/alpha(s);
xh(1)=x0+1/gamma(alpha(s))*b10*fn10;
fn0=xh(1)-xh(1)^3+F(1);
x(1)=x0+h^alpha(s)/gamma(alpha(s)+2)*fn0+h^alpha(s)/gamma(alpha(s)
+2)*a10*fn10;
fn0=x(1)-x(1)^3+F(1);
for n=1:N-1
    a0=n^(alpha(s)+1)-(n-alpha(s))*(n+1)^alpha(s);
    b0=h^alpha(s)/alpha(s)*((n+1)^alpha(s)-n^alpha(s));
    for i=1:n
        a(i)=(n-i+2)^(alpha(s)+1)+(n-i)^(alpha(s)+1)-2*(n-i+1)^(
alpha(s)+1);
        b(i)=h^alpha(s)*((n-i+1)^alpha(s)-(n-i)^alpha(s))/alpha(s);
    end
    fn1(n)=x(n)-x(n)^3+F(n);
    xh(n+1)=x0+1/gamma(alpha(s))*(b0*fn0+b*fn1');
    fn(n+1)=xh(n+1)-xh(n+1)^3+F(i+1);
    x(n+1)=x0+h^alpha(s)/gamma(alpha(s)+2)*fn(n+1)+h^alpha(s)/gamma
(alpha(s)+2)*(a0*fn0+a*fn1');
end
subplot(2,2,s)
plot(t,x,'linewidth',2)
hold on;

```

%以下使用Grünwald-Letnikov分数阶导数定义法画图

```

w=zeros(1,N); %二项式系数数列赋初值
x=zeros(1,N); %时间响应序列赋初值

```

```

w(1)=-alpha(s);
for i=1:N-1
    w(i+1)=(1-(alpha(s)+1)/(i+1))*w(i);
    x(i+1)=-w(1:i)*x(i:-1:1)+h^alpha(s)*(x(i)-x(i)^3+F(i));
end
plot(t,x,'r','linewidth',2)
xlabel('\itt','fontsize',12,'fontname','times new roman')
ylabel('\itx','fontsize',12,'fontname','times new roman')
legend('GL algorithm','PC algorithm')
end
gtext('(a) ','fontsize',10,'fontname','times new roman')
gtext('(b) ','fontsize',10,'fontname','times new roman')
gtext('(c) ','fontsize',10,'fontname','times new roman')
gtext('(d) ','fontsize',10,'fontname','times new roman')

```

参 考 文 献

- [1] Monje C A, Chen Y Q, Vinagre B M, et al. Fractional-order Systems and Controls : Fundamentals and Applications. London: Springer, 2010.
- [2] 陈文, 孙洪广, 李西成, 等. 力学与工程问题的分数阶导数建模. 北京: 科学出版社, 2010.
- [3] 王春阳, 李明秋, 姜淑华, 等. 分数阶控制系统设计. 北京: 国防工业出版社, 2014.
- [4] 吴强, 黄建华. 分数阶微积分. 北京: 清华大学出版社, 2016.
- [5] 汪纪锋. 分数阶系统控制性能分析. 北京: 电子工业出版社, 2010.
- [6] 赵春娜, 李英顺, 陆涛. 分数阶系统分析与设计. 北京: 国防工业出版社, 2011.
- [7] 张卫国, 肖炜麟. 分数布朗运动下股本权证定价研究——模型与参数估计. 北京: 科学出版社, 2013.
- [8] 李文, 赵慧敏. 分数阶控制器设计方法与振动抑制性能分析. 北京: 科学出版社, 2014.
- [9] Uchaikin V V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Volume I : Background and Theory. Beijing: Higher Education Press, 2013.
- [10] Uchaikin V V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Volume II : Applications. Beijing: Higher Education Press, 2013.
- [11] Tarasov V E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Beijing: Higher Education Press, 2010.
- [12] Sabatier J, Agrawal O P, Machado J A T. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Netherlands: Springer, 2014.
- [13] 包景东. 反常统计动力学导论. 北京: 科学出版社, 2012.

- [14] 沙学军, 史军, 张钦宇. 分数傅里叶变换原理及其在通信系统中的应用. 北京: 人民邮电出版社, 2013.
- [15] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Singapore: Imperial College Press, 2010.
- [16] Caponetto R, Dongola G, Fortuna L, et al. *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*. Singapore: World Scientific, 2010.
- [17] Yang F, Zhu K Q. On the definition of fractional derivatives in rheology. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2011, 1(1): 012007.
- [18] Meral F C, Royston T J, Magin R. Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(4): 939-945.
- [19] Chen Y, Sun R, Zhou A, et al. Fractional order signal processing of electrochemical noises. *Journal of Vibration and Control*, 2008, 14(9-10): 1443-1456.
- [20] Oldham K B. Fractional differential equations in electrochemistry. *Advances in Engineering Software*, 2010, 41(1): 9-12.
- [21] Magin R L, Ovia M. Modeling the cardiac tissue electrode interface using fractional calculus. *Journal of Vibration and Control*, 2008, 14(9-10): 1431-1442.
- [22] Magin R L. Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, 59(5): 1586-1593.
- [23] Carpinteri A, Mainardi F. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Wien and New York: Springer, 1997.
- [24] Odibat Z, Momani S. The variational iteration method: an efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics. *Computers & Mathematics with Applications*, 2009, 58(11): 2199-2208.
- [25] Baleanu D, Golmankhaneh A, Nigmatullin R, et al. Fractional newtonian mechanics. *Open Physics*, 2010, 8(1): 120-125.
- [26] Rossikhin Y A, Shitikova M V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results. *ASME Applied Mechanics Reviews*, 2010, 63(1): 010801.
- [27] Vinagre B M, Petrás I, Podlubny I, et al. Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in model-reference adaptive control. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 29(1-4): 269-279.
- [28] Agrawal O P. A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 38(1-4): 323-337.
- [29] Ozaktas H M, Zalevsky Z, Kutay M A. *The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing*. New York: Wiley, 2001.
- [30] Das S, Pan I. *Fractional Order Signal Processing: Introductory Concepts and Applications*. Berlin: Springer, 2011.